中国科学院大学

试 题 专 用 纸

课程编号：B12001Y-01，B12001Y-02

课程名称：代数

任课教师：李文威，支丽红

注意事项：

1.考试时间为 120 分钟，考试方式 闭 卷；

2.全部答案写在答题纸上；

3.考试结束后，请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

---

时间: 2018 年 1 月 23 日 14:00–16:00

总分: 100 分

注记: 题目中的群表示都作用在有限维复向量空间上. 域扩张写作如 $E/F$ 的形式.

**1. (15 分)** 设 $E$ 为多项式 $X^8-1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的分裂域, 求 $[E:\mathbb{Q}]$, 并决定 Galois 群 $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$.
☞ 解答. 见《近世代数三百题》3.2.8; 第 139 页. 实际上 $E=\mathbb{Q}\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)=\mathbb{Q}(\sqrt{-1},\sqrt{2})$ 是 $\mathbb{Q}$ 的 4 次扩张, Galois 群同构于 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, 由 $\sqrt{-1}\mapsto\pm\sqrt{-1}$ 和 $\sqrt{2}\mapsto\pm\sqrt{2}$ 确定; 这也是环 $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 的可逆元群.

**2. (15 分)** 考虑扩域 $E/F$ 和代数元 $\alpha\in E$. 证明若 $[F(\alpha):F]$ 是奇数, 那么 $F(\alpha)=F(\alpha^2)$.
☞ 解答. 由于 $[F(\alpha):F(\alpha^2)]\leq 2$ 并且整除 $[F(\alpha):F]$, 它必然 $=1$.

**3. (20 分)** 设 $p>2$ 是素数, $\zeta_p=e^{2\pi i/p}\in\mathbb{C}$. 证明 $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 有唯一的子域 $E$ 使得 $[E:\mathbb{Q}]=2$, 并且 $E\subset\mathbb{R}$ 当且仅当 $p\equiv 1 \pmod 4$.
☞ 解答. 按照 Galois 理论, 这样的子域对应到 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q})\simeq\mathbb{F}_p^\times$ 中指数为 2 的子群. 因为存在同构 $\mathbb{F}_p^\times\simeq\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ (依赖于 mod $p$ 原根的选取), 这样的子群 $H$ 是唯一的, 并且由 $H=\left\{g\in\mathbb{F}_p^\times : g^{(p-1)/2}=1\right\}$ 唯一确定.

另一方面, 子域 $\mathbb{Q}(\zeta_p)\cap\mathbb{R}$ 是复共轭自同构 $\zeta_p\mapsto\zeta_p^{-1}$ 的不动子域, 按分圆域的 Galois 理论对应到 $-1\in\mathbb{F}_p^\times$ 生成的子群. 所以

$$E\subset\mathbb{Q}(\zeta_p)\cap\mathbb{R} \iff H\ni -1 \iff (-1)^{(p-1)/2}=1\in\mathbb{F}_p,$$

最后一式等价于 $p\equiv 1 \pmod 4$.

**4. (15 分)** 设 $g$ 是有限群 $G$ 的元素. 证明 $g$ 和 $g^{-1}$ 共轭当且仅当对所有不可域复表示的特征标 $\chi$ 都有 $\chi(g)\in\mathbb{R}$.
☞ 解答. 一个基本性质是 $\chi(g)=\overline{\chi(g^{-1})}$. 若 $g$ 和 $g^{-1}$ 共轭, 那么 $\chi(g)=\overline{\chi(g)}$ 故 $\chi(g)\in\mathbb{R}$. 反过来说, $\chi(g)\in\mathbb{R}$ 蕴涵 $\chi(g)=\chi(g^{-1})$. 因为所有不可约特征标张成向量空间 $\{f: G/\text{共轭}\to\mathbb{C}\}$, 对所有共轭不变函数都有 $f(g)=f(g^{-1})$. 特别地，取 $G$ 上的共轭不变函数

$$f_g(x)=\begin{cases}1, & x,g\ \text{共轭}\\ 0, & \text{非共轭}.\end{cases}$$

那么 $f_g(g^{-1})=f_g(g)=1$ 就导致 $g$ 和 $g^{-1}$ 共轭.

**5. (15 分)** 给出对称群 $S_n$ 的所有一维表示.
☞ 解答. 两种: 单位或平凡表示, 和 sgn 表示. 这相当于确定所有群同态 $\varphi: S_n\to\mathbb{C}^\times$.

中国科学院大学

试 题 专 用 纸

课程编号：B12001Y-01，B12001Y-02

课程名称：代数

任课教师：李文威，支丽红

注意事项：

1.考试时间为 120 分钟，考试方式 闭 卷；

2.全部答案写在答题纸上；

3.考试结束后，请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

(a) 第一种方法是用 $S_n$ 的换位子群等于 $A_n = \mathrm{Ker}(\mathrm{sgn})$ 这一事实.

(b) 或者因为 $S_n$ 由 $(12)$ 的所有共轭元生成, 同态由 $\varphi(12) \in \{\pm 1\}$ 确定, 分别对应平凡表示和 sgn.

**6. (20 分)** 设 $\rho : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ 是有限群 $G$ 的不可约表示, 证明

$$\sum_{g\in G} \rho(g) = \begin{cases} |G|, & \rho \text{ 是平凡/单位表示} \\ 0, & \text{其它情形.} \end{cases}$$

☞ 解答. 关键在证明 $\rho$ 非单位表示时 $\sum_g \rho(g) = 0$. 以下是两种方法.

(a) 观察到算子 $T := \sum_{g\in G} \rho(g)$ 满足 $\forall g,\ \rho(g)T = T$. 因此 $Tv$ 对所有 $v \in V$ 都是 $V$ 中的 $G$-不变向量, 故题设导致 $Tv = 0$.

(b) 常值函数 1 是平凡表示的一个矩阵元, 对任何 $v \in V$ 和 $\check{v} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$, 记 $\langle \check{v}, v\rangle := \check{v}(v) \in \mathbb{C}$; 表示矩阵元的正交关系 (见 [BAIII, §3.4 (5)]) 给出

$$\sum_{g\in G} \langle \check{v}, \rho(g)v\rangle \cdot 1 = \begin{cases} 0, & \rho \text{ 非平凡表示,} \\ |G| \cdot \langle \check{v}, v\rangle & \rho \text{ 是平凡表示.} \end{cases}$$

因为 $\check{v}, v$ 可任选, 上式唯一确定了 $\sum_{g\in G} \rho(g) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. 由此容易导出原式.