

# 教学实践：经验、反思与构想

李文威



2018年6月23日  
南京信息工程大学

封面图片取自南京信息工程大学官网。

报告发表于全国高等学校代数与几何类课程教学与课程建设会议，由江苏省数学会和科学出版社联合举办（2018年6月23-24日），南京信息工程大学承办。

编译日期：2018-06-24

# 本人过去数年的任教单位

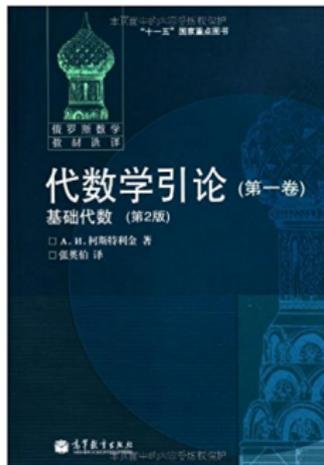


中国科学院大学  
University of Chinese Academy of Sciences

- 办学目标：培养拔尖创新人才。
- 培养模式：科教融合。
- 本人主要讲授的课程：
  - 本科和研究生基础课。
  - **代数**类为主，选修课程也涉及**数论**和**几何**的内容。
  - 主要面向基础数学方向的本科生和研究生。

## 本科代数类课程特色

- ① 线性代数（两学期）、代数（一学期）、微积分（三学期），各 80 学时。
- ② 数学专业采用俄罗斯数学教材，例如线性代数（大一）A 班和代数（大二上）要求采用**柯斯特利金**的三卷本《代数学引论》。
- ③ 由于翻译等多方面的问题，已经引入自编教材：席南华《基础代数》。
- ④ 前校长直白地说：“国科大课堂教授进度，应比一般大学快百分之三十左右。”



## 亮点

- 大一线性代数能够触及张量。
- 大二代数能够触及 Galois 理论（五次以上方程无根式解）和群表示论（特征标、正交关系）。



冯琦研究员为大一学生讲授张量，图片取自国科大微信公众号。

## 实践经验和自我检讨：本科篇

- 快节奏 + 题海战术
- 课纲流于浮夸，进度的要求不切实际。在后继课程中发现学生大多无法掌握讲过的进阶内容。
- 俄罗斯教材引起教师抵触，许多教师的品位和知识结构也和教材风格不兼容。
- 学生的生存之道：另购教材。
- 数学软件的份量 = 0。
- 除了研讨课，高年级缺少配套的进阶课程。

尽管立意甚高，现行文化的制约导致学校“严进严出”的口号至多只能做到一半。

## 研究生代数类基础课程特色（2018 年改革以前）

一年级开设三门代数基础课。

- ① **代数一**：本科代数的补强，主要是 Galois 理论、模论和有限群表示论。（一学期）
- ② **代数二**：同调代数。（半学期）
- ③ **代数三**：交换代数。（半学期）

**下游用户**：数论、代数几何方向为主。

## 实践经验和自我检讨：研究生篇

- 好处：相较于本科代数，教师自由更大。
- 待改进：宜安排习题课和习题助教，或者点学生上台做题。
- 赶鸭子上架，问题在《代数一》尤其明显，根本原因是本科阶段的课程设计欠妥。
- 同调代数、交换代数和代数几何的衔接不顺。
- 导师们乐于组织讨论班，却不愿在本院开设扎实完整的基础课程。

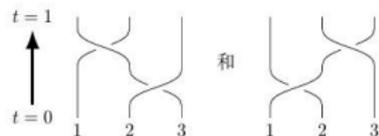
**另一现象：**学生自发的讨论班是正规课程的重要补充，但是在学分要求下，大量的鸡肋专业课势必挤占学生的时间与精力。

# 对代数类课程的几点期望（一）

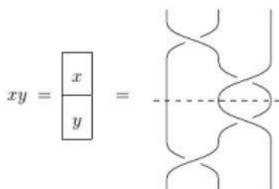
- 需要**压缩**的有
  - 初等内容，如集合、逻辑等等（中学或已接触）
  - 机械化的计算（移入习题）。
- 强化与**初等数论**的搭配（中学或已接触）。
- 每个大主题配备一个**引人入胜的例子或应用**。范例：俄罗斯教材。
- 实践表明**习题课**的建设至关重要。

## 对代数类课程的几点期望（二）

抽象代数也可以讲求直观。例如基本群、辫群：



$y \in \mathcal{B}_n$  的合成  $xy$  为  $x, y: [0, 1] \rightarrow C_n$  的首尾相衔：形点与  $y$  的终端以得到新的辫子。不难看出这是良定的。例  $x, y$ ，则



辫群  $\mathcal{B}_n$  及其商群  $\mathcal{S}_n$ （置换群）还是群展示<sup>1</sup>的极好例子。以可视的模型承接形式定义，易使听者有耳目一新的感觉。

---

<sup>1</sup>英文：presentation

## 对代数类课程的几点期望（三）

- 不失时机地在高代课程里**预热抽象代数**
  - 域  $\rightarrow$  环  $\rightarrow$  群、模
  - 行列式  $\rightsquigarrow$  置换群  $\rightsquigarrow$  简单的组合学
  - 矩阵  $\rightsquigarrow$  线性群  $GL(n), SO(n), \dots$  和非交换环论的例子
  - 三维旋转  $\rightsquigarrow$  四元数
  - 各种标准形  $\rightsquigarrow$  多项式环上的模论
- 高代书中关于 Jordan 标准形常见的“初等”证明不过是遮遮掩掩的抽象代数，不必自缚手脚。
- 对抽象代数的需求不限于数学专业，窃以为所有学习高代的学生都值得接受抽象思维的熏陶。

# 几何类课程—用户视角

## 借题发挥：何谓几何类课程？

个人理解：

- **解析几何** — 可以归入高代或师范教育。
- **微分几何、拓扑学**等高年级课程。

基础课程中也不乏几何要素。

**想法：**以**几何**贯串本科生数学教育。例如：

高代/线性代数	射影几何、线性 Lie 群的初步实例
多变元微积分	流形、拓扑的初步例子
数分/微积分和实变	点集拓扑、流形
复变	交比、非欧几何与 Riemann 曲面

- 从数列与极限的素朴概念出发，接着从  $\epsilon$ - $\delta$  到度量空间，在大一**数分**课程结束时理应能谈及一般的拓扑空间。
- 一旦讲完**多元微积分**的几个主定理，离流形就只有一步之遥。
- 流形上的 **Stokes 定理**具备丰富的几何/拓扑意蕴，只要课时充足，可以顺理成章地介绍同胚、同伦、拓扑不变量等概念。
- **复变**蕴藏的几何思想尤其丰富。例如
  - Cauchy 积分公式和缠绕数之于同伦、基本群；
  - Riemann 曲面作为流形的基本例子。

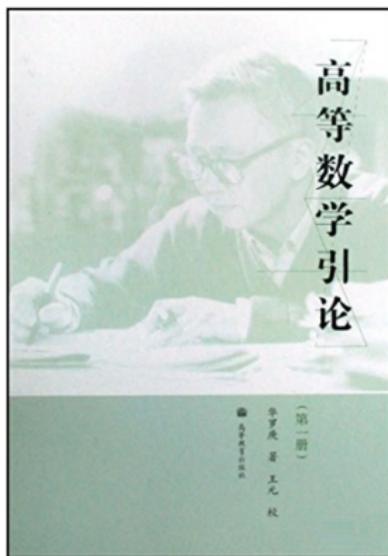
乐观地看，在大二下便能对数学和物理专业的学生介绍这些内容。俄国、法国教材（例如 Godement 的《分析学》）的作法便是如此。

## 现实困难

从集体方面考虑，这种设计要求有

- 厚实的文化土壤，或者
- 顶层设计和强大的统筹能力。

若寄望于教师个人努力，则需要内心强大 + “一条龙教学”。



一条龙教学的前驱：华罗庚在中国科大

## 对几何类课程的期望

- 点集拓扑应尽量下移到低年级课程，缩减它在拓扑学课程中的比重。
- 纵向整合 — 考虑合并本科阶段的各种拓扑与几何课程。
- 横向整合 — 搭配代数类课程。
- 纠正国内**微分几何**课程不重直观，专务繁琐计算的倾向。  
一帖解药：双曲几何。
- 有力外援：**经典力学、广义相对论**。

俄罗斯教材在这些方面独具风格，值得取法。

# 展望：代数与几何类课程设计

## 一些建议：

- **加法和减法**并重，部分内容**下移**。强化主干，分支内容安排为选修或**学生讨论班**形式，克制将学生课表塞满的冲动。
- 数学内容的**更新换代**。
- 注重不同课程之间的**协同作战**，互相支援、互相印证，减少重复劳动。
- 充分调动并尊重学生的**主体性**。

## 其它技术性的建议

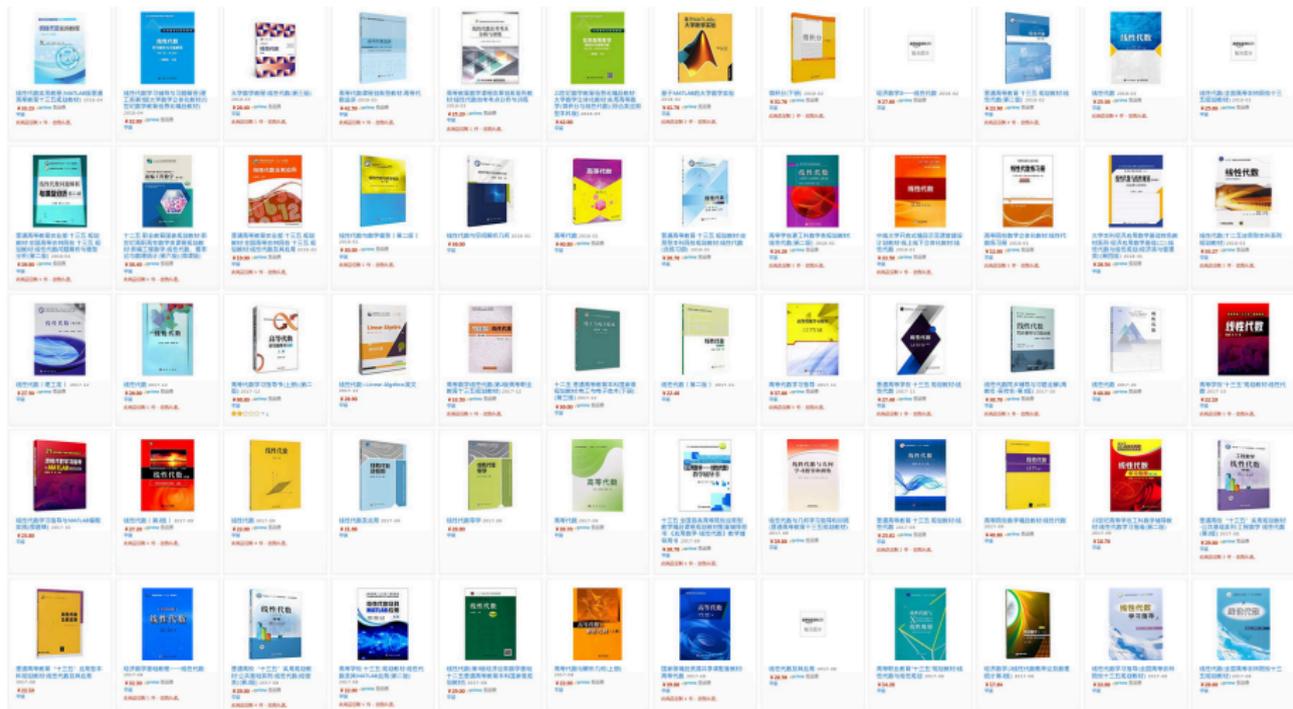
- **板书**是讲授数学的首选。宜节制 ppt 的使用。
- 优先考虑开源的数学软件，例如 Sage。可考虑结合在线  $\text{\LaTeX}$  编辑平台，如 ShareLaTeX / Overleaf 等等。
- 网上教学平台和讨论区应支持  $\text{\LaTeX}$ 。
- 尽管随着计算机的进步，各种教学辅助技术让人眼花缭乱，根本的责任千古不变，仍然是

提供及时、正规、完整、良心制作的**讲义**。

↪ 下一课题：教材编写！

# 展望：教材编写

- ① 严肃、彻底、全面。
- ② **务实**对待术语翻译。
- ③ 对文字工夫的自觉。
- ④ 宏观因素：需要适当的**激励机制**。借鉴：美国数学学会的 Steele Prize for Mathematical Exposition。



在 Amazon.cn 搜索“代数”（大中专教材、简体中文）前 60 条结果，按出版日期排序。


改为按人气排序，其余条件不变。

尽管统计方法粗糙，以上结果提示了在和代数沾边的高校教材中，供给似乎同需求偏离：

- ① 高代、线代和配套教辅书的出版状况最为火热，同质性极高；
- ② 另一方面，以所谓人气为指标，可见广大读者对进阶主题仍有殷切的盼望。

**问题：**中文数学教材是否也需要一场**供给侧改革**？

数学教育的核心是用数学本身的力量击中人心。



时下强调的“数学文化”客观上容易起到喧宾夺主的效果，其下乘或流于媚俗。

謝謝！