中国科学院大学

试 题 专 用 纸

开课编号：B12001Y

课程名称：代数

任课教师：李文威

时间: 2016 年 1 月 22 日 14:00–16:00

总分: 100 分

符号: 集合 E 的元素个数表作 $|E|$, 群 G 的中心记为 $Z(G)$, 域 F 的特征记为 $\mathrm{char}(F)$.

1. **(20 分)** 设 $f \in \mathbb{Q}[X]$ 是奇数次不可约多项式, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ 为 f 的相异根, 证明 $\alpha + \beta$ 不属于 $\mathbb{Q}$.

☞ **解答.** 设 $c := \alpha + \beta \in \mathbb{Q}$, 则 $f(X)$ 和 $g(X) := -f(c - X)$ 都是首一不可约有理多项式, 并且有公共根 α. 因而 $f = g$. 所以 $\tau : x \mapsto c - x$ 是从 $\{x \in \mathbb{C} : f(x) = 0\}$ 到自身的双射, $\tau^2 = \mathrm{id}$, 但 τ 不可能有不动点, 这与 f 有奇数个根矛盾.

2. **(20 分)** 基于有限域的理论, 说明代数闭域必有无穷多个元素.

☞ **解答.** 已知对每个有限域 $\mathbb{F}_q$ 和每个 $n \geq 1$, 域 $\mathbb{F}_q$ 都有 n 次扩张 $\mathbb{F}_{q^n}$.

3. **(20 分)** 证明 $X^3 - 3X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$ 不可约并确定其 Galois 群.

☞ **解答.** 代入 $X = \pm 1, \pm 3$ 知其无有理根, 故不可约. 由微积分知其局部极值在 $X = \pm 1$, 分别为 1 和 5, 因此恰有一实根. 从而 Galois 群是 S_3 中含一个对换 (复共轭) 而且阶数 ≥ 3 的子群, 故为 S_3.

4. **(20 分)** 定义 Q_8 为 8 阶群 $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ (即课本里的四元数群), 其乘法由

$$\pm 1 \in Z(Q_8), \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = k = -ji,\ jk = i = -kj,\ ki = j = -ik$$

所确定.

(i) 建立 Q_8 的复不可约表示的特征标表: 其中有 4 个一维表示, 1 个二维不可约表示 $\Phi^{(5)}$.

(ii) 说明 Q_8 在 $\mathbb{R}$ 上有一个 4 维不可约表示, 当系数扩张到 $\mathbb{C}$ 后它同构于 $\Phi^{(5)} \oplus \Phi^{(5)}$.

☞ **解答.** 参看 [BAIII, p.107]: 首先确定 Q_8 的五个共轭类为

$$1, -1, \pm i, \pm j, \pm k.$$

由 $Q_8/\pm 1 \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ 构造 4 个复一维表示, 相应的特征标记为 χ_1, χ_2, χ_3, χ_4; 由 $|Q_8| = 4 \cdot 1^2 + 2^2$ 可知还剩下一个 2 维不可约表示 $\Phi^{(5)}$, 其特征表记为 χ_5. 适当排列后有

	1	-1	$\pm i$	$\pm j$	$\pm k$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1	1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	1	-1	-1
χ_5	2	-2	0	0	0

其中最后一行可用特征标的第二正交关系计算: $\chi_5(1) = \dim \Phi^{(5)} = 2$ 已知, 而

$$\forall g \in Q_8, \quad \sum_{i=1}^{5} \chi_i(g)\overline{\chi_i(1)} = \begin{cases} 0, & g \neq 1 \\ |G|, & g = 1. \end{cases}$$

现在考虑实表示: 令 $\mathbb{H}$ 表 Hamilton 的四元数代数. Q_8 是群 $\mathbb{H}^\times := \mathbb{H} \setminus \{0\}$ 的乘法子群, 故以左乘作用在 $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$ 上, 由此给出 $\mathbb{R}$ 上的 4 维表示. 因为 $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ 线性地张出 $\mathbb{H}$, 故此表示不可约 ($\because v \in \mathbb{H} \setminus \{0\} \implies \mathbb{H}v = \mathbb{H}$). 容易计算此表示的特征标为 $\chi(\pm 1) = \pm 4$, $g \neq \pm 1 \implies \chi(g) = 0$. 比较上表可知 $\chi = 2\chi_5$.

5. **(20 分)** 设 G 为有限群, 而域 $\Bbbk$ 满足 $\mathrm{char}(\Bbbk) \nmid |G|$. 证明若群代数 $\Bbbk G$ 同构于可除 $\Bbbk$-代数的直积 $D_1 \times \cdots \times D_n$, 则任何子群 $H \leq G$ 都是正规子群.

☞ 解答. 首先验证 $e := |H|^{-1} \sum_{h \in H} h \in \Bbbk G$ 满足 $e^2 = e$:

$$\begin{aligned} e^2 = |H|^{-2} \sum_{h,k \in H} hk &= |H|^{-2} \sum_{h \in H} \sum_{\substack{(x,y) \in H^2 \\ xy = h}} h \\ &= |H|^{-2} |H| \sum_{h \in H} h = e. \end{aligned}$$

在 $D_1 \times \cdots \times D_n$ 中逐分量地考虑 $e(e-1) = 0$ 可知 $e \in Z(\Bbbk G)$ (因为在任何环中 $0, 1$ 都是中心元). 再从 $\forall g \in G,\ ge = eg$ 证明 $H \lhd G$.