线性代数群上的测度与算术概说

李文威

中国科学院数学与系统科学研究院

2013 年 11 月 13 日
首师大数论与代数几何讨论班

首都师范大学
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY

简史

以下考虑的群都是局部紧拓扑群, 带自身的左乘和右乘作用. 测度指的都是 Radon 测度 (即: 与拓扑结构匹配).

定理 (Haar, *Der Maassbegriff in der Kontinuierlichen Gruppen*, 1933)

任意局部紧群 G 上都存在左不变测度, 彼此至多差一个正的常数倍; 称这类测度为左 Haar 测度. 右不变的情形相同.

注记: 唯一性由 von Neumann (1936) 和 Weil (1940) 证明.

定义

存在同态 $\delta_G : G \to \mathbb{R}_{>0}$ 使得对每个左 Haar 测度 μ 皆有 $\mathrm{d}\mu(gxg^{-1}) = \delta_G(g)\mathrm{d}\mu(x)$. 当 $\delta_G = 1$ 时称 G 是幺模的. 此时左右 Haar 测度无异.

1. Hurwitz, *Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration* (1897) 用积分方法研究不变量理论, 开群上积分之先河.
2. Schur, Weyl, É. Cartan 以不变积分研究紧李群的表示理论 $\rightarrow$ Peter–Weyl 定理等...
3. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications* (1940) 系统地发展了局部紧群上的不变积分理论. 影响遍及了
   - 局部紧群的表示理论 (Harish-Chandra, Langlands, *et al.*)
   - 数论, 参看 Weil, *Basic Number Theory* (1966).

其中最要紧的情形是线性代数群上的 Haar 测度及相应的积分.

李群的情形

- M 为 C^∞ 流形, ω 是 M 上的最高次外微分形式, 则 $|\omega|$ 定义了 M 上的一个**密度**. 由此导出一个 Radon 测度 μ 满足

$$\int_M f d\mu := \int_M f|\omega|.$$

具体地看, 若在局部坐标卡 $M \supset U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ 下
$\omega(x) = p(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, 则
$\int_U f d\mu = \int f(x)|p(x)|dx_1 \cdots dx_n$.

- 若 G 是李群, 则每个 $\omega \in \bigwedge^{\text{top}} \mathfrak{g}^*$ 皆对应到一个左不变微分形式, 相应的左不变测度记作 $|\omega|$.
- 今考虑局部域 F, 例如 $\mathbb{R}$, p 进域 $\mathbb{Q}_p$ 或有限域上的 Laurent 级数域 $\mathbb{F}_q((t))$, 及其有限扩张. 上述办法同样适用. 特别地: $\omega \in \bigwedge^{\text{top}} \mathfrak{g}^*$ 给出 F 上的解析李群 G 的左不变测度 $|\omega|$.

例子

- 取一局部域 F, 一般线性群定义为 $\mathsf{GL}(n,F) := \{g \in \mathsf{Mat}_{n\times n}(F) : \det(g) \neq 0\} \subset \mathsf{Mat}_{n\times n}(F)$ (开子空间); 群运算 = 矩阵乘法.
- $\mathsf{Mat}_{n\times n}(F) = F^{n^2}$ 带有矩阵加法下的 Haar 测度 dg, 例如当 $F = \mathbb{R}$ 时可取 $\mathbb{R}^{n^2}$ 上的 Lebesgue 测度.
- 可证明 $|\det g|^{-n} dg$ 给出 $\mathsf{GL}(n,F)$ 上的 Haar 测度; $\mathsf{GL}(n,F)$ 是幺模群.

今后研究的群都是 F 上的线性代数群(的 F-点), 包括前述的 $\mathsf{GL}(n,F)$, 特殊线性群 $\mathsf{SL}(n,F)$, 辛群 $\mathsf{Sp}(2n,F)$, $E_8(F)$ 等等; 这些都是约化群.

Adèle 群

设 F 为整体域, 例如

- 有理数域 $\mathbb{Q}$ 及其有限扩张 (称为数域);
- 有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的函数域 $\mathbb{F}_q(X)$, 其中 X 是 $\mathbb{F}_q$ 上几何连通的光滑射影曲线; 例如有理函数域 $F = \mathbb{F}_q(t)$.

Chevalley 的想法

F 的 Adèle 环定义为 $\mathbb{A}_F = \prod'_v F_v$ (限制积): F 的位 $v \rightsquigarrow$ 完备化得到局部域 F_v.

G: F-上的线性代数群. 定义 $G(\mathbb{A}_F) = \prod'_v G(F_v)$, 这是局部紧群, $G(F)$ 对角地嵌入为其离散子群.

☞ 陪集空间 $G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$ 上的调和分析 $\longleftrightarrow$ G 上的算术.

经典例子: 类域论 $\leftrightarrow$ $G = \mathrm{GL}(1)$ 的情形.

今后主要考虑约化群; 约化群的 F-点 (局部域) 或 adèle 点 (整体域) 构成的群都是局部紧幺模群. 尽管 Haar 测度之间可以相差常数倍, 对于算术问题, 往往须考虑

- 典范的 Haar 测度选取 (可有多种),
- 确定不同测度间的倍数差异,
- 确定局部测度与整体测度的联系,
- 确定某些齐性空间的体积.

适当地选取 Haar 测度可以得到重要的算术量. 作为例子, 以下考虑一些基本域的面积问题 (Minkowski, Siegel).

$\mathsf{SL}(n,\mathbb{Z})\backslash\mathsf{SL}(n,\mathbb{R})$ 的面积

考虑 $\mathsf{SL}(n,\mathbb{R})$ 及其由整系数方阵构成的离散子群 $\Gamma := \mathsf{SL}(n,\mathbb{Z})$. 陪集空间 $\Gamma\backslash\mathsf{SL}(n,\mathbb{R})$ 带有 $\mathsf{SL}(n,\mathbb{R})$ 的商测度. 为选定 $\mathsf{SL}(n,\mathbb{R})$ 的测度, 考虑岩泽分解

$$\mathsf{SL}(n,\mathbb{R}) = U \cdot A \cdot \mathsf{SO}(n,\mathbb{R}) \quad (\text{同胚})$$

其中

- U 是上三角幂幺矩阵群, 视同 $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ 带有 Lebesgue 测度;
- A 是正系数对角矩阵群, 带有测度 $d^\times a = \prod_{i=1}^n a_i^{-1} da_i$;
- 取 $\mathsf{SO}(n,\mathbb{R})$ 的测度使之体积为 $\prod_{i=1}^{n-1} \mathrm{vol}(\mathbb{S}^i)$.

设 B 为上三角矩阵群, 对上述分解 $g = uak$ 有相应的积分公式 $dg = \delta_B(a)^{-1} du \cdot d^\times a \cdot dk$.

定理 (Minkowski)

对于上述测度, $\mathrm{vol}(\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}))=\zeta(2)\zeta(3)\cdots\zeta(n)$, 此处 $\zeta(s)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-s}$, $\mathrm{Re}(s)>1$ (Riemann ζ-函数).

一般运用 Poisson 求和公式证明.
类此, 适当地选取测度可得

定理 (Siegel)

$\mathrm{vol}(\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Z})\backslash\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}))=\zeta(2)\zeta(4)\cdots\zeta(2n)$.

在稍后讨论 Euler-Poincaré 测度时, 还将得到相似的结果 $\mathrm{vol}(\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Z})\backslash\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}))=\zeta(-1)\zeta(-3)\cdots\zeta(1-2n)$ (使用 Euler-Poincaré 测度, 带符号), 这还等同于某个局部对称空间 $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Z})\backslash X$ 的 Euler-Poincaré 示性数.

玉河测度

☞ 参考材料: Weil, *Adeles and Algebraic Groups*, PM23 (1982).

设 F 是整体域, 如 $\mathbb{Q}$; G 是 F 上的代数群并假设对 F 的每个完备化 F_v, $G(F_v)$ 是幺幂群. 大约在 1950 年代后期, 玉河恒夫留意到以下性质.

定理

取非零的 F-有理形式 $\omega \in \bigwedge^{\mathrm{top}} \mathfrak{g}^*(F)$. 若 $\prod_v |\omega|_v$ 在

$$\prod_{v \neq \infty} \mathrm{vol}(G(\mathfrak{o}_v); |\omega|_v) < +\infty$$

的意义下收敛, 则 $G(\mathbb{A}_F)$ 上的测度 $\prod_v |\omega|_v$ 良定且无关 ω 的选取.

这是 $|\cdot|_v$ 的乘积公式的简单推论.

仅考虑 G 是约化群的情形. 设 $X(G) := \mathrm{Hom}_{F^s}(G, \mathrm{GL}(1))$, 其中 $F^s|F$ 是选定的可分闭包; 这是有限秩自由 $\mathbb{Z}$-模, 带有 Galois 群 $\mathrm{Gal}(F^s|F)$ 的连续作用. 其 Artin L-函数写作

$$L(s, X(G)) = L(s, X(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}) = \frac{\rho_G}{(s-1)^r} + \text{高次项}.$$

置 d_F 为 $F|\mathbb{Q}$ 的判别式 (数域情形) 或 $q^{2g(X)-2}$ (函数域情形). 现在可以定义 $G(\mathbb{A}_F)$ 的玉河测度.

定义

$$\mu_{\mathrm{Tama}} = \rho_G^{-1} |d_F|^{-\frac{\dim G}{2}} \prod_{v|\infty} |\omega|_v \cdot \prod_{v\nmid\infty} \underbrace{L_v(1, X(G))}_{\text{局部 Artin L-函数}} |\omega|_v$$

玉河数

令 $G(\mathbb{A}_F)^1 := \bigcap_\chi \mathrm{Ker}|\chi|_{\mathbb{A}_F} \supset G(F)$, 其中 χ 取遍 $X(G)^{\mathrm{Gal}(F^s|F)}$ 的元素.

化约理论 (Minkowski, Harish-Chandra, Borel *et al*)

对 $G(\mathbb{A}_F)^1$ 上任意的 Haar 测度 μ, 其商测度满足 $\mu(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)^1) < +\infty$.

群 $G(\mathbb{A}_F)/G(\mathbb{A}_F)^1$ 同构于一个欧氏空间 (数域情形) 或格 (函数域情形), 其测度可用 $X(G)$ 校准; 由此得到 $G(\mathbb{A}_F)^1$ 上的典范 Haar 测度. 细节不论, 仅须注意到对半单群有 $G(\mathbb{A}_F) = G(\mathbb{A}_F)^1$.

定义

定义 G 的玉河数为 $\tau(G) := \mu_{\mathrm{Tama}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)^1)$.

注记

1. 项 $|d_F|^{\frac{\dim G}{2}}$ 确保了 μ_{Tama} 与 $\tau(G)$ 在标量限制下不变, 从调和分析的角度看这是自然的要求.
2. 玉河恒夫和 M. Kneser (1956) 独立地发现了正交群的玉河数和 Smith–Minkowski–Siegel 质量公式的联系.
3. 小野孝 (1961) 确定了代数环面的玉河数.
4. Weil 在 1961 年 Princeton 的讲座上计算了许多典型群的例子, 由此引生了关于玉河数的 Weil 猜想:

Weil 猜想

设 F 是数域, G 在约化代数群的意义下是单连通的, 则 $\tau(G) = 1$.

例如 $\tau(\mathsf{SL}(n)) = 1$, $\tau(\mathsf{Sp}(2n)) = 1, \ldots$

数域上的 Weil 猜想最终在 1988 年被 Kottwitz 完全解决. 历程如下, 详见 Voskresenskii (1995):

1. Langlands (1966) 证明了 Chevalley 群的情形, 思路是将之化为 Eisenstein 级数内积的计算.
2. 黎景辉 (1980) 证明了拟分裂群的情形; 注意到任意约化群都是某个拟分裂群的内形式.
3. Sansuc (1981) 用群的上同调不变量描述相对玉河数 $\tau_1(G)$.
4. Kottwitz (1984, 1988) 证明内形式具有相同的玉河数, 从而证明了 Weil 猜想; 他的证明实际上是 Arthur–Selberg 迹公式稳定化过程中的一个副产品. 配合 Sansuc 公式, 遂得到

$$\tau(G) = \# H^1_{\mathrm{ab}}(\mathbb{A}_F/F, G) \cdot \left(\#\mathrm{ker}^1(F, G)\right)^{-1}.$$

这里我们用了 Borovoi 和 Labesse 的 Abel 化上同调语言, $\mathrm{ker}^1(\cdots)$ 是 Shafarevich 群.

关于函数域上的 Weil 猜想, 谨推荐 Jacob Lurie 的

- Harvard 大学 2013 年春季课程讲义 *Tamagawa Numbers via Nonabelian Poincaré Duality (283)*, 或
- 2012 年 5 月 6 日在 Cornell 大学的报告视频 *The Siegel Mass Formula, Tamagawa Numbers, and Nonabelian Poincaré Duality*.

代数簇上的玉河测度

以有理微分形式定义典范测度的方法还可施于其它代数簇.

- E. Peyre, *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J. 79 (1995) 用玉河测度细化了 Manin 关于 Fano 簇上的有理点分布猜想.
- 关于 Manin 猜想, 可参看 Browning, *Quantitative Arithmetic of Projective Varieties*, PM 277 (2009).

应用: Smith–Minkowski–Siegel 质量公式

二次型 (例如 $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$) 的算术理论是 Fermat, Euler 等一代代优秀数学家关注的问题. 主题包括了 (甲) 整数能否以给定的二次型表示? 表法几何? (乙) 二次型的分类理论. 以下仅探讨后者.

1. 数域 F 上的二次型已被 Minkowski (1890) 完整分类, 此时有局部-整体原理: 两个二次型域扩张到每个 F_v 都等价 $\iff$ 它们在 F 上等价, 又称 Hasse 原理;
2. 整二次型的理论远为复杂, Hasse 原理不成立.

简言之, 质量公式说的是

$$\text{质量}(V, q) = \text{Hasse 原理的阻碍} = \prod_v (v\text{处的 “局部密度”}).$$

定义

简单起见, 假设 $F=\mathbb{Q}$, 并且在 $\mathbb{R}$ 上只考虑正定型.
设 R 为交换幺环, V 为有限型的投射 R-模. 二次型 $q:V\to R$ 据定义须满足

1. $(v,w)\mapsto q(v+w)-q(v)-q(w)$ 给出双线性型 $V\times V\to R$;
2. $q(tv)=t^2q(v)$, $\forall t\in R, v\in V$.

以下取 $R=\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{Z}_p,\mathbb{Q}_p$, 或 $\hat{\mathbb{Z}}:=\varprojlim \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.
定义 n 维的偶格(缘由略去) 为 $R=\mathbb{Z}$ 上的二次型 (V,q), 满足

- $V\simeq\mathbb{Z}^n$,
- $(V,q)\otimes\mathbb{Q}$ 是非退化有理二次型,
- $(V,q)\otimes\mathbb{R}$ 是正定实二次型.

种的定义

两偶格 (V,q), (V',q') 属同种[1], 如果

1. TA 们维数相等;
2. $(V,q)\otimes\hat{\mathbb{Z}}\simeq(V',q')\otimes\hat{\mathbb{Z}}$.

根据假设, 同维的偶格域扩张到 $\mathbb{R}$ 后必然等价; 由于 $\hat{\mathbb{Z}}=\prod_{p:\text{素数}}\mathbb{Z}_p$, 同种说的无非是 (V,q) 和 (V',q') 局部等价. 一个重要性质是: 每个种里的等价类数目有限.

质量的定义

$\mathrm{m}(V,q):=\sum_{(V',q')}\#O(V',\mathbb{Z})^{-1}$, 其中 (V',q') 取遍 (V,q) 所属的种, 精确到等价; 相应的正交群给出 $\mathbb{Z}$ 上的群概型 $O(V')$.

[1]种的原文是拉丁文 genus

测度观点看质量

根据种的定义可以导出和式里的 (V', q') 一一对应于

$$O(V,\mathbb{Q})\backslash O(V,\mathbb{A}_F^{\infty})/O(V,\hat{\mathbb{Z}})$$

中的元素, 其中 $\mathbb{A}_F^{\infty} = \prod'_{p:\text{素数}} \mathbb{Q}_p$ 系有限 adèle 环. 若 (V', q') 对应于包含 $\gamma \in O(V,\mathbb{A}_F^{\infty})$ 的双陪集, 则

$$O(V',\mathbb{Z}) \simeq O(V,\hat{\mathbb{Z}}) \cap \gamma^{-1} O(V,\mathbb{Q})\gamma.$$

今起考虑 $2^{-k+1} m(V,q)$, $k := \{p : O(V,\mathbb{Z}_p) = \mathsf{SO}(V,\mathbb{Z}_p)\}$ 这样一来可将之前的 $O(\cdots)$ 群全改写为特殊正交群 $\mathsf{SO}(\cdots)$, 这是个约化群. 令 $X := \mathsf{SO}(V,\mathbb{Q})\backslash\mathsf{SO}(V,\mathbb{A})$, 还可以将 $2^{-k+1} m(V,q)$ 改写成

$$\sum_{\gamma\in X/(\mathsf{SO}(V,\mathbb{R})\times\mathsf{SO}(V,\hat{\mathbb{Z}}))} \frac{\mu(x\cdot \mathsf{SO}(V,\mathbb{R})\times \mathsf{SO}(V,\hat{\mathbb{Z}}))}{\mu(\mathsf{SO}(V,\mathbb{R})\times \mathsf{SO}(V,\hat{\mathbb{Z}}))},$$

这里 μ 是 $\mathsf{SO}(V,\mathbb{A}_F)$ 上任意的 Haar 测度; 上式还可进一步写成

$$\frac{\mu(\mathsf{SO}(V,\mathbb{Q})\backslash\mathsf{SO}(V,\mathbb{A}_F))}{\mu(\mathsf{SO}(V,\mathbb{R})\times\mathsf{SO}(V,\hat{\mathbb{Z}}))}.$$

取 $\mu=\mu_{\mathsf{Tama}}=\mu_\infty\times\prod_p\mu_p$, 则得到

$$\tau(\mathsf{SO}(V))\underbrace{\mu_\infty(\mathsf{SO}(V,\mathbb{R}))^{-1}\prod_p\mu_p(\mathsf{SO}(V,\mathbb{Z}_p))^{-1}}_{\text{所谓局部密度}}.$$

经过玉河恒夫与 Kneser 重述的质量公式如下.

Smith-Minkowski-Siegel 质量公式

当 $n\geq 3$ 时, $\tau(\mathsf{SO}(V))=2$.

注记

1. $n = 2$ 情形即是 Dirichlet 的虚二次域解析类数公式.
2. 可以推广到 Hermite 形式, 乃至于其它约化群.
3. 志村五郎自 1990 年代以来做了大量解析面向的工作.
4. 实用上最困难的是局部密度 $\mu_p(\mathrm{SO}(V, \mathbb{Z}_p))$ 的计算, 为此首先须了解玉河测度的分解: $\mu_{\mathrm{Tama}} = \mu_\infty \times \prod_p \mu_p$. 其次, 需要足够的工具描述紧开子群 $\mathrm{SO}(V, \mathbb{Z}_p) \subset \mathrm{SO}(V, \mathbb{Q}_p)$. Bruhat–Tits 的厦理论适用于此 (颜维德–Hanke–于如岗, 2001).
5. $p = 2$ 的局部密度计算尤难.
6. 也有解析数论的进路 (圆法), 以此重新导出 $\tau(\mathrm{SO}(V)) = 2$.

以下将探讨局部域情形下约化群上的典范测度, 及其与玉河测度的关系.

Euler–Poincaré 测度

参考资料: Serre, *Cohomologie des groupes discrets*, in Prospects in Mathematics, Ann. Math. Studies 70 (1971).
考虑幺模局部紧群 G 及其不变测度 μ; 本节的测度容许带符号.

定义

若 μ 满足下述条件则称为 G 的 Euler–Poincaré 测度: 对每个无挠, 余紧[2]的离散子群 $\Gamma \subset G$,

- 平凡 Γ-模 $\mathbb{Z}$ 有有限自由分解,
- $\chi(\Gamma) := \sum_i (-1)^i \dim H^i(\Gamma; \mathbb{Q}) = \mu(\Gamma \backslash G)$.

☞ 以下专考虑 G 来自约化群的情形, 此时总存在无挠余紧的 Γ [Borel 1964], 而且仅须验证第二个条件; 显见此时 G 的 Euler-Poincaré 测度唯一, 记作 μ_{EP}.

[2] 即: $\Gamma \backslash G$ 为紧

实数域上的约化群

- 考虑局部域 F 上的约化群 G, 视同由其 F-点构成的幺模局部紧群 $G(F)$. 先假设 F 是 Archimedes 域, 不失一般性就取 $F = \mathbb{R}$.
- 取 $X := G/K$, 其中 K 是来自李代数 $\mathfrak{g}$ 某一 Cartan 对合 θ 的极大紧子群. 对应于 θ 的本征值 -1 和 $+1$, 有本征空间分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{k}$. 取定 G 的无挠余紧离散子群 Γ.
- 注意到 X 是 Riemann 对称空间, 特别地 X 可缩. 商空间 $\Gamma\backslash X$ 因而是个 Eilenberg–MacLane 空间 $K(\Gamma, 1)$, 故群上同调计算了拓扑空间的单纯上同调: $\chi(\Gamma) = \chi(\Gamma\backslash X)$.
- 根据对称空间的一般理论, X 具备典范的 G-不变 Riemann 度量, 使得点 $1 \cdot K$ 处的曲率张量写作

$$R(u, v)w = [[u, v], w], \quad u, v, w \in \mathfrak{m} = T_{1 \cdot K}(G/K).$$

1. 当 $\dim X$ 为奇数时, $\chi(\Gamma) = \chi(\Gamma \backslash X) = 0$ (Poincaré 对偶定理), 故 $\mu_{\mathrm{EP}} = 0$.
2. 假设 $\dim X$ 为偶数. 前述的 Riemann 度量定义了相应的 G-不变 Euler 形式 Eu, 次数为 $\dim X$; 可用 Pfaff 型显式表达之. 根据 Gauss–Bonnet–陈定理,

$$\chi(\Gamma \backslash X) = \int_{\Gamma \backslash X} \mathrm{Eu}.$$

又: Eu 定义了 X 上的一个 G-不变测度, 配合 K 上使体积为一的 Haar 测度, 导出 G 上的测度即为 μ_{EP}.

定理 (Serre)

$\mu_{\mathrm{EP}} \neq 0$ 的充分必要条件是 G 有离散系列表示 (或 G 有紧极大子环面); 此时 $\dim X$ 为偶数且 μ_{EP} 的符号为 $(-1)^{\dim X/2}$.

符号部分的证明是 Riemann 对称空间对偶性的简单应用.

p 进域上的约化群

现假设 F 是非 Archimedes 域, Riemann 对称空间 X 换作 G 的 Bruhat–Tits 厦, 其余同上. 注意到空间 X 依然是可缩并带有 G 的左作用. 记 G 的 F-秩为 $\mathrm{rk}_F(G)$.

定理 (Serre)

$\mu_{\mathrm{EP}} \neq 0$ 的充分必要条件是 G 的中心为紧 (或 G 有紧极大子环面); 此时 μ_{EP} 的符号为 $(-1)^{\mathrm{rk}_F(G)}$.

若说实数域情形的 μ_{EP} 是由 Riemann 几何确定的, 则眼下的 μ_{EP} 须由 Tits 系的组合性质确定. 以下固定 G 的岩堀子群 I (共轭意义下唯一), 令 W 为 (G, I) 确定的仿射 Weyl 群, 长度函数记为 ℓ. 对 W 可定义形式幂级数

$$W(t) := \sum_{w \in W} t^{\ell(w)}.$$

事实: $W(t)$ 是 t 的有理函数.

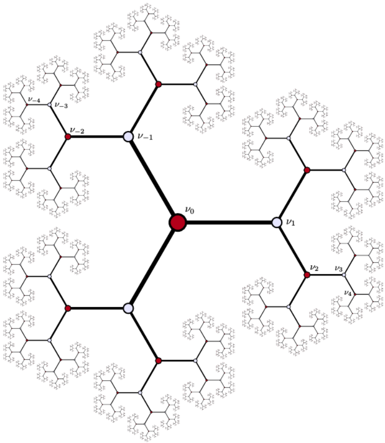
定理 (Serre)

假设 $\mu_{\mathsf{EP}} \neq 0$, 令 q 表示 F 的剩余类域的基数, 则

$$\mu_{\mathsf{EP}}(I) = W(q)^{-1}.$$

- 对于任何局部域 F, 当 F 上的约化群 G 有紧极大子环面时, μ_{EP} 还可以用某些特殊的离散系列表示确定 (例: Steinberg 表示).
- 当 $F = \mathbb{R}$ 时, 对无挠算术子群 Γ 计算 $\mu_{\mathsf{EP}}(\Gamma \backslash G)$ 兴许更有意思. 尽管 $\Gamma \backslash G$ 的测度有限, 但一般非紧, 详见 Harder, *A Gauss–Bonnet formula for discrete arithmetically defined groups* (1971).

例: $SL(2, \mathbb{Q}_2)$ 的 Bruhat–Tits 厦/树; 图片取自 Casselman 的 *Notes on the Bruhat-Tits tree*.



约化群的原相

设 k 是域, 固定可分闭包 $k^s|k$, $\Gamma := \mathsf{Gal}(k^s|k)$.

- 所谓的 Artin 原相[3]即是连续有限维 Galois 表示 $\rho : \Gamma \to \mathsf{GL}(V)$ 的等价类; 以下所论的 Galois 表示 ρ 都定义在 $\mathbb{Q}$ 上. 对于局部或整体域 k 及 Artin 原相 M, 定义 L 函数 $L(s, M)$, 并置 $L(M) := L(0, M)$ (可能是极点). 取逆步表示记为 $M \mapsto \check{M}$.
- 形式地加入 Tate 元 $\mathbb{Q}(1)$ 及其张量幂 $\mathbb{Q}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, 就得到 Artin–Tate 原相; 其中的元素可以写作 $M(k) = M \otimes \mathbb{Q}(k)$ 的线性组合, 这里 M 是 Artin 原相; $M(k)^\vee = \check{M}(-k)$. 相应地定义 $L(s, M(k)) = L(s + k, M)$.

[3]原文是法文 motif, 汉译问题聚讼纷纭, 本文且从黎景辉老师的建议.

参考文献: Gross, *On the motive of a reductive group*, Invent. Math. 130 (1997).

设 G 是 k 上的拟分裂约化群, 选定极大子环面 $T \subset G$ 并记其 Weyl 群为 W. 定义 T 的特征格 $X^*(T) := \mathrm{Hom}_{k^s}(T, \mathrm{GL}(1))$; 它带有连续的 $\Gamma \ltimes W$-作用. 再定义

- $E := X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$;
- $R := \mathrm{Sym}^\bullet(E)^W$ (分次环), $R_+ := \bigoplus_{d \geq 1} R_d$ (R 的增广理想);
- $V := R_+/R_+^2 = \bigoplus_{d \geq 0} V_d$ (分次向量空间), 每个齐次成份 V_d 都定义一个 Artin 原相.

定义 G 的 Gross 原相为 Artin–Tate 原相

$$M_G := \bigoplus_{d \geq 1} V_d(1-d), \quad \check{M}_G(1) = \bigoplus_{d \geq 1} V_d(d).$$

几点注记:

- 集合 $\{d-1 : V_d \neq 0\}$ 无非是 G 的指数, 这是根系的一套组合不变量.
- 对于一般的约化群 G, 用拟分裂内形式 G_{qd} 定义 $M_G := M_{G_{\mathsf{qs}}}$.
- 当 $G = \mathsf{GL}(n)$, 则 $M_G = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(-1) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}(1-n)$;
- 当 $E = F(\sqrt{\epsilon})|F$ 是二次扩张, $G = \mathsf{U}_{E/F}(2n+1)$ (酉群), 则

$$M_G = \mathbb{Q}[\epsilon] \oplus \mathbb{Q}(-1) \oplus \mathbb{Q}[\epsilon](-2) + \cdots + \mathbb{Q}[\epsilon](-2n),$$

  这里 $\mathbb{Q}[\epsilon]$ 对应到二次特征标 $\Gamma \twoheadrightarrow \mathsf{Gal}(E|F) \simeq \{\pm 1\}$.

Gross 测度

目标: 对局部域 F 上的任意约化群 $G = G(F)$ 定义典范的 Haar 测度.

- 先考虑 $F = \mathbb{R}$ 情形. 借由 Riemann 对称空间 G/K 的对偶, 可以化约到 G 是紧群的情形.
- 由复李代数 $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 的 Chevalley 基 $(X_\alpha, H_\alpha)_\alpha, \ldots$, 可以定义 $\mathfrak{g}$ 中的元素

$$
\begin{aligned}
u_\alpha &:= X_\alpha + X_{-\alpha}, \\
v_\alpha &:= \sqrt{-1}(X_\alpha - X_{-\alpha}),
\end{aligned}
$$

  其中 α 取遍相对于某个极大子环面 T 的根.
- 配合 $\sqrt{-1} \cdot X^*(T) \subset \mathfrak{g}$ 遂可定义格 $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}} \subset \mathfrak{g}$ [Bourbaki], [Macdonald 1980], 由此定义 G 上的典范 Haar 测度 $|\omega_G|$.

现在设 F 是非 Archimedes 域, 并假设 G 拟分裂.

- Gross 典范地选取了 G 的 Bruhat-Tits 厦里的一个顶点 x, 相应的光滑 $\mathfrak{o}_F$-群概形记作 $\underline{G_x}$.
- 在 $\underline{G_x}$ 上取最高的不变整微分形式 ω_G, 使之对 $\mathfrak{o}_F$ 的极大理想有好约化.
- ω_G 在一般纤维 Spec(F) 上诱导出一个良定的 Haar 测度 $|\omega_G|$.
- 对于一般的 G, 考虑其拟分裂内形式 G_{qd}.

此测度满足

$$\int_{\underline{G_x}(\mathfrak{o}_F)} |\omega_G| = L(\check{M}_G(1)).$$

函数方程

事实: 以下对 G 的断言等价 (一) $\mu_{\mathrm{EP}} \neq 0$, (二) $L(M_G) \neq \infty$, (三) 存在紧极大子环面 T.

先前得出的 Gross 测度写作 μ_G, 定义上同调不变量

- $\mathfrak{D}(T, G; F) := \ker(H^1(F, T) \to H^1(F, G))$,
- $e(G) := (-1)^{\mathrm{rk}_F(G) - \mathrm{rk}_F(G_{\mathrm{qd}})}$ (非 Archimedes 域), 或 $(-1)^{(\dim X_G - \dim X_{G_{\mathrm{qd}}})/2}$ (Archimedes 域), 其中 $X_G = G/K \ldots$ 这称为 Kottwitz 符号.

定理 (Kottwitz, Gross)

假设 $\mu_{\mathrm{EP}} \neq 0$, 则在 G 的不变测度构成的空间中有等式

$$L(M_G)e(G) \cdot \frac{\# H^1(F, T)}{\# \mathfrak{D}(T, G; F)} \cdot \mu_{\mathrm{EP}} = L(\check{M}_G(1))\mu_G.$$

玉河测度的显式分解

令 F 为整体域, 令 G 为 F 上的约化群. 现在可以探讨如何用局部域上的 Gross 测度分解玉河测度.

L 函数的函数方程

设 $\Lambda(M_G) = \Lambda(s=0, M_G)$ 为 Artin–Tate 原相 M_G 的完整 L 函数 (即: 添上无穷远位的因子). 则

$$\Lambda(M_G) = \varepsilon(M)\Lambda(\check{M}_G(1)).$$

这里

$$\varepsilon(M_G) := |d_F|^{\dim G/2} \prod_{d \geq 1} \mathbf{N}(\underbrace{f(V_d)}_{\text{Artin 导子}})^{d-\frac{1}{2}} \in \mathbb{Q}_{>0}$$

选定 $\omega \in \bigwedge^{\text{top}} \mathfrak{g}^*(F)$, $\omega \neq 0$ 以定义玉河测度.

定理 (G. Prasad, Gross)

$$\prod_v \frac{\mu_{G_v}}{|\omega|_v} = \varepsilon(M_G)$$

事实: 以下等价 (一) G 的连通中心非迷向, (二) $G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$ 测度有限 (三) $L(\check{M}_G(1)) \neq \infty$; 此时局部 Gross 测度的乘积 $\prod_v \mu_{G_v}$ 收敛.

推论

假定上述三条件成立, 则

$$\frac{\prod_v \mu_{G_v}}{\mu_{\text{Tama}}} = \varepsilon(M_G)|d_F|^{\dim G/2}.$$

1. 玉河测度分解的技术核心主要源自 G. Prasad, *Volumes of S-arithmetic quotients of semi-simple groups* (1989). Gross 处理了环面情形和一些化约.
2. 颜维德和 Gross 借此得出了某类约化群的质量公式 (1999), 之后屡有推广.
3. 对迹公式的比较也管用 [李文威, 2013].

应用: 离散 L 参数的算术不变量

参考文献: Gross, Reeder, *Arithmetic invariants of discrete Langlands parameters* (2010).

局部 Langlands 对应: F 是局部域, L 参数 $\phi : W_F \to {}^L G$ 对应到表示的 L-包; 离散 L 参数对应的包由离散系列表示构成.

猜想 (平贺郁, 市野笃史, 池田保, 2008)

假定 Langlands 对应, 对于 Haar 测度 μ_{EP}, 离散系列表示的形式次数能用相应的离散 L 参数 ϕ 表示. 具体描述牵涉到伴随 γ 因子, 群 $\mathcal{S}_\phi$ 的表示等等...

☞ 已知大部分典型群和 SL(n) 的内形式情形, 以及某些尖表示和幂么离散系表示 (Opdam, 2013) 的情形.

应用: 极限公式

同样考虑局部域 F 上的约化群 G, 为简单起见假设 G 有离散系列表示. 令 $f \in C_c^\infty(G)$.

- $F = \mathbb{R}$: Harish-Chandra 的极限公式联系了 $f(1)$ 和正则半单轨道积分 $O_t^G(f) = \int_{Z_G(t)\backslash G} f(x^{-1}tx)dt$, 其中 $t \in T$: 紧极大子环面. 一旦使用 Euler–Poincaré 测度, 公式中所有常数都能以显式表达. 这对 Harish-Chandra 的 Plancherel 定理证明至关紧要.
- F 非 Archimedes: 同样有极限公式联系 Euler–Poincaré 测度下的 $f(1)$ 和 $O_t^G(f)$ (Rogawski, 1980), 其中
  - 实数情形下 $O_t^G(f)$ 对 t 的微分被 Shalika 芽展式取代;
  - 证明用到 Bruhat–Tits 厦和轨道积分的关连.

极限公式也用在迹公式椭圆部分的稳定化, 其算术意义不言而喻: 参看 [Kottwitz 1986] 和 [Labesse 2004].

报告结束
感谢诸位