浅谈叶状结构与算术

李文威

2012 年 11 月 19 日

光滑流形及其切丛

设 M 为连通光滑流形，$\pi : TM \to M$ 为其切丛。直观地看，

$$
\begin{aligned}
TM &= \{(p, X) : p \in M,\ X \in T_pM\},\\
T_pM &:= M\text{在点 } p \text{ 的切空间},\\
\pi(p, X) &= p.
\end{aligned}
$$

从 M 的开子集 U 至 TM，形如 $p \mapsto (p, X(p))$ 的光滑映射称作 U 上的切向量场，简记为 X。这些切向量场构成的空间记为 $\Gamma(U, TM)$。

Poisson 括积

借由方向导数，切向量场可视作 M 上的一阶线性微分算子。对所有 U，空间 $\Gamma(U, TM)$ 对下述括积 $[\cdot, \cdot]$ 保持封闭：

$$[X, Y] := XY - YX.$$

叶状结构

今考虑 TM 的子丛 $\mathcal{F}$，即

$$\mathcal{F} = \{(p, X) \in TM : X \in \mathcal{F}_p\}$$

其中 $\mathcal{F}_p$ 是 T_pM 的子空间，随着 p 光滑地变化。用同样方法定义子空间 $\Gamma(U, \mathcal{F}) \subset \Gamma(U, TM)$。

对合子丛

如果对所有开子集 U，空间 $\Gamma(U, \mathcal{F})$ 在 Poisson 括积 $[\cdot, \cdot]$ 下保持封闭，则称 $\mathcal{F}$ 是 TM 的对合子丛。

- TM 本身是对合的；
- 秩一（即：$\forall p, \ \dim \mathcal{F}_p = 1$）的子丛 $\mathcal{F}$ 是对合的。

定义

以下称切丛的对合子丛为 M 上的叶状结构。

设 $\iota : N \hookrightarrow M$ 为浸入子流形；相应地有 $TN \hookrightarrow \iota^* TM$。如果有

$$TN = \iota^* \mathcal{F}$$

则 $\iota : N \hookrightarrow M$ 称作 $\mathcal{F}$ 的一个积分流形；极大积分流形称作叶。

Frobenius 定理

给定叶状结构 $\mathcal{F}$，对每一点 $p \in M$ 都存在唯一一片包含 p 的叶。

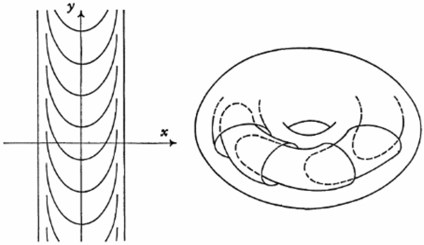
注记

这套理论可推广到连通复流形：C^∞-结构 $\to$ 全纯结构。

例一：环面 $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$

常值切向量场 $a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ 给出叶状结构（假设 $(a,b) \neq (0,0)$）。极大积分流形由闭浸入给出的充分必要条件是 $(a:b) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$；此时的叶是 $\mathbb{T}^2$ 上的闭测地线。

例二：$\mathbb{S}^3 \simeq \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ 上的 Reeb 叶状结构



$+\ \mathbb{S}^3$ 的 Heegaard 分解

取自 H. Blaine Lawson, *Foliations*, Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 369-418

代数簇

域 k 上的代数簇的粗略定义：

- 局部同构于某一族多项式 $f_1, \dots, f_r \in k[X_1, \dots, X_n]$ 的共同零点；
- 态射为多项式给出的映射；
- 代数簇上也有向量丛的概念；
- 可定义光滑代数簇（利用 Jacobi 行列式判准）；
- 对光滑代数簇 X，可定义其切丛 TX；切向量场 $X \in \Gamma(U, TX)$ 可以视为作用在 U 上的多项式函数的导子。

对光滑代数簇的切向量场依然可以定义 Poisson 括积

$$[X, Y] := XY - YX$$

子丛 $\mathcal{F} \subset TX$ 若对 $[\cdot, \cdot]$ 封闭，则称 $\mathcal{F}$ 为对合的。

代数叶状结构

准此，定义光滑代数簇 X 上的叶状结构为 TX 的对合子丛。光滑子簇的闭嵌入$\iota : Y \hookrightarrow X$ 如满足

$$TY = \iota^* \mathcal{F}$$

则称之为 $\mathcal{F}$ 的叶。

注记一

给定叶状结构 $\mathcal{F}$ 及 k-有理点 $p \in X(k)$，未必存在包含 p 的叶。

代数性问题

假设 $k \subset \mathbb{C}$。由光滑代数簇 X 得到的复流形记作 X^{an}。已知在复流形范畴内，存在唯一一个过点 p 的叶 $\iota^{an} : Y^{an} \hookrightarrow X^{an}$。问题：$\iota^{an}$ 是否由某个 k-代数簇的闭嵌入 $\iota : Y \hookrightarrow X$ 所导出？

如存在这样的 $\iota : Y \hookrightarrow X$，则称过 p 的叶是代数的。
如 $k \subset k' \subset \mathbb{C}$，则可以将 $X, \mathcal{F}, p$ 视作定义在 k' 上的对象。以下引理表明代数性是一种几何性质，无关基域 k 的选取。

引理（Bost）

过 p 的叶是 k-代数的 $\Leftrightarrow$ 它是 k'-代数的。

思路：研究叶状结构在 p 点的形式叶 $\hat{Y}_p$（由定义在 p 附近的形式幂级数定义），及其 Zariski 闭包 Y_p。可证代数性等价于 $\dim \hat{Y}_p = \dim Y_p$。易见此条件与基域的选取无关。

模 $\mathfrak{p}$ 约化

以下假设 k 是数域（例如 $\mathbb{Q}$），$\mathfrak{o}$ 表 k 中代数整数构成的环。
给定 k-代数簇 X。对充分可除的整数 N，代数簇 X 能由一族系数在 $\mathfrak{o}[1/N]$ 中的多项式方程定义。以下固定 N 及前述方程组。

约化

令 $\mathfrak{p}$ 为 $\mathfrak{o}$ 的素理想，$k(\mathfrak{p}) := \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 为相应的剩余域，并假设 $\mathfrak{p} \nmid N$。
在代数簇 X 的定义中，将所有多项式模 $\mathfrak{p}$，得到的新代数簇 $X_{\mathfrak{p}}$ 称为 X 的模 $\mathfrak{p}$ 约化。

注记

如果 X 是光滑代数簇，则可取充分可除的 N 使得每个 $X_{\mathfrak{p}}$（$\mathfrak{p} \nmid N$）都是光滑的。

p 次幂

现假设 p 是素数，k 是特征 p 的域（即：$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \hookrightarrow k$）。令 X 为 k 上的光滑代数簇。
如前所述，X 上的切向量场可以视作导子$D : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ 构成的空间，这里 $\mathcal{O}_X$ 表示 X 上的正则函数层。

导子的定义

$$D \in \mathrm{Hom}_k(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$$
$$D(fg) = fD(g) + gD(f), \quad \text{（Leibniz 法则）}$$

导子空间对乘法（合成）运算不封闭，但是在特征 p 情形有下述现象。

p 次幂

切向量场对 p 次幂运算 $D \mapsto D^p$ 封闭：

p-可积性

依然假设 k 是特征 p 的域。以下考虑光滑代数簇 X 上的叶状结构 $\mathcal{F} \subset TX$。

定义

若 $\mathcal{F}$ 对 p 次幂运算封闭，则称 $\mathcal{F}$ 是 p-可积的。

注记

p-可积性 $\leftarrow\!--$ 处处有叶。

代数群

设 k 为任意域，G 是 k 上的代数群。即：

- 给定 k-代数簇间的态射 $m: G\times G\to G$（乘法）及 $i: G\times G$（逆）；
- 给定 G 的 k-有理点 e（单位元）；

并满足寻常的群论公理。

假设

以下皆假设 G 光滑并连通。

注意：在特征零情况下，代数群总是光滑的
以 $\mathfrak{g}$ 表示 G 的李代数，群 G 在切丛 $TG\simeq G\times\mathfrak{g}$ 上以左平移作用。今后仅考虑左不变的叶状结构。

观察

1. 群 G 上左不变的叶状结构一一对应于 $\mathfrak{g}$ 的子李代数。
2. 设 k 为特征 p，则 $\mathfrak{g}$ 的限制李代数结构由左不变切向量场的 p 次幂给出；
3. 承上，p-可积的左不变叶状结构一一对应于 $\mathfrak{g}$ 的限制子李代数。
4. 对应到子李代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ 的左不变叶状结构在单位元 e 有叶 $\Leftrightarrow$ 存在闭代数子群 $H \subset G$，其李代数为 $\mathfrak{h}$。

简言之：左不变叶状结构是否有叶 $\leftrightarrow$ 子李代数是否来自闭代数子群。

例子：代数环面

取 $k = \mathbb{C}$，群 $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ 的一维代数子群必可写成 $\{(x, y) : x^r = y^s\}$，其中 r, s 为互素整数，而 $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ 的子李代数则多得多！

主定理

以下设 k 为数域。取充分可除的正整数 N 使得对每个 $\mathfrak{o}$ 的素理想 $\mathfrak{p} \nmid N$，G 有光滑约化 $G_{\mathfrak{p}}$，而且 $G_{\mathfrak{p}}$ 为剩余域 $k(\mathfrak{p})$ 上的代数群。
考虑子李代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$。适当地加大 N，可假设对上述素理想也能定义模 $\mathfrak{p}$ 约化 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{g}_{\mathfrak{p}}$。

主定理

对于给定的子李代数 $\mathfrak{h}$，以及如上的正整数 N，以下性质等价：

1. $\mathfrak{h}$ 来自某个 G 的闭代数子群；
2. 对每个 $\mathfrak{o}$ 的素理想 $\mathfrak{p} \nmid N$，模 $\mathfrak{p}$ 约化 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$ 对 p 次幂运算封闭；此处 p 代表剩余域 $k(\mathfrak{p})$ 的特征。

注记

对于更一般的代数叶状结构，见 J.-B. Bost, *Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields*. Publ. Math. de l'IHÉS, 93 (2001), p. 161-221。代数群情形的证明可以大大地简化。

椭圆曲线

考虑域 k 上的椭圆曲线。

- 如果存在椭圆曲线之间的满同态 $f\colon E_1 \to E_2$，则称 E_1，E_2 为同源的。同源构成椭圆曲线之间的等价关系。
- 当 k 是数域，对于充分可除的 N，对每个素理想 $\mathfrak{p} \nmid N$ 可以定义 E 的模 $\mathfrak{p}$ 约化 $E_{\mathfrak{p}}$，置

$$a_{\mathfrak{p}}(E) := 1 - |E_{\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}))| + |k(\mathfrak{p})|$$

其中 $E_{\mathfrak{p}}(k(\mathfrak{p}))$ 代表 $E_{\mathfrak{p}}$ 的 $k(\mathfrak{p})$-有理点集。

今假设 p 为素数，$k = \mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$。

引理

对于 k 上的椭圆曲线 E，李代数 $\mathrm{Lie}(E)$ 上的 p-次幂运算由标量乘法

$$v \mapsto (1 - |E(k)|) \cdot v$$

给出。

思路

利用椭圆曲线的自对偶性质，有 $\mathrm{Lie}(E) \simeq H^1(E, \mathcal{O}_E)$；可验证 p-次幂运算对应到 Frobenius 态射的拉回

$$\mathrm{Fr}^* : H^1(E, \mathcal{O}_E) \to H^1(E, \mathcal{O}_E)$$

利用 E 的 Weierstraß 方程可以联系 $|E(k)|$ 和 Fr^*。

同源定理

定理

设 E_1、E_2 为 $\mathbb{Q}$ 上的椭圆曲线。以下性质等价：

1. E_1 与 E_2 同源；
2. 存在充分可除的整数 N，对每个素数 $p \nmid N$ 都有
$$a_p(E_1) = a_p(E_2).$$

注记

- 这是 Faltings 定理的一个特例。
- 对于 $i = 1, 2$，$a_p(E_i)$ 是 E_i 的 Hasse-Weil L-函数的 p 次项系数。

同源定理的证明

(1)$\Rightarrow$ (2) 是相对容易的（利用 Frobenius 态射的函子性），以下仅讨论 (2)$\Rightarrow$ (1)。

任取 $v_1 \in \mathrm{Lie}(E_1)$，$v_2 \in \mathrm{Lie}(E_2)$ 使得 $v_1 \neq 0$，$v_1 \neq 0$。据之前对 p-次幂的描述，可知 (v_1, v_2) 在 $\mathrm{Lie}(E_1 \times E_2)$ 中展成的子李代数对 p-次幂封闭，因而对应到闭子群 $H \subset E_1 \times E_2$，而且 $H \neq E_1, E_2$。

坐标投影 $H \rightrightarrows E_1, E_2$ 分别给出 H 到 E_1 和 E_2 的同源，因此 E_1 与 E_2 同源。

谨以此纪念数学研究所创建六十周年