# 论某类非分歧 L 函数

李文威
wwli@math.ac.cn
中国科学院数学与系统科学研究院

2013 年 12 月 13 日
数学所科研工作总结会 [1]

[1] 内容经过部分修正

# $L$ 函数

**经典例子：Riemman $\zeta$ 函数**

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p:\text{素数}} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

它有到 $\mathbb{C}$ 的半纯延拓, 仅在 $s = 1$ 处有单极点且留数 $= 1$. 函数方程:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\pi s/2) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

其它 $L$ 函数示例:

- 数域的 Dedekind $\zeta$ 函数.
- 代数簇的 Hasse-Weil $\zeta$ 函数.
- 自守表示的种种 $L$ 函数.
- Galois 表示的 Artin $L$ 函数.

$L$ 函数的解析性状 (函数方程, 极点, 留数等) 蕴藏了数学对象的重要信息. 例如:

- Riemann $\zeta$ 函数的零点分布 $\longleftrightarrow$ 素数分布;
- 数域 $K$ 上椭圆曲线 $E$ 的 $L$ 函数在 $s=1$ 处的行为 $\longleftrightarrow$ 有理点群 $E(K)$ 的秩 (BSD 猜想);
- 数域 $K$ 的 Dedekind $\zeta$ 函数在 $s=1$ 处的留数 $\longleftrightarrow$ $K$ 的类数 $h_K$ (解析类数公式);
- 某类自守形式的周期积分 $\longleftrightarrow$ 某类自守 $L$ 函数的特殊值 (颜维德-Gross-Prasad 猜想及其细化).

# Euler 积

一如经典的 Riemann $\zeta$ 函数, 众多 $L$ 函数在参数 $s$ 实部充分大时也可以写成 Euler 积

$$L(s) = (\text{其它项}) \cdot \prod_{p:\text{几乎所有素数}} L_p(s).$$

局部 $L$ 函数 $L_p(s)$ 容易定义, 难处在于研究其*无穷乘积* $\prod_p L_p$ 的性质.

**Langlands 的洞见**

$$\text{Artin } L \text{ 函数} \longrightarrow \text{自守 } L \text{ 函数} \longleftarrow \text{Hasse-Weil } \zeta \text{ 函数}.$$

自守 $L$ 函数的解析性质相对容易研究.

# 自守表示

$F$: 数域, 其 adèle 环记为

$$\mathbb{A}_F := \Bigg( \prod'_{v:F\text{的赋值}} \underbrace{F_v}_{\text{对 } v \text{ 作完备化}} \Bigg) \supset F \quad (\text{作为离散子环}).$$

**$L^2$ 自守表示**

设 $G$ 是 $F$ 上的分裂约化代数群, 例如 $\mathrm{GL}(n)$. 群 $G$ 的 $L^2$ 自守表示定义为 $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F))$ 的不可约子表示; 这里 $G(\mathbb{A}_F)$ 以右平移作用于 $L^2$ 空间.

每个这样的自守表示都有限制张量积分解 $\pi = \bigotimes'_v \pi_v$, 这里 $\pi_v$ 是群 $G(F_v)$ 的不可约光滑表示.

# 非分歧情形

对于几乎所有的非 Archimedes 赋值 $v$, 可定义 $G(F_v)$ 的极大紧开子群 $K_v := G(\mathfrak{o}_v)$, 并定义不可约光滑表示 $\pi_v$ 是非分歧的, 若 $\pi_v$ 有非零的 $K_v$ 不变向量. 非分歧表示一一对应于球面 Hecke 代数

$$\mathcal{H}_v^G := \{f\colon K_v \backslash G(F_v)/K_v \to \mathbb{C}, f \in C_c^\infty(G(F_v))\} + \text{卷积}$$

的不可约表示.

**佐武一郎同构**

$$\mathcal{S} : \mathcal{H}_v^G \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}(\hat{G}) \otimes \mathbb{C}$$

这里 $\hat{G}$ 是 $G$ 的复 Langlands 对偶群, 而 $R(\hat{G})$ 表其 (代数) 表示环. 于是乎非分歧表示一一对应于 $\hat{G}$ 的半单共轭类, 称作佐武参数.

# 非分歧 $L$ 函数

对于给定的代数表示 $\rho : \hat{G} \to \mathrm{GL}(n)$ 及佐武参数 $c_v \in \hat{G}/\sim$, 置

$$L(s, c_v, \rho) := \det(1 - \rho(c_v) q_v^{-s})^{-1}$$

其中 $s \in \mathbb{C}$ 而 $q_v$ 是 $F_v$ 的剩余类域的元素个数. 请留意:

- 易见对于固定的 $s$,
$$c_v \mapsto L(s, c_v, \rho)$$
是复代数簇 $\hat{G}$ 上的 $G$ 不变有理函数; 进一步说, 它是伴随商 $\hat{G}/\!/\hat{G}$ 上的《有理函数》[2].
- 相对地, 佐武一郎同构的像可视为 $\hat{G}/\!/\hat{G}$ 上的《正则函数》.

[2]伴随作用 = 共轭作用; 商仍是仿射代数簇.

## 部分 $L$ 函数

给定自守表示 $\pi = \bigotimes'_v \pi_v$ 及 $\rho$, 取充分大但有限的赋值集 $S$, 使得对 $v \notin S$ 可以定义 $L(s, c_v, \rho)$. 定义部分 $L$ 函数为

$$L^S(s, \pi, \rho) := \prod_{v \notin S} L(s, c_v, \rho)$$

其中 $c_v$ 是 $\pi_v$ 的佐武参数, 用纬向球面函数的理论 (Macdonald 公式) 可以证明当 $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ 时无穷乘积收敛.

这是 Langlands 理论的起点. 为研究 $L^S(s, \pi, \rho)$ 的解析性质必须引进其它表法, 例如 $\zeta$ 积分表达式.

# 标准 $L$ 函数

令 $G=\mathrm{GL}(n)$, 于是 $\hat{G}=\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. 置 $\mathrm{Std}:\hat{G}\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 为恒等表示. 相应地 $L^S(s,\pi,\mathrm{Std})$ 称为 $\pi$ 的标准 $L$ 函数.

1. Tate: 研究 $n=1$ 情形, 引进 Tate 积分. 局部 -整体手法.
2. 玉河恒夫, Godement, Jacquet: 推广至一般的 $n$. 考虑局部 $\zeta$ 积分

$$Z_v(s,\Phi,f):=\int_{\mathrm{GL}(n,F_v)}\Phi\cdot f\cdot|\det|_v^s$$

这里 $f$ 是表示 $\pi_v$ 的矩阵系数, 而 $\Phi$ 是矩阵空间 $M_n(F_v)$ 上的 Schwartz 函数/速降函数. 当 $\mathrm{Re}(s)\gg 0$ 时积分收敛.

可证明 $\zeta$ 积分对 $s$ 有半纯延拓. 局部标准 $L$ 函数定为

$$L(\cdot,\pi_v,\mathrm{Std}):=\gcd\left\{Z_v(\cdot+(n-1)/2,\Phi,f):f,\Phi\text{遍取}\right\}.$$

# 非分歧情形

以上对于 $F$ 的任意赋值 $v$ 构造了相应的 $\zeta$ 积分, 并导出局部 $L$ 函数.

- 整体的情形类似, 函数方程等性质由 $M_n(\mathbb{A}_F)$ 上的 Fourier 变换和 Poisson 求和公式给出.
- 对于使 $\pi_v$ 非分歧的赋值 $v$, 可以适当地取矩阵系数 $f$ 及

$$\Phi := \mathbf{1}_{M_n(\mathfrak{o}_v)}$$

使得

$$Z_v(s, \Phi, f) = L_v\left(s - \frac{n-1}{2}, \pi_v, \mathrm{Std}\right).$$

玉河恒夫首先验证了左式确实等于原来定义的非分歧 $L$ 函数.

# 一般情形

我们自然要问：玉河恒夫 -Godement-Jacquet 的构造能用于一般的 $(G,\rho)$ 吗？佐武一郎和志村五郎都考虑了 $\mathrm{GSp}(4)+$ 旋量表示，并在非分歧情形用 $\mathbf{1}_{\mathrm{MSp}(4)}$ 代替 $\mathbf{1}_{M_n(\mathfrak{o}_v)}$，结果得不到 $L$ 函数. 这里 $\mathrm{MSp}(4)$ 是 $\mathrm{GSp}(4)$ 在 $M_4$ 里的 Zariski 闭包.

## Braverman-Kazhdan (2000)

设 $F$ 是局部域，有短正合列

$$1 \to G_0 \to G \xrightarrow{\det_G} \mathrm{GL}(1) \to 1$$

而且 $\mathrm{GL}(1,\mathbb{C}) \to \hat{G} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}(N,\mathbb{C})$ 合成后等于对角嵌入. 他们猜想:

- 可以定义 $G(F)$ 上的 Schwartz 空间及 $\zeta$ 积分;
- 对 Schwartz 空间有某种 Fourier 变换和 Poissons 求和公式.

则能仿造玉河恒夫 -Godement-Jacquet 的方法研究 $L(s,\pi,\rho)$.

# 基本函数

势必要先考虑的是非分歧情形: 用什么替代标准 $L$ 函数情形下的 $\mathbf{1}_{M_n(\mathfrak{o}_v)}$?

**Sakellaridis 的 "基本函数"**

与 $(G, \rho, \det_G)$ 相应的 Schwartz 空间应包含一个基本函数.

- 函数域情形下: 与某些 $G$ 的等变嵌入上的反常层有关 (所谓 "函数-层字典"). 当等变嵌入有奇点时, 相应的函数不会像 $\mathbf{1}_{M_n(\mathfrak{o}_v)}$ 一般简单.
- 也与 $L$ 函数相关.
- 用以定义整体 Schwartz 空间.

他的猜想受到几何 Langlands 纲领的启发.

Braverman 与 Kazhdan 的想法: $L$ 函数优先. 欲定义 $G(F_v)$ 上的光滑函数 $f_{\rho,s}$ 使得

- 在 $G(F_v) \xrightarrow{\det_G} F_v^\times \xrightarrow{v} \mathbb{Z}$ 的每个纤维上是 $K_v$ 双不变紧支函数;
- 因此可以逐纤维地定义 $\mathcal{S}(f_{\rho,s})$; 当 $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ 时其和收敛并给出 $c_v \mapsto L(s, c_v, \rho)$; 这里 $c_v$ 表示佐武参数.
- $f_{\rho,s+t} = f_{\rho,s}|\det_G|_v^t$.

尽管 $L(s, \cdot, \rho)$ 仅是 $\hat{G}//\hat{G}$ 上的有理函数, 我们有

$$L(s, c_v, \rho) = \det(1 - \rho(c_v)q^{-s})^{-1} = \sum_{k \geq 0} \underbrace{\mathrm{tr}\left(\mathrm{Sym}^k \rho(c_v)\right)}_{\text{正则函数}} q^{-ks}.$$

对每个 $\mathrm{tr}(\mathrm{Sym}^k \rho(\cdot))$ 取 $\mathcal{S}^{-1}$ 并求和, 遂得 $G(F_v)$ 上的 $K_v$ 双不变函数, 支集非紧.

# 问题

以上可以视为用谱分解定义 $f_{\rho,s}$; 实际操作时需要其几何性质 (无穷远处的增长速率等). **目标**: 得到较明晰, 与其它数学对象相关的公式.

## 困难

- 须对每个 $k$ 确定对称积 $\mathrm{Sym}^k\rho$ 的分解.
- 为显式表达 $\mathcal{S}^{-1}$, 必须计算无穷多个Kazhdan-Lusztig 多项式 (Lusztig-加藤信一公式).

内啥, 即使对标准 $L$ 函数也不太容易!

## 一条出路

利用 Hesselink, Broer 等人对 Kazhdan-Lusztig 多项式的工作, 予 $f_{\rho,s}$ 以不变量理论的诠释, 并将问题化为某些等变 Poincaré 级数的操作. 这还与 Panyushev 定义的广义 Kostka-Foulkes 多项式相关 (用组合学定义).

# 相关应用

1. L. Lafforgue: 假设 Schwartz 空间存在并有 Fourier 变换和 Poisson 求和公式, 可以导出 Langlands 函子性.
2. 吴宝珠: 在 Arthur-Selberg 迹公式中使用基本函数, 研究某些自守 $L$ 函数的和. 参见他 2012 年在顺化的报告 *On automorphic L-functions*.

两者都依赖于基本函数和 Schwartz 空间的几何刻画.

## 文献

参见 *Basic functions and unramified local L-factors for split groups*, 2013. `arXiv:1311.2434` 及其书目.