素数定理另证

李文威

* 本文基于笔者 2012 年 5 月某日于西南交通大学峨眉分校所作报告的底稿.

---

1. 导言

素数分布是数论中最核心的课题之一. 试详言之: 考虑函数

$$\begin{aligned} \pi :& \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ & \pi(x) := \#\{p : \text{素数}, p \leq x\}. \end{aligned}$$

对于任一对函数 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 我们以 $f(x) \sim g(x)$ (当 $x \to +\infty$) 表示

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

函数 π 的渐近行为由以下著名的素数定理给出.

定理 1.1. 当 $x \to +\infty$ 时, 我们有

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

素数定理的发现至少可以追溯到 Gauß 和 Legendre 在 19 世纪的工作. Riemann 则首先揭示了素数分布和 ζ 函数的联系. 素数定理的证明颇多, 以下且略述一二. 首个严格证明无疑归于 Hadamard 和 de la Vallé Poussin (1896), 他们的证明使用了复分析. Selberg 和 Erdős 于 1949 年各自给出独立的 "初等" 证明. 其后, Newman 在 1980 年给出目前已知的最短证明 [5], 但其中仍然用到了复分析中的 Cauchy 积分公式. 在另一条战线上, 借助于 Wiener 证明的 Tauber 型定理 (1932), 素数定理有了若干种新证明; Hadamard 等人使用的复分析技巧被经典意义下的调和分析取代. 详情可参看 [2]. Kahane (1996) 进一步发展了 Wiener 的进路, 其关键在于所谓的 "Fourier 公式" (定理 3.3).

本文旨在介绍 Kahane 的证明. 在此必须指出这个证明既非最短, 亦不初等, 优雅与否则待读者自行评断; 但是此一证明的思路清晰, 技巧也颇堪玩味, 并且能处理更一般的

Beurling 广义素数 [4]. 我们假定读者有基本的分析学知识; 对多数的证明将只述梗概, 部分结果则留给读者自证. 全文大致按照 Bost 的讲义 [1] 来铺陈, 并无创新; 一切错訛当属笔者之咎.

2. 关于 ζ 函数的若干性质

Riemann ζ 函数的定义是

$$\zeta(s) := \sum_{n\geq 1} n^{-s} = \prod_{p:\text{素数}} (1-p^{-s})^{-1}, \quad s\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s)>1.$$

以上的无穷级数及无穷乘积绝对收敛.

定理 2.1. *函数 ζ 满足下列性质:*

1. *ζ 可延拓为 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数;*
2. *ζ 仅在 $s=1$ 处有极点, 这是单极点并满足 $\mathrm{Res}_{s=1}\zeta(s)=1$;*
3. *若 $\mathrm{Re}(s)=1$ 则 $\zeta(s)\neq 0$.*

注记 2.2. 定理 2.1 的最后一个性质将是素数定理证明的关键. 这也可以从 Kahane 的 Fourier 公式及调和分析得出, 详阅 [1].

定义

$$\zeta_{\mathbb{P}}(s) := \sum_{p:\text{素数}} p^{-s}, \quad s\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s)>1.$$

易见此无穷级数绝对收敛.

以下, 符号 log 皆表示对数函数 log 在 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\leq 0}$ 上标准的解析延拓. 我们还会使用分析学中习见的小 o 记号.

命题 2.3. *函数 $\zeta_{\mathbb{P}}$ 满足下列性质*

1. *$\zeta_{\mathbb{P}}$ 可延拓为 $\{s\in\mathbb{C} : s\neq 1,\ \mathrm{Re}(s)\geq 1\}$ 上的连续函数;*
2. *$\zeta_{\mathbb{P}}$ 在 $\{s\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}(s)=1\}$ 上局部可积;*
3. *当 $t\in\mathbb{R}$ 充分小,*
$$\zeta_{\mathbb{P}}(1+it) = \log\left(\frac{1}{it}\right) + \text{连续项};$$
4. *固定 $t\in\mathbb{R}$, 当 $\sigma\in\mathbb{R}_{>0}$ 趋近于零时*
$$\zeta_{\mathbb{P}}(1+\sigma+it) = o(\log\sigma).$$

证明. 设 $g(s) := \log\zeta(s) - \zeta_{\mathbb{P}}(s)$, $\mathrm{Re}(s) > 1$. 注意到

$$g(s) = \sum_{p:\text{素数}} \left(-\log(1-p^{-s}) - p^{-s}\right).$$

存在常数 $c > 0$ 使得对所有 $u \in \mathbb{C}$, $|u| \leq 2^{-1/2}$ 者, 我们有

$$|\log(1-u) + u| \leq c|u|^2.$$

因此在 $g(s)$ 的级数展开式中, 有

$$|-\log(1-p^{-s}) - p^{-s}| \leq cp^{-2\mathrm{Re}(s)},$$

故 $g(s)$ 可延拓为 $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}\}$ 上的亚纯函数. 我们同时得到以下结果: 对于 $s_0 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s_0) = 1$ 者, 设 $n := \mathrm{ord}_{s=s_0}\zeta(s)$, 则

$$\zeta_{\mathbb{P}}(s) = n\log(s-s_0) + \text{连续项}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1,\ s \to s_0.$$

明所欲证. □

3. Fourier 公式

简要地回顾广义函数的符号: 定义拓扑向量空间

$$\mathscr{D}(\mathbb{R}) := C_c^\infty(\mathbb{R}), \qquad \mathscr{D}(\mathbb{R})' := \{\mathbb{R}\text{上的广义函数}\};$$
$$\mathscr{S}(\mathbb{R}) := \{\mathbb{R}\text{上的 Schwartz 函数}\}, \qquad \mathscr{S}(\mathbb{R})' := \{\mathbb{R}\text{上的缓增广义函数}\}.$$

Fourier 变换取以下定义: 对 $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, 定义

$$\hat{g}(y) = (\mathscr{F}g)(y) := \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi ixy} g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \hat{g} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

则 $\mathscr{F}$ 是拓扑向量空间 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 的自同构. 根据习见的定义, 由此得到缓增广义函数空间 $\mathscr{S}(\mathbb{R})'$ 的自同构.

对任意 $a \in \mathbb{R}$, 令 δ_a 表示集中于点 a 的 Dirac 测度. 定义 $\mathbb{R}$ 上的测度

$$\begin{aligned}\mu &:= \sum_{p:\text{素数}} p^{-1}\delta_{\log a},\\ \mu_\varepsilon &:= \sum_{p:\text{素数}} p^{-1-\varepsilon}\delta_{\log a}\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon > 0$. 定义以下 $\mathbb{R}$ 上的局部可积函数, 并视之为广义函数:

$$\begin{aligned}\ell(t) &:= \zeta_{\mathbb{P}}(1 + 2\pi i t),\\ \ell_\varepsilon(t) &:= \zeta_{\mathbb{P}}(1 + \varepsilon + 2\pi i t).\end{aligned}$$

引理 3.1. 对所有 $\varepsilon > 0$, μ 和 μ_ε 皆为缓增广义函数.

证明. 处理 μ 即可. 仅须注意到对任意 $\eta > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} x^{-1-\eta}\,\mathrm{d}\mu(x) = \sum_p p^{-1}(\log p)^{-1-\eta} < \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\log n)^{1+\eta}} < +\infty.$$

明所欲证. □

引理 3.2. 在广义函数的意义下

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0+}\mu_\varepsilon &= \mu,\\ \lim_{\varepsilon\to 0+}\ell_\varepsilon &= \ell.\end{aligned}$$

证明. 第一个等式较易证明; 对于第二个等式, 仅须研究 $\zeta_{\mathbb{P}}$ 在奇点附近的行为. 对此可用命题 2.3 归结为对数函数的估计. □

定理 3.3. 在广义函数意义下, $\hat{\mu} = \ell$. 因此 ℓ 也是缓增的.

证明. 根据引理 3.2, 证明 $\widehat{\mu_\varepsilon} = \ell_\varepsilon$ 足矣 ($\varepsilon > 0$); 换言之, 须证明

$$\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\ell_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t = \sum_p p^{-1-\varepsilon}\hat{\varphi}(\log p), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

鉴于 Fourier 变换和 ℓ_ε 的定义, 这乃是 Fubini 定理的一个直接推论. □

推论 3.4. 广义函数 $t \mapsto (1 + 2\pi i t)^{-1}\ell(t)$ 是缓增的, 它在 $\mathscr{F}^{-1}$ 下的像是 $x \mapsto e^{-x}\pi(e^x)$.

证明. 考虑微分算子 $D := 1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, 易验证下图交换

$$\begin{tikzcd} \mathscr{S}(\mathbb{R})' \arrow[r, "\mathscr{F}"] \arrow[d, "D"'] & \mathscr{S}(\mathbb{R})' \arrow[d, "\times(1+2\pi it)"] \\ \mathscr{S}(\mathbb{R})' \arrow[r, "\mathscr{F}"'] & \mathscr{S}(\mathbb{R})' \end{tikzcd}$$

不难证明 $D(e^{-x}\pi(e^x)) = \mu$. 另一方面已知 $\mathscr{F}\mu = \ell$. 证毕. □

4. 素数定理证明

首先利用之前得到的 Fourier 公式, 证明一个 “光滑” 版本的素数定理.

引理 4.1. 令 $\mathbf{1}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ 为 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 的特征函数, 则

$$\mathscr{F}(2\pi i \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}) = \left[t \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log \frac{1}{it}\right].$$

引理 4.2. 对任意 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, 当 $y \to +\infty$ 时

$$\int_{\mathbb{R}} \log\left(\frac{1}{it}\right) \varphi(t) e^{2\pi ity} \,\mathrm{d}t = \frac{\varphi(0)}{y} + o\left(\frac{1}{y}\right).$$

证明. 运用 Riemann–Lebesgue 引理及 4.1 可得

$$\begin{aligned} 2\pi iy \int_{\mathbb{R}} \left(\log \frac{1}{it}\right) \varphi(t) e^{2\pi ity} \,\mathrm{d}t &= -\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\log \frac{1}{it} \cdot \varphi(t)\right)\right) \\ &= \cdots = 2\pi i\varphi(0) + o(1). \end{aligned}$$

等式两边同除以 $2\pi iy$ 即得证. □

以下须用到经典的 Paley–Wiener 空间 $\mathrm{PW}(\mathbb{R}) := \mathscr{F}(\mathscr{D}(\mathbb{R})) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$. 注意到 $\mathrm{PW}(\mathbb{R})$ 中存在函数 ψ 满足 $\psi \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) \,\mathrm{d}t = 1$; 但这类函数支集非紧, 分析上须多费工夫.

命题 4.3. 对任意的 $\psi \in \mathrm{PW}(\mathbb{R})$, 当 $y \to +\infty$ 时

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x - y) e^{-x} \pi(e^x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{y} \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \,\mathrm{d}x + o\left(\frac{1}{y}\right).$$

证明. 取 φ 使得 $\psi = \hat{\varphi}$. 推论 3.4 蕴涵了

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x - y) e^{-x} \pi(e^x) \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \ell(t)(1 + 2\pi it)^{-1} \varphi(t) e^{2\pi ity} \,\mathrm{d}t.$$

命题的左式遂可写为

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\ell(t) - \log\frac{1}{it}\right) \frac{\varphi(t)}{1+2\pi it} e^{2\pi ity}\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} \left(\log\frac{1}{it}\right) \frac{\varphi(t)}{1+2\pi it} e^{2\pi ity}\,\mathrm{d}t.$$

由命题 2.3 可知第一个积分属于 $\mathrm{PW}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$, 可写作 $o(\frac{1}{y})$. 由引理 4.2 可知第二个积分为 $\frac{1}{y}\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\,\mathrm{d}x + o(\frac{1}{y})$. □

定理 *1.1* 之证明. 今将往证等价叙述 $\lim_{y\to+\infty} ye^{-y}\pi(e^y) = 1$. 大致想法是在命题 4.3 中取 $\psi = \delta_0$. 严谨论证如下. 取 $\psi_1 \in \mathrm{PW}(\mathbb{R})$ 使得 $\psi_1 \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} \psi_1(t)\,\mathrm{d}t = 1$; 对任意 $\lambda > 0$, 置 $\psi_\lambda(x) := \lambda^{-1}\psi_1(\frac{x}{\lambda})$. 固定 $\varepsilon > 0$, 在命题 4.3 中取 $\psi = \psi_\lambda$, 其中 λ 充分小, 可得

$$\frac{1}{y} + o\left(\frac{1}{y}\right) \geq \frac{\pi(e^{y-\varepsilon})}{e^{y+\varepsilon}} \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \psi_\lambda(x-y)\,\mathrm{d}x \geq 1-\varepsilon.$$

因 ε 可任取, 遂有

$$\limsup_{y\to+\infty} ye^{-y}\pi(e^y) \leq 1.$$

由此得出存在常数 $M > 0$, 使得当 $x > 0$ 时

$$\pi(e^x) \leq \frac{Me^x}{x+1}. \tag{1}$$

准此要领, 在命题 4.3 中取 $\psi = \psi_\lambda$ (λ 充分小) 并运用估计 (1) 及 Schwartz 函数的速降性质, 可得

$$\frac{1}{y} + o\left(\frac{1}{y}\right) \leq \frac{\pi(e^{y+\varepsilon})}{e^{y-\varepsilon}} + \frac{2M\varepsilon}{y}.$$

是故

$$\liminf_{y\to+\infty}\ ye^{-y}\pi(e^y) \geq 1.$$

明所欲证. □

参考文献

[1] Jean-Benoît Bost, *Le théorème des nombres premiers*, 系 La fonction zêta 一章, École Polytechnique (2011).

[2] 《华罗庚文集: 数论卷 2》, 中国科学院华罗庚数学重点实验室丛书, 科学出版社; 第 1 版 (2010 年 5 月 1 日).

[3] Jean-Pierre Kahane, *A Fourier Formula for Prime Numbers*, CMS Conf. Proc. vol. 21 (1997).

[4] Jean-Pierre Kahane, *Sur les nombres généralisés de Beurling, Preuve d'une conjecture de Bateman et Diamond*, J. Th. Nombres Bordeaux, 9 (1997).

[5] Don Zagier, *Newman's short proof of the prime number theorem*. American Mathematical Monthly 104 (8): 705–708 (1997).