中国数学会学术年会

2016.9.25 • 呼和浩特

# 论某类准齐性向量空间上的ζ积分

李文威

中国科学院大学

图片：呼和浩特五塔寺一隅，取自正北方网.

## 感谢主办单位的邀请

内蒙古大學

INNER MONGOLIA UNIVERSITY

中國數學會

Chinese Mathematical Society

# 热身: Tate 积分 (1950)

考虑局部域 $F$ (如 $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{F}_p((t))$ 或其有限扩张), 连同绝对值 $|\cdot| = |\cdot|_F$.

- $F^\times \hookrightarrow F$, 而 $F^\times$ 在上 $F$ 以乘法作用.
- $\mathcal{S}(F)$: Schwartz 函数空间,
- $\chi : F^\times \to \mathbb{C}^\times$: 连续同态.

目标: 延拓 $\chi$ 为 $F$ 上的缓增广义函数, 即 $\mathcal{S}(F)^\vee$ 的元素.
初步思路: 固定 Haar 测度以定义广义函数

$$\mathcal{S}(F) \ni \xi \mapsto \int_F \chi\xi =: Z(\chi, \xi).$$

困难: 对一般的 $\chi$ 发散, 但考虑 $\chi|\cdot|^s$ 满足 $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ 者则无问题.

### 定理

可将 $Z(\chi|\cdot|^s,\cdot)$ 延拓为一族 $s\in\mathbb{C}$ 的亚纯函数, 取值在 $\mathcal{S}(F)^\vee$; 非 Archimedes 情形下, 它还是 $q^s$ 的有理函数, $q$ 是剩余域的元素个数.

由此得到一族 $F$ 上相对于 $F^\times$ 作用的 $\chi|\cdot|^s$-等变广义函数.
适当选取 Haar 测度, 加性特征 $\psi: F\to\mathbb{C}^\times$, 并将 $s$ 用 $\frac{1}{2}$ 平移后, Fourier 变换 $\mathcal{F}$ 给出函数方程.

### 定理

存在函数 $\gamma(s,\chi)$ (对 $s$ 亚纯或有理) 满足

$$Z(\check{\chi}|\cdot|^{-s},\mathcal{F}\xi)=\gamma(s,\chi)Z(\chi|\cdot|^s,\xi).$$

称之为 $\zeta$ 积分的*局部函数方程*.

- 推广: 考虑 $\mathrm{GL}(n,F) \hookrightarrow \mathrm{Mat}_{n\times n}(F)$, 以 $\mathrm{GL}(n)$ 的不可约表示的矩阵系数代替 $\chi$.
- 依然有 $\zeta$ 积分的亚纯延拓, 函数方程 (玉河恒夫, Godement, Jacquet: $<$ 1972).
- 存在整体版本的构造 ($F = \mathbb{Q}, \mathbb{F}_q(C)$ 和 $\mathbb{A}_F$, 其中 $C$ 是曲线), 蕴涵丰富的算术信息. 特例: $\chi = \mathrm{triv} \rightsquigarrow$ Riemann $\zeta$ 函数.

构造合适的积分表达式是研究自守 $L$-函数的主要方法之一, 系统性的理论仍有待建立.

# 准齐性向量空间

为了解 Riemann $\zeta$ 函数在, 佐藤幹夫在 1961 年提出了:

**定义**

固定一个域 $F$. 代数群 $G$ 作用下的准齐性向量空间是

- 有限维 $F$-向量空间 $X$,
- $G$ 在 $X$ 上的线性作用, 使得 $X$ 有 Zariski 开轨道 $X^+$.

很多情形下, $X \setminus X^+ = \{f = 0\}$, 正则函数 $f$ 称为 相对不变量.

例子:

- $G = \mathrm{GL}(n) \times \mathrm{GL}(n)$, $X = \mathrm{Mat}_{n\times n}$, 相对不变量 $=\det$
- $G = \mathrm{GL}(n)$, $X = \{n$ 元对称二次型$\}$, 相对不变量 $=\det$.

# 准齐性 $\zeta$ 积分

设 $F$ 为局部域, 如 $\mathbb{R}, \mathbb{Q}_p$ 等. 设 $f$ 为 $X$ 的相对不变量, 固定 Haar 测度, 加性特征 $\psi : F \to \mathbb{C}^\times$. 定义 $\zeta$ 积分

$$Z(s, \xi) := \int_{X(F)} \xi |f|^s, \quad \xi \in \mathcal{S}(X(F)).$$

## 定理

如准齐性向量空间 $X$ 满足 "正则" 性, 边界等于 $\{f = 0\}$, 则

1. $\mathrm{Re}(s) > 0 \implies Z(s, \xi)$ 收敛;
2. 能作亚纯/有理延拓至所有 $s$;
3. 逆步表示 $X^\vee$ 也是准齐性的;
4. 较复杂的函数方程: 联系 $X$ 和 $X^\vee$; $\gamma$ 因子 $\rightsquigarrow$ $\gamma$-矩阵.....

对于准齐性 $\zeta$ 积分:

- 函数方程依然源于向量空间 $X$ 上的 Fourier 变换.
- 存在整体版本的构造, 常有算术应用, 如 Epstein $\zeta$ 函数

$$\sum_{\substack{\vec{v}\in\mathbb{Z}^n \\ \vec{v}\neq 0}} \frac{1}{Q(\vec{v})^s}, \quad Q: \text{正定整二次型}, \ \mathrm{Re}(s) \gg 0.$$

- 从表示论的观点, 这些 $\zeta$ 函数却常常是比较 “退化” 的.

参考: T. Kimura, *Introduction to prehomogeneous vector spaces*, MMONO 215, AMS.

# 自然的想法

在准齐性 $\zeta$ 积分中添入类似于矩阵系数的函数.

- $G$: 特征零局部域 $F$ 上分裂的约化群.
- $X$: 准齐性向量空间, 假设它的开轨道 $X^+$ 是代数对称空间, 简单起见设 $X \setminus X^+ = \{f = 0\}$.
- $\mathcal{S}(X)$: Schwartz 空间, 取值在 $\frac{1}{2}$-密度线丛 $\mathcal{L}^{1/2}$ 里.
- $\pi$: 合适意义下 $G$ 的光滑表示.

已知

$$\mathcal{N}_\pi := \mathrm{Hom}_{G,\text{连续}}\left(\pi, C^\infty(X^+, \mathcal{L}^{1/2})\right)$$

为有限维. 可考虑不依赖于测度的 $\zeta$ 积分

$$Z(s, \eta \otimes v, \xi) = \int_{X^+} \eta(v)|f|^s \xi, \quad \eta \otimes v \in \mathcal{N}_\pi \otimes V_\pi.$$

期望: 对 $\Re(s) \gg 0$ 和所有 $\xi \in \mathcal{S}(X) \subset L^2(X^+)$ 收敛, 并且有亚纯延拓, 连续性等.

进一步期望: 有函数方程, 由 $X$ 上的 Fourier 变换诱导 (适当拓展到 $\frac{1}{2}$-密度的情形).

- 受到 Sakellaridis (2012) 关于 $L$-函数积分表达式的工作启发.
- 期望: 整体情形下的 $\zeta$ 积分与自守 $L$-函数相关.
- 对于一般的对称空间 $X^+$ 及其仿射 $G$-等变嵌入 $X^+ \hookrightarrow X$: 对 Schwartz 空间与 Fourier 变换所知仍有限 (例: 约化幺半群 — Braverman, Kazhdan, Ngô 等人的工作).
- 承上, 难点的源头在于 $X$ 通常有奇点. 光滑的 $X$ 可以表为准齐性向量空间或其纤维化 (Luna), 从这类空间入手因而是合理的.
- $p$-进域情形已有部分结果, 参考 `arXiv:1508.05594`.

# 例子

- 包含 Godement–Jacquet 的 $\zeta$ 积分作为特例 $X = \mathrm{Mat}_{n\times n}$, $G = \mathrm{GL}(n) \times \mathrm{GL}(n)$; $\dim \mathcal{N}_\pi \leq 1$ 由矩阵系数实现.
- 这种准齐性向量空间已有分类: Kacs (1980), Leahy (1998), Benson-Ratcliff (1996).
- 特例: $E_6$ 有一个自然的 27 维表示 $X$. 计入伸缩则得到 $G := \mathbb{G}_m \times E_6$ 在 $X$ 上的作用. 它成为准齐性向量空间, 开轨道 $X^+$ 不是对称空间, 但能被对称空间 $\mathbb{G}_m \times (F_4 \backslash E_6)$ 有限地覆盖.
- 问题: 相应的 $\zeta$ 积分有何诠释?

注记 (J. Adams): $F_4 \backslash E_6$ 是 Lusztig (`arXiv:0908.4414`) 定义的*殆对角齐性空间*的一个特出例子.

# $F=\mathbb{R}$: 亚纯延拓

一种工具: $X_{\mathbb{C}} := X \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 上的代数 $D$-模理论.

- 当 $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ 时 $\zeta$ 积分的收敛性应当是容易的 (运用 Cartan 分解和 Krötz–Sayag-Schlichtkrull 等人的结果).
- 受复幂积分 $\xi \mapsto \int_X \xi |f|^s$ 的亚纯延拓启发: 其经典手法是证明 $|f|^s$ 生成一个*完整* $D$-模 (holonomic $D$-module), 这是某种关于 $D$-模的有限性条件, 基于 J. Bernstein, 柏原正树等人的工作.
- 固定极大紧子群 $K \subset G = G(\mathbb{R})$, 要点是对于任意 $K$-有限光滑向量 $v \in V_\pi^\infty$ 及 $\eta \in \mathcal{N}_\pi$:
  1. 证明 $\eta(v) \in C^\infty(X^+, \mathcal{L}^{1/2})$ 生成一个完整 $D$-模.
  2. 由之推导 $\zeta$ 积分的亚纯延拓.

大致思路如次.

1. 应用 V. Ginzburg (1989) 的工作来得到完整 $D$-模.
    - 设 $X^+ \simeq H\backslash G$, $\mathfrak{h} :=$ Lie$(H)$ 是对合 $\theta$ 的不动子空间;
    - 取 $\theta$-不变的不变双线性型以等同 $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$;
    - 化约为辛几何问题: 对 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的每个幂零轨道 $\mathcal{O}$, 说明 $\mathcal{O} \cap \mathfrak{h}^\perp$ 是 Lagrange 子流形 (Ginzburg 已证).
2. 应用 Brylinksi–Delorme (1992) 附录 A 来推导亚纯延拓, 基于柏原正树的理论.
3. 问题: 能否推广到 $X^+$ 不是对称空间的情形?