北京大学
2022–2023 学年第二学期高等代数 (II) 期中考

课程号: 00132323　班号: 3　教师: 李文威

简略解答版

- 考试时间为 2023 年 4 月 18 日 10:10 — 12:00.
- 总分为 100 分.
- 符号 $\mathrm{M}_{m\times n}(F)$ 代表域 F 上的所有 $m\times n$ 矩阵所成集合.
- 矩阵 A 的转置记为 ${}^tA$, 而 ${}^*A := {}^t\overline{A}$.

---

1. (15 分) 设 f 为整系数多项式. 证明若存在相异整数 $a, b, c \in \mathbb{Z}$ 使得 $|f(a)| = |f(b)| = |f(c)| = 1$, 则 f 无整数根.

解答. 若 f 有整数根 x, 则 $f = (X - x)g$, 其中 $g \in \mathbb{Z}[X]$. 由此可得

$$|a - x| = |b - x| = |c - x| = 1.$$

容易说明此无可能.

2. (20 分) 写下域 $\mathbb{F}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上所有次数 ≤ 4 的不可约首一多项式.

提示. 次数为 3 的有 2 个, 次数为 4 的有 3 个.

解答 (无过程). 一次: $1+X$, X. 二次: $1+X+X^2$, 三次: $1+X+X^3$, $1+X^2+X^3$, 四次: $1+X+X^4$, $1+X+X^2+X^3+X^4$, $1+X^3+X^4$.

3. (15 分) 设 $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. 试证:

(i) 设可逆矩阵 $S \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ 具有极分解 $S = RV$ (其中 R 对称正定, V 正交), 使得 $AS = SB$ 而且 ${}^tSA = B\,{}^tS$, 则 $AV = VB$.

提示. R 可表为 $R^2 = S\,{}^tS$ 的多项式.

解答. 用 $R^2 = S\,{}^tS$ 证明 $AR^2 = R^2A$, 由此配合提示来说明 $AR = RA$, 继而推导出 $AV = VB$.

至于提示本身的论证, 由正交对角化可以假定 R 为对角元全正的对角矩阵, 然后用插值法找出多项式 f 使得 $R = f(R^2)$.

(ii) 设 $U \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ 满足 $AU = UB$, 将 U 按实部和虚部分解为 $U = C + iD$, 则 $AC = CB$ 而 $AD = DB$.

解答. 直接计算.

(iii) 若存在酉矩阵 $U \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ 使得 $B = U^{-1}AU$, 则存在正交矩阵 $V \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ 使得 $B = V^{-1}AV$.

解答. 首先推导 $AU = UB$ 和 ${}^tUA = B\,{}^tU$. 用之前结果可知 $S := C + sD \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ 对所有 $s \in \mathbb{R}$ 都满足 $AS = SB$ 和 ${}^tSA = B\,{}^tS$, 而且除了有限个 s, 它总是可逆 (因为代入 $X = i$ 可见 $\det(C + XD)$ 不是零多项式). 代入 (i) 以得出 V.

4. (20 分) 设 H_1, H_2 为 Hermite $n\times n$ 矩阵, H_1 和 H_2 皆正定. 证明如果 $H_1 - H_2$ 正定, 则 $H_2^{-1} - H_1^{-1}$ 正定.

取可逆矩阵 C 使得 ${}^*CH_1C = 1_{n\times n}$, 则 ${}^*C(H_1-H_2)C = 1_{n\times n} - {}^*CH_2C$ 正定, 而

$$C^{-1}\left(H_2^{-1} - H_1^{-1}\right){}^*C^{-1} = ({}^*CH_2C)^{-1} - 1_{n\times n},$$

所以问题简化到 $H_1 = 1_{n\times n}$ 的情形. 进一步对作酉对角化, 可以化到 $H_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 情形, $\lambda_i \in \mathbb{R}_{>0}$. 最后观察到

$$1 - \lambda_i > 0 \implies \lambda_i^{-1} - 1 > 0.$$

5. (15 分) (Cholesky 分解) 证明所有正定 Hermite 矩阵 $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ 都能写成 $A = {}^*BB$ 的形式, 其中 B 是上三角矩阵, B 的对角元素全为正.

解答. 先用正定 Hermite 矩阵的对角化定理将 A 分解为 ${}^*CC$ 的形式, C 可逆. Gram–Schmidt 正交化给出分解 $C = QR$, 其中 Q 是酉矩阵, R 上三角可逆, 故 $A = {}^*RR$. 回忆 Gram–Schmidt 正交化的写法, 可见 R 的对角线上都是正数 (细节略).

6. (15 分) 计算以下实矩阵的奇异值分解 $A = Q\Sigma\,{}^tP$:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}.$$

此处 P, Q 为正交矩阵, Σ 为对角元为 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0$ 的对角矩阵.

解答. 利用奇异值分解的构造. 先计算 $B := {}^tAA = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$, 故

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

将 B 对角化为 Σ 的单位正交基为 $v_1 = {}^t(0,1)$ 和 $v_2 = {}^t(1,0)$. 于是

$$w_1 = \frac{1}{10}Av_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \frac{1}{5}Av_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

故

$$P = (v_1|v_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = (w_1|w_2) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

北京大学

2022–2023 学年第二学期高等代数 (II) 期末考

课程号: 00132323　班号: 3　教师: 李文威

简略解答版

- 考试时间为 2023 年 6 月 13 日 08:30 — 10:30.
- 总分为 100 分.
- 域 F 的特征记为 $\mathrm{char}(F)$. 符号 $\mathrm{M}_{m\times n}(F)$ 代表域 F 上的所有 $m \times n$ 矩阵所成集合, $\mathrm{GL}(n, F)$ 代表所有 $n \times n$ 可逆矩阵所成集合, $\mathrm{SL}(n, F) := \{g \in \mathrm{GL}(n, F) : \det g = 1\}$. 符号 $1_{n\times n}$ 代表 $n \times n$ 单位矩阵.

---

1. (20 分) 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上求以下矩阵的有理标准形:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

解答: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

2. (15 分) 求以下矩阵的 Jordan 标准形.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解答: 都是幂零矩阵, 描述非平凡的 Jordan 块的尺寸即可.

(a) 一个 2×2 的 Jordan 块.

(b) 两个 2×2 的 Jordan 块.

(c) 一个 3×3 的 Jordan 块.

3. (20 分) 设 $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ 的特征值全为 1, 而 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. 证明 A^k 与 A 共轭.

解答: 不失一般性, 可设 A 为单个 Jordan 块. 容易算出 A^k 的次对角线是 $k, \ldots, k$ (共 $n-1$ 项). 因为 $A^k - 1_{n\times n}$ 映

$$e_i \mapsto \begin{cases} ke_{i-1} + \sum_{j<i-1} \mathbb{C}e_j, & i > 1 \\ 0, & i = 1. \end{cases}$$

按此易见 $A^k - 1_{n\times n}$ 的幂零指数为 n, 故 A^k 只有一个 Jordan 块, 对应的特征值为 1.

4. (15 分) 设 $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

(i) 证明存在唯一的 $S, U \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 使得 $A = SU = US$, 而且 S 可对角化, $U - 1_{n\times n}$ 幂零.

(ii) 说明若 $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, 则 S 和 U 是 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 的元素.

(iii) 说明 (i) 中的 S 和 U 都可以表为 A 的多项式.

提示. 可用多项式的中国剩余定理: 设 f_1, f_2 互素, 则 $\mathbb{C}[X]/(f_1 f_2) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X]/(f_1) \times \mathbb{C}[X]/(f_2)$, 映 $g \bmod (f_1 f_2)$ 为 $(g \bmod (f_i))_{i=1}^{2}$.

解答: (i) 关于存在性, 先化到 A 是特征值为 λ 的 Jordan 块的情形, 然后取 $S = \lambda \cdot 1_{n\times n}$. 所需条件显然成立.

关于唯一性, 先将 S 对角化, 相异特征值记为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, 则 S 的每个特征子空间 $V_1, \ldots, V_m$ 都是 A-不变子空间. 记 $A_i := A|_{V_i}$ 而 $U_i := \lambda_i^{-1} A_i = U|_{V_i}$. 于是 U_i 的特征值都是 1. 将 U_i 化到标准形, 易见 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 无非 A 的特征值, 而 V_i 是 A 的广义特征子空间. 按此可从 A 唯一确定 S 和 U.

(ii) 设 $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. 在 $\mathbb{C}$ 中取唯一分解 $A = SU$, 取复共轭给出 $A = \overline{A} = \overline{S}\,\overline{U}$. 复共轭不改变 S 和 U 的性质, 故唯一性导致 $\overline{S} = S$ 而 $\overline{U} = U$.

(iii) 基于 (i) 的论证, 反复运用提示可取到 f 使得 $f(A)$ 在 A 的广义特征子空间 V_i 上为 $\lambda_i \mathrm{id}$, 其中 $i = 1, \ldots, m$.

5. (10 分) 设 V 和 W 为实数域 $\mathbb{R}$ 上的有限维向量空间, 维数都 > 1. 说明

$$\{v \otimes w : v \in V,\ w \in W\} \neq V \otimes W.$$

提示. 选定它们的基 $(e_i)_i$ 和 $(f_j)_j$. 讨论使 $\sum_{i,j} x_{ij} e_i \otimes f_j \in V \otimes W$ 形如 $v \otimes w$ 的必要条件.

解答: 有多种说明. 一种方式是注意到 $\sum_{i,j} x_{ij} e_i \otimes f_j := (\sum_i a_i e_i) \otimes (\sum_j b_j f_j)$ 的系数是 $x_{ij} = a_i b_j$, 故 $x_{ij} x_{ji} = x_{ii} x_{jj}$, 然而 $V \otimes W$ 的一般元素 $\sum_{i,j} x_{ij} e_i \otimes f_j$ 未必满足此等式.

6. (20 分) 群 G 的中心 $Z(G)$ 定义为 $\{z \in G : \forall g \in G,\ zg = gz\}$. 设 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

(i) 设 F 为域. 证明 $Z(\mathrm{SL}(n, F)) = \{\lambda \cdot 1_{n\times n} : \lambda \in F,\ \lambda^n = 1\}$.

(ii) 设 $\mathrm{char}(F) \neq 2$. 对 $2n$ 维辛空间 (V, B) 定义辛群为

$$\mathrm{Sp}(V) := \{g :\ V \text{ 的线性自同构},\ \forall x, y \in V,\ B(gx, gy) = B(x, y)\}.$$

证明 $Z(\mathrm{Sp}(V)) = \{\pm \mathrm{id}_V\}$.

提示. 可用辛基的存在性, 以及当 $n = 1$ 时 $\mathrm{Sp}(V) \simeq \mathrm{SL}(2, F)$.

解答. (i) 直接计算以说明中心的元素形如 $\lambda \cdot \mathrm{id}$, 例如考虑与所有 $1_{n\times n} + E_{ij}$ 交换的条件 $(i \neq j)$.

(ii) 给定 $z \in Z(\mathrm{Sp}(V))$, 取辛基 $p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n$ (计顺序). 于是辛群包含形如

$$\begin{pmatrix} \pm 1_{2\times 2} & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1_{(n-1)\times(n-1)} \end{pmatrix}$$

的矩阵, 故 z 也是相应规格的分块对角矩阵, 其描述因而化约到 $n = 1$ 情形, 此时易将辛群等同于 $\mathrm{SL}(2, F)$. 因此一般情形下 z 是分块皆为 $\pm 1_{2\times 2}$ 的分块对角矩阵. 考虑置换辛基所给出的辛群元素, 可见符号必然全正或全负.