中国科学院大学

试 题 专 用 纸

开课编号：B12001Y

课程名称：代数

任课教师：李文威

时间: 2015 年 11 月 10 日 08:00–09:40

总分: 100 分

符号: 集合 E 的元素个数表作 $|E|$. 以 $\langle g\rangle$ 表群中元素 g 生成的循环子群, 记 g 的阶数为 $\mathrm{ord}(g) = |\langle g\rangle|$. 环皆含 1; 环 A 的全体乘法可逆元记作 $A^\times$, 它对乘法成群.

1. **(10 分)** 设 G 为有限群, p 为素数, $P \leq G$ 为 Sylow p-子群. 定义 $N_G(P) := \{g \in G : gPg^{-1} = P\}$. 证明 $N_G(P) \lhd G \iff P \lhd G$.

解答. ($\implies$): $P \lhd N_G(P)$ 故 P 是 $N_G(P)$ 唯一的 Sylow p-子群, 因此 $gN_G(P)g^{-1} = N_G(P)$ 蕴涵 $gPg^{-1} = P$.

($\impliedby$): $gN_G(P)g^{-1} = N_G(gPg^{-1})$.

2. **(20 分)** 设 p, q 为相异素数, 证明阶数为 p^2q 的群 G 必有正规的 Sylow p- 或 q-子群.

解答. 当 $p > q$ 时, Sylow p-子群的个数 $\equiv 1 \mod p$, 而此个数又要整除 $q < p$, 故恰有一个. 当 $p < q$ 时, 同理可知 Sylow q-子群个数整除 p^2, 同样论证可排除 p 个的情形, 如恰有一个则满足正规性. 若有 p^2 个 Sylow q-子群, 任取 Sylow p-子群 P, 因为不同 q-子群的交为 $\{1\}$ 故 $|\{g \in G : \mathrm{ord}(g) = q\}| = p^2(q-1) = |G| - |P|$, 数数儿可知 P 是唯一的 Sylow p-子群.

3. **(20 分)** 设群 G 由元素 a, b 生成, $\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(b) = \infty$.

(i) 若 G 左作用在集合 Ω 上, 并且存在非空子集 $A, B \subset \Omega$ 使得
- B 不包含于 A,
- 对任意 $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 都有 $a^m B \subset A$, $b^n A \subset B$,

证明 G 同构于秩 2 的自由群 F_2, 其中 a, b 对应到 F_2 的标准生成元.

(ii) 此结果或其推广俗称乒乓引理, 为什么?

解答. 要证明的是若字

$$w = \underbrace{\cdots a^{n_i} b^{m_{i+1}} a^{n_{i+2}} b^{m_{i+3}} \cdots}_{k\text{项}}, \quad n_i, m_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

在 G 中为单位元, 则 w 是空字 (即 $k = 0$). 设 $k \geq 1$, 当 w 形如 $a^{n_1} b^{m_2} \cdots a^{n_k}$ 时应用题目条件可知

$$w : B \xrightarrow{a^{n_k}} A \xrightarrow{b^{m_{k-1}}} B \to \cdots \xrightarrow{a^{n_1}} A$$

故 w 在 Ω 上作用非平凡, $w \neq 1$. 对于剩下情形:
- $w = b^{m_1} \cdots b^{m_k}$: 取共轭 awa^{-1} 化约到前述情形;
- $w = a^{n_1} \cdots b^{m_k}$: 取共轭 $a^{n_0} w a^{-n_0}$, 其中 $n_0 \neq -n_1, 0$;
- $w = b^{m_1} \cdots a^{n_k}$: 取逆化约到前一情形.

4. **(15 分)** 群 $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ 以矩阵乘法左作用于 $\mathbb{R}^2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) : x, y \in \mathbb{R} \right\}$. 令

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

用上题结果证明 $a, b \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ 生成的子群同构于秩 2 自由群 F_2.

解答. 取 $\Omega = \mathbb{R}^2$ 及其子集 $A = \{|x| > |y|\}$, $B = \{|x| < |y|\}$. 直接验证条件.

5. **(20 分)** 定义 $\mathscr{C}([0,1])$ 为全体连续函数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, 它具有交换环的结构: 置 $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(fg)(x)=f(x)g(x)$, 乘法单位元是常值函数 1.

   (i) 证明 $\mathscr{C}([0,1])^\times$ 由处处非零的连续函数组成.

   (ii) 对每个 $x\in[0,1]$ 定义 $\mathfrak{m}_x := \{f\in\mathscr{C}([0,1]) : f(x)=0\}$, 说明 $\mathfrak{m}_x$ 是极大理想.

   (iii) 证明对每个极大理想 $\mathfrak{m}\subset\mathscr{C}([0,1])$ 都存在 x 使得 $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_x$.

☞ *解答.* 对每个 x 定义环同态 $\mathrm{ev}_x : f\mapsto f(x)$. 第一个部分是简单的, 第二部分是因为

$$\mathfrak{m}_x = \mathrm{Ker}\left(\mathrm{ev}_x : \mathscr{C}([0,1]) \twoheadrightarrow \mathbb{R}\right).$$

以下讨论第三部分. 我们承认数学分析中关于 $[0,1]$ 的几个性质, 以下的 "开集" 不妨理解为 $[0,1]$ 中形如 $[0,b)$, (a,b) 或 $(a,1]$ 的子区间:

- 如 $[0,1]$ 由是一族开集的并, 则它是其中有限多个开集的并;
- 若 $f\in\mathscr{C}([0,1])$ 满足 $f(x)\neq 0$, 则 f 在某个包含 x 的开集上非零.

假定对每个 $x\in[0,1]$ 都存在 $f_x\in\mathfrak{m}$ 使得 $f(x)\neq 0$; 取开集 $\mathscr{U}_x\ni x$ 使得 f_x 在其上恒非零. 拣择有限多个 $x_1,\ldots,x_n$ 使得 $\bigcup_{i=1}^n \mathscr{U}_{x_i}=[0,1]$, 则

$$f := \sum_{i=1}^n f_{x_i}^2 \quad \in \mathfrak{m}$$

并且对每个点 x 都存在 $i=i(x)$ 使得 $x\in\mathscr{U}_{x_i}$ 而 $f(x)\geq f_{x_i}(x)^2>0$, 故 f 可逆.

6. **(15 分)** 定义 $\mathbb{R}$ 的子环 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \left\{a+b\sqrt{2} : a,b\in\mathbb{Z}\right\}$.

   (i) 验证 $\tau : a+b\sqrt{2}\mapsto a-b\sqrt{2}$ 是环 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ 的自同构, 并验证函数

$$\begin{aligned} N : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto x\tau(x) \end{aligned}$$

   满足于

$$N(xy)=N(x)N(y), \quad N(1)=1, \quad \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times = \{x : N(x)=\pm 1\}.$$

   (ii) 证明存在足够小的 $\delta>0$ 使得对每个 $x\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ 都有

$$x=\pm 1 \iff \Big||x|-1\Big|<\delta \text{ 而且 } \Big||\tau(x)|-1\Big|<\delta.$$

   (iii) 证明存在 $\varepsilon\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ 使得 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times = \{\pm 1\}\times\langle\varepsilon\rangle$.

☞ *解答.* (i) 无非是定义的操演. 对于 (ii), 令 $x=a+b\sqrt{2}$, 线性方程组

$$\begin{aligned} a+b\sqrt{2} &= u \\ a-b\sqrt{2} &= v \end{aligned}$$

在 $\mathbb{R}^2$ 中有唯一解

$$\begin{aligned} a &= \frac{u+v}{2} \\ b &= \frac{u-v}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

当 (u,v) 充分接近 (以 δ 描述) $\pm(1,1)$ 或 $\pm(1,-1)$ 时, (a,b) 随之接近 $(\pm 1, 0)$ 或 $(0, \frac{1}{2})$; 由 $\mathbb{Z}^2$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中离散可知仅当 $(u,v) = \pm(1,1)$ 时才可能有 $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

对于 (iii), 考虑群同态

$$\begin{aligned} L : \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ x &\longmapsto (\log|x|, \log|\tau(x)|). \end{aligned}$$

由 (ii) 知核 $\ker(L) = \pm 1$, 像 $\operatorname{im}(L)$ 则是 $\left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a + b = 0\right\}$ 的离散子群. 既然 $\mathbb{R}$ 的离散子群必 $\simeq \mathbb{Z}$ 或 $\{0\}$, 可取 ε 使得 $L(\varepsilon)$ 生成 $\operatorname{im}(L)$; 当 $\operatorname{im}(L) = \{0\}$ 时取 $\varepsilon = 1$ (实则能证明这种情形不会发生). 易见 $\{\pm 1\} \cdot \langle \varepsilon \rangle = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ 而且 $\{\pm 1\} \cap \langle \varepsilon \rangle = \{1\}$, 于是得到直积.