Stable Trace Formula for $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n)$: the Elliptic Terms

Wen-Wei Li
(wwli@math.ac.cn)

Academy of Mathematics and Systems Science,
Chinese Academy of Sciences

The Sixth International Congress of Chinese Mathematicians
July 2013, Taipei

Résumé

The Arthur-Selberg trace formula is nowadays a standard tool for the study of automorphic representations on reductive linear groups. On the other hand, Weil's metaplectic group $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n)$, which is non-linear/non-algebraic, arises naturally in various problems in arithmetic and representation theory. Based on the previous works on invariant trace formula for nonlinear reductive groups and geometric transfer, I will explain the stabilization of the elliptic part of the trace formula for $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n)$, and the main techniques thereof.

Main references:

1. Wee Teck Gan's plenary lecture on July 15.
2. The preprint `arXiv:1307.1032`.

Scan the QR code below to get the preprint
(http://arxiv.org/abs/1307.1032)

亞辛群的穩定跡公式：橢圓部份

李文威
(wwli@math.ac.cn)

中国科学院数学与系统科学研究院

第六屆世界華人數學家大會
2013 年夏, 台北市

Arthur-Selberg 跡公式回顧

- F: 數域. $\mathbf{A} = \mathbf{A}_F$ 為其 adèle 環;
- G: F 上的連通約化代數群, 例如 GL(n), Sp$(2n) \subset$ GL$(2n)$......

目標

研究 $G(\mathbf{A})$ 的 L^2 自守表示.

令 H_G 為 Harish-Chandra 同態, 並置

$$G(\mathbf{A})^1 := \ker[H_G : G(\mathbf{A}) \to \mathfrak{a}_G] \lhd G(\mathbf{A})$$

(注意到當 G 半單時, $G(\mathbf{A}) = G(\mathbf{A})^1$). $G(\mathbf{A})^1$ 以右平移作用於 $L^2(G(F)\backslash G(\mathbf{A})^1)$, 記此表示為 R. 對 $f \in C_c^\infty(G(F)\backslash G(\mathbf{A})^1)$, 可由此定義算子 $R(f)$ ($\approx$ 右卷積作用).

$\to$ 核函數 $k(x,y) = k_f(x,y) = \sum_{\delta \in G(F)} f(x^{-1}\gamma y)$, 其中 $x, y \in G(F)\backslash G(\mathbf{A})^1$ (參看 Goldfeld 的大會報告).

Selberg 的思路

以下式研究 $(L^2(G(F)\backslash G(\mathbf{A})^1), R)$ 的譜分解, 想必是極好的

$$\mathrm{tr}(R(f)) \doteq \int_{G(F)\backslash G(\mathbf{A})^1} k(x,x)dx.$$

然而, 當 $G(F)\backslash G(\mathbf{A})^1$ 非緊時:

- 存在連續譜
- $R(f)$ 不是跡類算子
- 右式積分發散.

Arthur 跡公式

固定 G 的極小抛物子群 P_0 及相匹配的極大緊子群 $K \subset G(\mathbf{A})^1$, 則可以適當地定義 $C_c^\infty(G(F)\backslash G(\mathbf{A})^1)$ 上的線性泛函

$$J : f \mapsto \int_{G(F)\backslash G(\mathbf{A})^1}^{\text{截斷}} k(x,x)dx := \cdots$$

跡公式的兩種展開

幾何展開 以 $\Gamma_{\mathrm{ell}}(G)$ 表 G 中的半單橢圓共軛類構成的集合, 對於 $\delta \in \Gamma_{\mathrm{ell}}(G)$, 設 $G_\delta := Z_G(\delta)^\circ$（"橢圓" 等價於 $G_\delta(\mathbf{A}) \cap G(\mathbf{A})^1 = G_\delta(\mathbf{A})^1$）, 則

$$J(f) = \sum_{\delta \in \Gamma_{\mathrm{ell}}(G)} \tau(G_\delta) \int_{G_\delta(\mathbf{A}) \backslash G(\mathbf{A})} f(x^{-1}\delta x)\,dx$$

$$+ \text{加權軌道積分 (巨複雜!)}$$

此處 $\tau(\cdots)$ 表玉河數, 積分由玉河測度給出.

譜展開 以 $L^2_{\mathrm{disc}}(\cdots) = \bigoplus_\pi m(\pi)\pi$ 表 $L^2(\cdots)$ 的離散部份, 則

$$J(f) = \sum_\pi m(\pi)\mathrm{tr}(\pi(f)) + \text{某些誘導表示的特徵標}$$

$$+ \text{加權特徵標 (賊複雜!)}$$

※ 已知離散譜的重數 $m(\pi)$ 均有限.

技術問題

1. 必須建立 G 的**不變跡公式** $J(f) \rightsquigarrow I(f)$ (Arthur 1989) $\to$ *調和分析*
2. 必須將跡公式穩定化 (Langlands 1982; Kottwitz 1986; Arthur 2003; Ngô, Chaudouard-Laumon) $\to$ *算術*

粗略想法

將幾何展開中的軌道積分 $\int_{G_\delta(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})} f(\cdots)$ 表為穩定軌道積分 $\int_{(H_\gamma\backslash H)(\mathbf{A})} f^H(\cdots)$; 其中 H 取遍 G 的內窺[a]群, $f^H \in C_c^\infty(H(\mathbf{A}))$ 是 f 的轉移 [b].

$\to$ *內窺理論* (Labesse, Langlands, Kottwitz-Shelstad, 1980-90 年代)

[a]英文: endoscopy, 尚無通行漢譯, 在此拋磚引玉.
[b]英文: transfer, 同上註.

- 穩定共軛 = 在 $\bar{F}$ 上共軛; 穩定軌道積分 = 沿穩定共軛類積分.
- 相應地, 譜展開中的表示應當可按 A-包來分類 (Langlands-Arthur 猜想).

基本要素

先從幾何展開中的橢圓正則項著手 (Langlands 1982).

- 定義 G 的內窺資料 $(H, \ldots)$(使用 Langlands 對偶群 ${}^L G$) $\rightarrow$ 半單共軛類的對應, 記作 $\leftrightarrow$;
- 對給定的 $(H, \ldots)$, 定義轉移因子 $\Delta(\gamma, \delta)$ (此處 $\gamma \leftrightarrow \delta$);
- 對 F 的每個位 v, 證明局部轉移 $f_v \mapsto f_v^H$ 的存在性和 "基本引理"(v 非分歧的情形).

施於跡公式 (Labesse): 兩步走

預穩定化 將軌道積分表為 κ-軌道積分: 整體問題, 運用 Galois 上同調與 Poisson 求和公式.

轉移 將 κ-軌道積分表為相應的內窺群上的穩定軌道積分: 局部問題, 須用到轉移因子的性質, 須假定轉移與基本引理.

▸ 亞辛群的情形

- 不變跡公式的完整穩定化: $I(f) = \sum_H \iota(G,H) S^H(f^H)$, Arthur (2002); 須另外假設加權基本引理, 部份係數待定.
- 橢圓部份的穩定化: Kottwitz (1986), 扭曲情形由 Labesse (2003) 給出.
- 扭曲跡公式的完整穩定化: Mœglin-Waldspurger, 積極穩妥有序推進中.
- 應用: 關於玉河數的 Weil 猜想 (Kottwitz)、基變換 (Arthur-Clozel)、典型群的表示分類 (Arthur, 莫仲鵬)......

設 F 為局部域, $\mathrm{char}(F)=0$. $\psi: F \to U(1)$ 為非平凡特徵標.

- 亞辛覆疊群是局部緊群的中心擴張

$$1 \to \{1,\epsilon\} \to \widetilde{\mathrm{Sp}}(2n) \xrightarrow{\mathbf{p}} \mathrm{Sp}(2n) \to 1.$$

  若 $F \neq \mathbf{C}$, 則 $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n)$ **不是代數群** [1].
- $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n)$ 的 Weil 表示: $\omega_\psi = \omega_\psi^+ \oplus \omega_\psi^-$, 其中 $\omega_\psi^\pm$ 是相異的不可約酉表示.
- 研究 $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n)$ 的不可約 "真表示"π, 即滿足 $\pi(\epsilon) = -\mathrm{id}$ 者. 例如 $\omega_\psi^\pm$.
- 相應的 "真" 測試函數 $f \in C_c^\infty(\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n))$ 滿足 $f(\epsilon\cdot) = -f(\cdot)$.

亞辛群經常被視作典型群的一員 看例子.

[1] 參看顏維德的大會報告

整體情形

設 F 為數域, $\mathbf{A}=\mathbf{A}_F$, $\psi:\mathbf{A}/F\to U(1)$ 照舊.

- 構造 adèle 版本之二重覆疊群 $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n,\mathbf{A})$ 及其 Weil 表示 ω_ψ.
- 同樣套路定義真表示及相應的測試函數.
- 可證明

$$\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n,\mathbf{A})=\left(\prod_v{}'\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n,F_v)\right)/\mathbf{N},$$

$$\mathbf{N}:=\left\{(\epsilon_v)_v\in\bigoplus_v\{\pm1\}:\prod_v\epsilon_v=1\right\}.$$

- 存在唯一的截面 $\mathrm{Sp}(2n,F)\hookrightarrow\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n,\mathbf{A})$, 故自守形式/自守表示有意義.

$\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n)$ 何為? ϑ 提升, 半整權模形式, ϑ 函數等等......

目標

一句話: 將非代數群 $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n)$ 納入 Langlands 綱領. 基本框架回顧

$\boxed{\text{要旨}}$: $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n)$ 的 Langlands 對偶群應為 $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$, 亦即 $\underbrace{\mathrm{SO}(2n+1)}_{\text{分裂}}$ 的對偶群. 根據: 岩堀 -Hecke 代數的計算 (Savin-顏維德), 或 $(\mathrm{O}(2n+1),\mathrm{Sp}(2n))$ 的 ϑ 對應 (Adams-Babarsch, Savin-顏維德).

路線圖

- $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n)$ 的內窺理論.
- $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n,\mathbf{A})$ 的不變跡公式.
- 幾何展開橢圓部份的穩定化.
- 聯繫 $(\mathrm{O}(V),\mathrm{Sp}(2n))$ 的 ϑ 對應, 其中 $\dim V = 2n+1$.
- 完整穩定化 (長程目標)

内窺資料

固定 n, 令 $\tilde{G} := \widetilde{\mathsf{Sp}}(2n)$, $G := \mathsf{Sp}(2n)$.

定義

$\tilde{G}$ 的橢圓內窺資料即是滿足 $n' + n'' = n$ 的非負整數對 (n', n''). 對應到 (n', n'') 的內窺群是

$$H := \mathsf{SO}(2n'+1) \times \mathsf{SO}(2n''+1), \quad \text{(取其分裂形式)}.$$

Adams 與 Renard 的工作 (1998, 1999) 蘊含:

- G 與 H 的半單共軛類的對應 –基本是按特徵值對應. 但在 $\mathsf{SO}(2n''+1)$ 部份差 -1 倍;
- 正則半單元的穩定共軛概念;
- 正則半單元的轉移因子 Δ.

此前的結果

- 局部情形的**內窺特徵標等式**: F 為阿基米德域時 – Adams (1998), Renarnd (1999); F 非阿基米德域, $n=1$ 時 – Schultz (1998).
- 真軌道積分從 $\tilde{G}$ 至 H 的**轉移**: 局部域 $F=\mathbf{R}$ 時 – Renard (1999); 一般情形 – 李某 (2011). 記為 $f \mapsto f^H$, 性質如下

$$\sum_{\substack{\delta:\text{正則半單類} \\ \delta \leftrightarrow \gamma}} \Delta(\gamma, \tilde{\delta}) \int_{G_\delta(F)\backslash G(F)} f(x^{-1}\tilde{\delta}x)dx$$

$$= \int_{(H_\gamma \backslash H)(F)} f^H(y^{-1}\gamma y)dy,$$

此處 γ 對應到 $G(F)$ 中的正則半單類, $\tilde{\delta} \in \mathbf{p}^{-1}(\delta)$; 利用代數環面的同構 $H_\gamma \cong G_\delta$ 選取相配的 Haar 測度. 注意到 f^H 作為 $H(F)$ 上的函數並不唯一.

- **基本引理**: 李某 (2011). 這斷言在非分歧情形下, 若 f 是 $\tilde{G}$ 的真 Hecke 代數的單位元, 則 f^H 可取作 H 的 Hecke 代數單位元 (選定極大緊子群).
- **加權基本引理**: 李某 (2012). 完整穩定跡公式所需.
- 一大類覆疊群的**不變跡公式**: 李某 (2012-), 包括亞辛群.

下一步

穩定化跡公式幾何展開的橢圓部份. 見李某, *La formule des traces stable pour le groupe métaplectique: les termes elliptiques*, `arXiv:1307.1032`.

共軛類的描述

重要性質

對於亞辛覆疊群 $\mathbf{p}: \tilde{G} \to G(F)$ 或 $G(\mathbf{A})$, 恆有 $Z_{\tilde{G}}(\tilde{\delta}) = \mathbf{p}^{-1}(Z_G(\delta))$.

設 F 為局部域或整體域, $\delta \in G(F)$ 半單. 非交換 Galois 上同調給出下述短正合列

$$\begin{array}{ccccc} G_\delta(F)\backslash G(F) & \rightarrowtail & (G_\delta\backslash G)(F) & \twoheadrightarrow & \ker[H^1(F, G_\delta) \to H^1(F, G)] \\ \updownarrow {\scriptstyle 1:1} & & \updownarrow {\scriptstyle 1:1} & & \updownarrow {\scriptstyle 1:1} \\ \delta\text{的共軛類} & & \delta\text{的穩定共軛類} & & \{\text{穩定共軛類中的共軛類}\} \end{array}$$

- 最右項記為 $\mathfrak{D}(G_\delta, G; F)$, 中項 $H^0(F, G_\delta \to G)$;
- 當 F 為整體域時亦有 adèle 版本 $\mathfrak{D}(G_\delta, G; \mathbf{A})$ 和 $H^0(\mathbf{A}, G_\delta \to G)$.

Abel 化上同調 – Labesse 的進路

對任意連通約化群 I, Borovoi 定義了 Abel 化 Galois 上同調群

$$H^i_{\mathsf{ab}}(F, I) := H^i(F, I_{\mathsf{ab}}), \quad i \in \mathbf{Z},$$

在此 I_{ab} 是映射錐 $[T_{\mathsf{sc}} \to T]$ (次數 $-1, 0$), T 是 I 的任意極大子環面, 而 T_{sc} 是它對單連通覆疊 $G_{\mathsf{SC}} \twoheadrightarrow G_{\mathsf{der}} \subset G$ 的逆像.
※Abel 化函子: $H^i(F, -) \to H^i_{\mathsf{ab}}(F, -)$, $i \leq 1$.
言歸正傳:

- 定義 $H^0_{\mathsf{ab}}(F, G_\delta \to G) := H^0(F, [G_{\delta,\mathsf{ab}} \to G_{\mathsf{ab}}])$, $\mathfrak{E}(G_\delta, G; F) := \ker[H^1_{\mathsf{ab}}(F, G_\delta) \to H^1_{\mathsf{ab}}(F, G)]$. 同理可對整體域定義 $\mathfrak{E}(G_\delta, G; \mathbf{A})$ 和 $H^0_{\mathsf{ab}}(\mathbf{A}/F, G_\delta \to G)$.
- 定義

$$\mathfrak{E}(G_\delta, G; \mathbf{A}/F) := \operatorname{coker}\left(H^0_{\mathsf{ab}}(\mathbf{A}, G_\delta) \to H^0_{\mathsf{ab}}(\mathbf{A}/F, G_\delta \to G)\right).$$

- 承上, $\mathfrak{K}(G_\delta, G; F)_1$ 定義為 $\mathfrak{E}(G_\delta, G; \mathbf{A}/F)$ 的 Pontryagin 對偶群.

預穩定化之一

1. 固定數域 F 及橢圓半單元 $\delta \in G(F)$. 透過 Abel 化函子及各種倒騰 (你懂的), 任一元素 $\kappa \in \mathfrak{R}(G_\delta, G; F)_1$ 皆可視作 $\mathfrak{D}(G_\delta, G; \mathbf{A})$ 上的連續函數, κ 還可以進一步拉回到 $H^0(\mathbf{A}, G_\delta \to G) = (G_\delta \backslash G)(\mathbf{A})$ 上.
2. 對於真測試函數 $f \in C_c^\infty(\tilde{G})$, 將 $\tilde{G}$ 跡公式的橢圓部份按 $\Gamma_{\mathsf{ell}}(G)$ 中的穩定共軛類切分. 包含 δ 的部份可以重寫為
$$\sum_{y \in \mathfrak{D}(G_\delta, G; F)} \tau(G_{y^{-1}\delta y}) \int_{G_{y^{-1}\delta y}(\mathbf{A}) \backslash G(\mathbf{A})} \Phi_f(yg)dg$$
其中 Φ_f 是 $G_\delta \backslash G(\mathbf{A})$ 上合適的光滑緊支集函數.
3. 目標: 表之為 κ-軌道積分 ($\kappa \in \mathfrak{R}(G_\delta, G; F)$).

預穩定化之二

1. 須證明上式等於

$$\sum_{\kappa \in \mathfrak{R}(G_\delta, G; F)_1} \int_{(G_\delta \backslash G)(\mathbf{A})} \kappa(x) \Phi_f(x) dx.$$

2. 右式的積分即所欲的 κ-軌道積分

$$J^\kappa(\delta, f) := \int_{(G_\delta \backslash G)(\mathbf{A})} e(G_{x^{-1}\delta x}) \kappa(x) f(x^{-1} \delta x) dx$$

其中 $G_{x^{-1}\delta x}$ 是 $\mathbf{A}$ 上的群概形, $e(\cdots) \in \{\pm 1\}$ 是 Kottwitz 符號.

3. 對比: Poisson 求和公式. 問題: $\mathfrak{D}(\cdots; \mathbf{A})$ 和 $\mathfrak{D}(\cdots; F)$ 一般木有群結構...
4. 證明: 使用 Abel 化上同調 $\mathfrak{E}(\cdots)$+Kottwitz 的玉河數公式 +Fourier 反演 + 反覆搗鼓.

所求

構造雙射 $(\delta,\kappa) \leftrightarrow (n',n'',\gamma)$, 其中 (n',n'') 是 $\tilde{G}$ 的橢圓内窺資料, $H = H_{n',n''}$ 是相應的内窺群, $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{ell}}(H)$ 取遍合適的橢圓半單類 (稱作 (G,H)-正則類), 使得對任意 $f = \prod_v f_v$

$$J^\kappa(\delta,f) = S^H(\delta,f^H) := \int_{(H_\gamma\backslash H)(\mathbf{A})} f^H(y^{-1}\gamma y)dy.$$

這裡 $f^H = \prod_v f_v^H \in C_c^\infty(H(\mathbf{A}))$ 是 f 的轉移, 基本引理確保 f^H 良定.
上式可分解為局部問題

$$\int_{G_\delta\backslash G(F_v)} e(G_{x^{-1}\delta x})\kappa_v(x_v)f_v(x^{-1}\tilde{\delta}_v x)dx$$

$$\stackrel{?}{=} c_v(\delta_v)\int_{H_\gamma\backslash H(F_v)} f_v^H(y^{-1}\gamma y)dy.$$

- $c_v(\cdots)$ 是合適的局部正因子, 關乎測度選取並滿足 $\prod_v c_v(\delta) = 1$, 容後再敘.
- $\delta \in \mathsf{Sp}(2n, F) \hookrightarrow \widetilde{\mathsf{Sp}}(2n, \mathbf{A})$ 分解為局部分量 $(\tilde{\delta}_v)_v$; 分解不唯一, 但無妨.
- 注意到

$$\kappa \in \mathfrak{R}(G_\delta, G; F) \hookrightarrow (H^0_{\mathsf{ab}}(\mathbf{A}/F, G_\delta \to G))^{\text{Pontryagin 對偶}};$$

而 κ_v 是 κ 在賦值 v 的分量.

- 利用雙射 $(\delta, \kappa) \leftrightarrow (n', n'', \gamma)$ 與轉移因子 Δ 的性質 (如乘積公式), 上式可進一步化為

$$\int_{G_\delta \backslash G(F_v)} e(G_{x^{-1}\delta x}) \Delta(\gamma, x^{-1}\tilde{\delta}_v x) f_v(x^{-1}\tilde{\delta}_v x) dx$$

$$\stackrel{?}{=} c_v(\delta_v) \int_{H_\gamma \backslash H(F_v)} f_v^H(y^{-1}\gamma y) dy.$$

軌道積分ㄉ轉移

1. δ 正則蘊含 γ 正則. 此時 $c_v(\delta_v) = 1$, 而上式無非是 f^H 的刻劃 ▸ 去看看, 正則情形的 Δ 已有定義, 關鍵處用到 Weil 表示 $\omega_\psi^\pm$ 的特徵標.
2. 一般情形: 用極限定義 (G, H)-正則類的轉移因子 (Langlands-Shelstad, 1990)

$$\Delta(\gamma, \tilde{\delta}) = \lim_{\gamma', \tilde{\delta}'} \Delta(\gamma', \tilde{\delta}').$$

3. 須證明 (1) 轉移因子的性質, (2) 等式 $\stackrel{?}{=}$ ▸ 去看看.

溫馨提示

整體軌道積分以玉河測度定義; 須將玉河測度典範地分解為局部 Haar 測度乘上一整體常數 (後者由群的 "主題" 決定, 見下頁), 並確定常數 $c_v(\delta_v)$. 參看 G. Prasad 的計算 (1989).

- 局部 Haar 測度的選取: Gross 測度 (Gross, 1997).
- Δ 的性質: 應用正則情形及 Maktouf 的特徵標公式.
- 證明等式 $\stackrel{?}{=}$: 準 Langlands-Shelstad, 化約到已知的正則情形.
- **老工具**: Harish-Chandra 下降法 $G \rightsquigarrow G_\delta$, $H \rightsquigarrow H_\gamma$.
  - $F_v = \mathbf{R}, \mathbf{C}$: Harish-Chandra 極限公式,
  - $F_v \supset \mathbf{Q}_p$: Shalika 芽展開 +Rogawski 公式 (p: 素數).
- **新現象**: "硬核" 是 $\delta = 1$ 的情形. 須比較 $\mathbf{B}_n$ 與 $\mathbf{C}_n$ 型根系的極限公式. 訣竅: 兩類群具有相同的 Artin-Tate 主題[2]

$$\mathbf{Q}(-1) \oplus \mathbf{Q}(-3) \oplus \cdots \oplus \mathbf{Q}(1-2n).$$

- 可取 $c_v(\delta_v) = |2|_v^t$, 其中 $2t$ 是 ± 1 在 δ_v 的特徵值中的重數之和.
- 計算: 埋汰活兒.

※ 詳見 [李某, 2013].

[2]即英文之 *motive*. 本詞漢譯莫衷一是, 姑從《英汉数学词汇》第二版 (清华大学出版社, 2010 年) 之說.

定理陳述

考慮數域 F 上的亞辛覆疊群 $\tilde{G} = \widetilde{\mathsf{Sp}}(2n, \mathbf{A}) \twoheadrightarrow G(\mathbf{A}) = \mathsf{Sp}(2n, \mathbf{A})$. 對取定的橢圓内竊資料 (n, n''), 置 $H = H_{n',n''} := \mathsf{SO}(2n'+1) \times \mathsf{SO}(2n''+1)$.

定義

$$T_{\mathsf{ell}}(f) = \sum_{\delta \in \Gamma_{\mathsf{ell}}(G)} \tau(G_\delta) \int_{G_\delta(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})} f(x^{-1}\delta x)dx$$

$(\tilde{G}$的跡公式的橢圓部份$)$,

$$ST^H_{\mathsf{ell,equi}}(f^H) := \tau(H) \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_{\mathsf{ell}}(H) \\ (G,H)-\text{正則}}} \int_{(H_\gamma \backslash H)(\mathbf{A})} f^H(y^{-1}\gamma y)dy.$$

這裡 $f \in C_c^\infty(\tilde{G})$ 是真測試函數, $f^H \in C_c^\infty(H(\mathbf{A}))$. 積分一律用玉河測度定義.

定理 (李某, 2013)

$$T_{\mathrm{ell}}(f) = \sum_{n',n''} \iota(\tilde{G}, H) ST^{H}_{\mathrm{ell,equi}}(f^H),$$

- $H = H_{n',n''}$;
- f 是 $\tilde{G}$ 上的真測試函數, f^H 是其轉移;
- $\iota(\tilde{G}, H) = \tau(H)^{-1}$, 容易用 Siegel 公式計算.

注記

1. 此結果與 Kottwitz, Labesse 對約化代數群證明的穩定跡公式形似, 係數 $\iota(\cdots)$ 的公式更加簡化.
2. ST^H 是 H 的穩定跡公式幾何展開的一部分. 想法: 藉由 $f \mapsto f^H$,

$$\tilde{G}\text{的跡公式} = \sum_{H} \iota(\tilde{G}, H) \cdot H\text{的穩定跡公式}.$$

1. 刻劃 $f \mapsto f^H$ 的像.
2. 廣義基本引理: 證明 $f \mapsto f^H$ 與 Hecke 代數間的自然同態相容.
3. 局部域上的特徵標等式. 或可借用 Arthur 的一些論證?
4. 與 ϑ 提昇的聯繫 (顏維德): 對於非阿基米德域, 先考慮尖表示.
5. 比較 $\tilde{G}$ 與 $\mathrm{SO}(2n+1)$ 的形式次數及 μ 函數 (顏維德 -市野篤史).
6. 為研究自守表示, 須考慮完整的穩定跡公式: 不妨由 $n = 1$ 入手, 參看平賀郁 -池田保對 $\mathrm{SL}(2)$ 的一般覆疊群的工作.

回顧路線圖

千頭萬緒, 前景如何? 本人的態度:

『謹慎樂觀』

講完惹

Thank you!

Figure : The old math building, NTU.

Image source: http://www.math.ntu.edu.tw/ALUMNI