北京大学
2022 年第一学期高等代数 (I) 期中考

课程号: 00132321　班号: 2　教师: 李文威

简略解答版

- 考试时间为 2022 年 10 月 27 日 08:00 — 09:50.
- 总分为 100 分.
- 符号 $1_{n\times n}$ 代表 $n\times n$ 单位矩阵, 0 或 $0_{m\times n}$ 代表零矩阵.

---

1. (20 分) 对于下列的 $v_1,\ldots,v_5\in\mathbb{Q}^4$, 求出一个极大线性无关子集.

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix},\ v_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix},\ v_5=\begin{pmatrix}2\\1\\5\\6\end{pmatrix}.$$

解答. 消元法给出矩阵的列梯形式为

$$\begin{pmatrix}1&0&3&0&1\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $\{v_1,v_2,v_4\}$, $\{v_1,v_3,v_4\}$, $\{v_1,v_2,v_5\}$, $\{v_1,v_3,v_5\}$ 都是极大线性无关子集的标准取法, 尽管不是唯一的. 任给一种即可.

2. (10 分) 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上求下列矩阵的逆矩阵:

(a) $\begin{pmatrix}1&-3&2\\-3&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$.

解答. 以消元法计算. 逆矩阵依序是 $\begin{pmatrix}1&1&3\\2&3&7\\3&4&9\end{pmatrix}$ 和 $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$.

3. (10 分) 设 F 为任意域, $A\in\mathrm{M}_{m\times n}(F)$, 证明矩阵方程 $AXA=A$ 总有解 $X\in\mathrm{M}_{n\times m}(F)$. **提示.** 将 A 左乘或右乘一个可逆矩阵不影响解的存在性.

解答. 化约到 $A=\begin{pmatrix}1_{r\times r}&0\\0&0\end{pmatrix}$ 的情形, $r=\mathrm{rk}(A)$.

4. (10 分) 考虑域 F 上的分块对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 1_{n_1 \times n_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\lambda_r 1_{n_r \times n_r}} \end{pmatrix}$$

留白部分为零, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in F$ 两两相异, $n_i \geq 1$ 而 $n_1 + \cdots + n_r = n$. 确定所有满足

$$AB = BA$$

的 $n \times n$ 矩阵 B.

解答. 将 B 按照和 A 相同的规格分块, 则

$$AB = \left(\begin{array}{ccc} \lambda_1 B_{11} & \cdots & \lambda_1 B_{1r} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline \lambda_r B_{r1} & \cdots & \lambda_r B_{rr} \end{array}\right), \quad BA = \left(\begin{array}{ccc} \lambda_1 B_{11} & \cdots & \lambda_r B_{1r} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline \lambda_1 B_{r1} & \cdots & \lambda_r B_{rr} \end{array}\right).$$

因此 $AB = BA$ 等价于 $\lambda_i B_{ij} = \lambda_j B_{ij}$. 由于 $i \neq j$ 蕴涵 $\lambda_i \neq \lambda_j$, 此时 $B_{ij} = 0_{n_i \times n_j}$. 综上可见 $AB = BA$ 等价于 B 分块对角.

5. (20 分) 选定 $n \geq 1$. 考虑实数域 $\mathbb{R}$ 上的 $n \times n$ 矩阵 $P = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. 如果 P 满足

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1,$$

则称之为 Markov 矩阵. 如果 $\mathbb{R}$ 上的 n 维列向量 $X = (x_i)_{i=1}^n$ 满足 $x_i \geq 0$ 和 $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, 则称 X 为概率向量.

(i) 证明 P 是 Markov 矩阵当且仅当

$$X \text{ 是概率向量} \implies PX \text{ 是概率向量}.$$

(ii) 证明如果 X 是概率向量, P 是 Markov 矩阵, 而且对所有 i, j 都有 $p_{ij} > 0$, 则 PX 是各个坐标皆 > 0 的概率向量.

(iii) 证明 Markov 矩阵的乘积仍然是 Markov 矩阵.

(iv) 设 P 是 Markov 矩阵. 证明存在列向量 $X \neq 0$ 使得 $PX = X$.
提示. 等价于证明 $P - 1_{n \times n}$ 不可逆.

解答. (i) 如果 P 是 Markov 矩阵而 X 是概率向量, 则 PX 的第 i 个坐标是 $\sum_{j=1}^n p_{ij} x_j \geq 0$, 这些坐标的和为 $\sum_i \sum_j p_{ij} x_j = \sum_j \left(\sum_i p_{ij}\right) x_j = \sum_j x_j = 1$. 反之设 P 映概率向量为概率向量, 则 P 的列向量 $Pe_1, \ldots, Pe_n$ 都是概率向量, 故 P 是 Markov 矩阵.

(ii) 从 (i) 知 PX 是概率向量, 而因为 $x_1, \ldots, x_n$ 不全为 0, 故 PX 的第 i 个坐标 $\sum_{j=1}^n p_{ij} x_j > 0$.

(iii) 可以直接计算, 或应用 (i) 的刻画.

(iv) 按 Markov 矩阵的定义, $(1 \cdots 1) P = (1 \cdots 1)$, 亦即 $(1 \cdots 1)(P - 1_{n \times n})$ 是零行向量, 所以 $P - 1_{n \times n}$ 不可逆. 但这又说明存在列向量 $X \neq 0$ 使得 $(P - 1_{n \times n}) X$ 为零列向量.

6. (15 分) 设 F 为有限域, 其元素个数记为 q. 请将以下问题的答案用 q 来表达.

(i) 确定有限集 $\left\{ \begin{array}{l|l} \text{向量组 } (v_1, \ldots, v_m) & \text{线性无关} \\ \in \underbrace{F^n \times \cdots \times F^n}_{m \text{ 份}} & \end{array} \right\}$ 的元素个数, 其中 $1 \leq m \leq n$.

(ii) 确定 F 上的 $n \times n$ 可逆矩阵的个数.

(iii) 确定 F^n 有几个 m 维子空间, 其中 $1 \leq m \leq n$.

如果答案涉及连乘积或商, 不必展开或化简.

解答. (i) 对于 v_1 有 $q^n - 1$ 种选法 (排除零向量), 对于 v_2 有 $q^n - q$ 种选法 (排除 v_1 的倍数), 对于 v_3 有 $q^n - q^2$ 种选法 (排除 v_1, v_2 的线性组合), 依此类推可得 $\prod_{k=0}^{m-1}(q^n - q^k)$.

(ii) 给定 F 上的 $n \times n$ 可逆矩阵相当于给定线性无关的 $v_1, \ldots, v_n \in F^n$, 因此个数是 $\prod_{k=0}^{n-1}(q^n - q^k)$.

(iii) 任何 m 维子空间都有有序基 $w_1, \ldots, w_m \in F^n$, 而且有序基的个数由 (i) 确定 (另一种观点: 有序基和 $m \times m$ 可逆矩阵一样多, 因为 $(w_i)_{i=1}^m, (w'_i)_{i=1}^m$ 确定相同的子空间当且仅当它们通过一个 $m \times m$ 可逆矩阵来转换, 此矩阵的取法是唯一的). 简单的计数遂说明 m 维子空间的个数是

$$\frac{\text{线性无关的 } (w_i)_{i=1}^m \text{ 的个数}}{m \times m \text{ 可逆矩阵的个数}} = \prod_{k=0}^{m-1} \frac{q^n - q^k}{q^m - q^k} = \prod_{k=0}^{m-1} \frac{q^{n-k} - 1}{q^{m-k} - 1}.$$

当然, 上式还可以进一步简化或展开.

7. (15 分) 记 H 为所有函数 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 对函数加法和乘法构成的 $\mathbb{R}$-向量空间, 变元记为 x. 证明 H 的元素 $(\sin x)^{1898}, \ldots, (\sin x)^{2022}$ 线性无关.

解答. 方法多种. 譬如假设有线性关系式 $\sum_{k=1898}^{2022} p_k (\sin x)^k$, 则因为多项式 $\sum_k p_k X^k$ 若非零则至多只有 124 个根, 而正弦函数可以取无穷多个值, 故必有 $\forall k,\ p_k = 0$.

北京大学
2022 年第一学期高等代数 (I) 期末考
A 卷

课程号: 00132321　班号: 2　教师: 李文威

简略解答版

- 考试时间为 2022 年 12 月 20 日 08:30 — 10:30.
- 总分为 100 分.
- 矩阵 A 的转置记为 ${}^tA$. 方阵 A 的行列式记为 $\det A$ 或 $|A|$, 迹记为 $\mathrm{Tr}(A)$.
- 证明中可以使用课堂上讲过的性质.

---

1. (10 分) 设 A 是 $n\times n$ 整系数矩阵. 说明 A 可逆而且 A^{-1} 也是整系数矩阵的充要条件是 $\det A = \pm 1$.

解答. 使用 Cramer 法则和 det 的乘性.

2. (10 分) 计算以下 $n\times n$ 矩阵的 n 次幂:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

其中留白部分为 0.

解答. 将矩阵写成 $\lambda\cdot 1_{n\times n} + U$. 描述 U 的所有幂次, 再以二项式定理展开 $(\lambda\cdot 1_{n\times n}+U)^n$ 可得

$$\begin{pmatrix} \lambda^n & \lambda^{n-1}\binom{n}{1} & \cdots & \lambda^2\binom{n}{n-2} & \lambda\binom{n}{n-1} \\ & \lambda^n & \lambda^{n-1}\binom{n}{1} & \cdots & \lambda^2\binom{n}{n-2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda^n & \lambda^{n-1}\binom{n}{1} \\ & & & & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

3. (15 分) 以简单的公式表达以下 n 阶行列式 $(n\geq 2)$, 并给出证明:

$$\begin{vmatrix} \cos x & 1 & & & & & \\ 1 & 2\cos x & 1 & & & & \\ & 1 & 2\cos x & \ddots & & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & & \ddots & 2\cos x & 1 \\ & & & & & 1 & 2\cos x \end{vmatrix}$$

其中留白部分为 0.

解答. 答案是 $\cos(nx)$. 用 $\cos(nx) = \cos(n-1)x \cdot 2\cos x - \cos(n-2)x$ 和数学归纳法, 按照最后一行或最后一列来展开.

4. (20 分) 设 F 为域, $x_i, y_j \in F$ 为 $2n$ 个两两相异的元素 $(1 \leq i, j \leq n)$.

(i) 考虑 n 阶方阵 $C_n = \left(\frac{1}{x_i - y_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$, 证明

$$\det C_n = \prod_{1\leq i,j\leq n} (x_i - y_j)^{-1} \prod_{1\leq i<j\leq n} (x_j - x_i) \prod_{1\leq i<j\leq n} (y_i - y_j).$$

(ii) 大致地写下 C_n 的逆.

解答. (i) 是 Cauchy 的一则结果. 用数学归纳法. 先从第 $1, \ldots, n-1$ 列减掉第 n 列, 从每行每列提出公因式, 再从第 $1, \ldots, n-1$ 行减掉第 n 行, 然后继续提出公因式. 最后的产物是

$$\frac{\prod_{r=1}^{n-1}(y_r - y_n)}{\prod_{r=1}^{n}(x_r - y_n)} \frac{\prod_{r=1}^{n-1}(x_n - x_r)}{\prod_{r=1}^{n-1}(x_n - y_r)} \det C_{n-1}.$$

对于 (ii), 代入 Cramer 法则可知 C_n^{-1} 的 (p, q) 项是

$$(-1)^{p+q} \prod_{1\leq i,j\leq n}{}' (x_i - y_j) \prod_{1\leq i<j\leq n}{}' (x_j - x_i)^{-1} \prod_{1\leq i<j\leq n}{}' (y_i - y_j)^{-1},$$

这里 $\prod'$ 代表连乘积中只取涉及 $i = q$ 或 $j = p$ 的项.

5. (15 分) 设 $A_1, \ldots .A_k$ 为域 F 上的 $n \times n$ 矩阵, 证明若 $A_i A_j = A_j A_i$ 对所有 $1 \leq i, j \leq k$ 成立, 而且每个 A_i 都能在 F 上对角化, 则存在 $n \times n$ 可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}A_1P, \ldots, P^{-1}A_kP$ 都是对角矩阵. 这时我们说 P 将 $A_1, \ldots, A_k$ 同步对角化.

提示. 先说明以下事实: 若一个线性映射可对角化, 则它限制到任何不变子空间上也可对角化.

解答. 对 k 行归纳. 将 F^n 分解为 A_1 的特征子空间的直和 $V_1 \oplus \cdots \oplus V_h$. 说明 $A_2, \ldots, A_k$ 保持每个 V_i 不变, 从而它们在每个 V_i 上可以同步对角化; 这里用到可对角化映射在不变子空间上也能对角化这一事实.

6. (15 分) 设 A 是 $n\times n$ 实对称矩阵, 扼要地说明存在常数 $c \geq 0$ 使得 $|{}^t v \cdot A \cdot v| \leq c \cdot {}^t v \cdot v$ 对所有列向量 $v \in \mathbb{R}^n$ 成立.

解答. 一种解释是命 $\|v\| := \sqrt{{}^t v \cdot v}$, 考虑连续映射

$$\begin{aligned} \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| = 1\} &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ v &\mapsto \frac{|{}^t v \cdot A \cdot v|}{\|v\|^2}. \end{aligned}$$

由于左侧是紧的, 此映射有界. 此外, 所求不等式在 v 的伸缩之下不变.

7. (15 分) 证明 $n \times n$ 实对称矩阵 A 正定的充要条件是存在可逆实对称矩阵 C 使得 $A = C^2$.

解答. 作正交对角化

北京大学
2022 年第一学期高等代数 (I) 期末考 – B 卷

课程号: 00132321　班号: 2　教师: 李文威

简略解答版

- 考试时间为 2022 年 12 月 20 日 08:30 — 10:30.
- 总分为 100 分.
- 矩阵 A 的转置记为 ${}^tA$. 方阵 A 的行列式记为 $\det A$ 或 $|A|$, 迹记为 $\mathrm{Tr}(A)$.
- 证明中可以使用课堂讲过的知识.

---

1. (20 分) 计算以下行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ 1 & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \cdots & \binom{n+1}{2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \binom{n}{n-1} & \binom{n+1}{n-1} & \cdots & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix}$$

其中 $\binom{a}{b}$ 代表二项式系数 $\frac{a!}{b!(a-b)!}$.

解答. 应用 Pascal 等式 $\binom{a+1}{b} - \binom{a}{b} = \binom{a}{b-1}$, 从第 $n, \ldots 2$ 列减去它们左边的列, 得到

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n}{n-2} & \cdots & \binom{2n-3}{n-2} \end{vmatrix}$$

对第 $n, \ldots, 3$ 列作类似的操作, 最终能化为对角线为 1 的下三角行列式. 答案是 1.

2. (20 分) 记函数 f 的导数为 f' 或 $\frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,t}$. 设 $a_{ij}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是可微函数 $(1 \leq i, j \leq n)$. 说明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{i1}(t) & \cdots & a'_{in}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

解答. 代入行列式的定义 $\sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_i a_{i,\sigma(i)}(t)$, 以 Leibniz 律求导.

3. (20 分) 设 $n \times n$ 矩阵 A 的第 (i,j) 元素为 $\min\{i,j\}$. 证明 A 所对应的二次型正定.

解答. 以初等方法计算 A 的行列式为 1. 同理, 顺序主子式全为 1, 故正定.

4. (20 分) 设 A 和 B 为 $n \times n$ 复矩阵, $AB = BA$ 而 $B^n = 0_{n\times n}$. 证明 A 和 $A+B$ 有相同的特征多项式.

解答. 一种思路是考虑 $\mathbb{C}^n$ 的子空间 $\ker(B)$, 它非零, 对 A 作用不变, 故存在 $v_1 \neq 0$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $Av_1 = \lambda v_1$ 而 $Bv_1 = 0$. 将 v_1 扩充为 $\mathbb{C}^n$ 的基 $v_1, \ldots, v_n$. 命 $P = (v_1|\cdots|v_n)$, 则有

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0_{(n-1)\times 1} & A' \end{pmatrix}, \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0_{(n-1)\times 1} & B' \end{pmatrix}$$

其中的 $A', B' \in \mathrm{M}_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{C})$ 仍符合题设. 按此用数学归纳法论证.

5. (20 分) 对于域 F 上的向量空间 V, 线性映射 $L : V \to F$ 也称为 V 上的一次型或线性型. 观察到 $L^2 : v \mapsto L(v)^2$ 是 V 上的二次型. 今考虑 $\mathbb{R}$-向量空间 $V = \mathbb{R}^n$.

(i) 设实二次型 f 可以表成 $f_+ - f_-$, 其中 $f_\pm$ 都是半正定二次型, f_+ 的正惯性指数为 p 而 f_- 的正惯性指数为 q. 证明 f 的正惯性指数 $\leq p$, 负惯性指数 $\leq q$.
提示. 说明 $\mathbb{R}^n$ 的任何 $p+1$ 维子空间都含某个非零元 v 使得 $f(v) \leq 0$, 按此来控制正惯性指数.

(ii) 证明若实二次型 f 可以表成

$$f = L_1^2 + \cdots + L_p^2 - L_{p+1}^2 - \cdots - L_{p+q}^2$$

其中 $L_1, \ldots, L_{p+q}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一次型, $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 则 f 的正惯性指数 $\leq p$, 负惯性指数 $\leq q$.

解答. 设 f 的正惯性指数为 p', 则从规范形的写法可见存在 p' 维子空间 $U' \subset V$ 使得 f 在 U' 上正定. 同理, 存在 $n-p$ 维子空间 U 使得 f_+ 在 U 上半负定. 假若 $p' > p$ 则

$$\dim U \cap U' = \dim U + \dim U' - \dim(U + U') > p + (n-p) - n = 0;$$

取其中的非零向量 v 便有 $0 < f(v) \leq f_+(v) \leq 0$, 矛盾.