

北京大学
2024–2025 学年第二学期高等代数 (II) 期中考

课程号: 00132323 班号: 2 教师: 李文威

简略解答版

- 考试时间为 2025 年 4 月 8 日 10:10 — 12:00.
- 总分为 100 分.
- 本班课堂和作业中的结论 (包括上学期) 可直接使用.
- 符号 i 代表单位虚数, $M_{m \times n}(F)$ 代表域 F 上的 $m \times n$ 矩阵所成集合, $\mathbf{1}_{n \times n}$ 代表 $n \times n$ 单位矩阵, X 代表多项式中的变量.

-
1. (20 分) 对以下的 Hermite 矩阵 A , 求酉矩阵 P 和对角矩阵 D 使得 $P^{-1}AP = D$, 要求对角元从大到小排列.

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}.$

(b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix}.$

解答. (a) 取 $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 和 $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{6}} & \frac{-1+i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$

(b) 取 $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 和 $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$

2. (10 分) 考虑 Hamilton 定义的四元数环 $\mathbb{H}$, 以下设 $x \in \mathbb{H}$.

- (a) 确定方程 $x^2 = 2$ 的所有解.

解答. 因为 $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{H}$ 的中心, 方程可改写为 $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = 0$. 因为 $\mathbb{H}$ 是除环, 故唯一解为 $x = \pm\sqrt{2}$.

- (b) 确定方程 $x^2 = -2$ 的所有解.

解答. 命 $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$, 原方程改写为 $y^2 = -1$, 其解已知为所有满足 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 的 $y = ai + bj + ck \in \mathbb{H}$, 其中 $a, b, c \in \mathbb{R}$ (作业内容, 不难用共轭和范数的性质推导), 故原方程的解为

$$x = ai + bj + ck, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 2.$$

3. (10 分) 考虑 $L = A + iB \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, 其中 A 和 B 都是 Hermite 矩阵. 设 A 正定.

- (a) 证明 $|\det L| \geq \det A$.

(b) 承上, 确定等号成立的充要条件.

解答. 取可逆的 P 使得 ${}^t P A P = \mathbf{1}_{n \times n}$. 论证取 ${}^t P(\cdots)P$ 不影响欲证不等式, 从而化到 $A = \mathbf{1}_{n \times n}$ 的特例. 对 ${}^t L L = (\mathbf{1}_{n \times n} - iB)(\mathbf{1}_{n \times n} + iB) = \mathbf{1}_{n \times n} + B^2$ 两边取行列式并对 B 作酉对角化 (对角元为实数) 可得不等式, 同时得知等号成立当且仅当 $B = \mathbf{0}_{n \times n}$.

4. (15 分) 设 $n \geq 2$. 考虑 n 次多项式

$$f = \prod_{i=1}^n (X - t_i) = X^n - e_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^n e_n,$$

其中 $t_1, \dots, t_n$ 是 n 个变量而 $e_1, \dots, e_n$ 是相应的初等对称多项式. 对称多项式基本定理表明判别式 $\text{disc}(f) = \prod_{i < j} (t_i - t_j)^2$ 唯一地表作 $e_1, \dots, e_n$ 的多项式, 或者说 $\text{disc}(f)$ 可视同 n 元多项式环 $\mathbb{Q}[e_1, \dots, e_n]$ 的元素. 证明 $\text{disc}(f)$ 是 $\mathbb{Q}[e_1, \dots, e_n]$ 的不可约元.

解答. 注意到 $\mathbb{Q}[e_1, \dots, e_n]$ 是 $\mathbb{Q}[t_1, \dots, t_n]$ 的子环. 当 $i \neq j$ 时 $t_i - t_j$ 是 $\mathbb{Q}[t_1, \dots, t_n]$ 的不可约元, 而不同的 $\{i, j\}$ 对应的不可约元互不等价. 设有 $\mathbb{Q}[e_1, \dots, e_n]$ 中的分解 $\text{disc}(f) = f_1 f_2$ 使得 $\deg f_1, \deg f_2 > 0$, 则因为 $\mathbb{Q}[t_1, \dots, t_n]$ 是唯一分解整环, 存在 $c_1, c_2 \in \mathbb{Q}^\times$ 和无交并分解

$$\{(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 : i \neq j\} = P_1 \sqcup P_2, \quad P_1, P_2 \neq \emptyset,$$

使得 $f_k = c_k \prod_{(i,j) \in P_k} (t_i - t_j)$ 对 $k = 1, 2$ 成立. 兹断言: 对于所有 $1 \leq i \neq j \leq n$, 必有 $(i, j) \in P_1$ 或 $(j, i) \in P_1$.

存在 $(i_0, j_0) \in P_1$. 显然存在置换 σ 使得 $\sigma(i_0) = i$ 而 $\sigma(j_0) = j$. 既然 P_1 是关于 $t_1, \dots, t_n$ 的对称多项式, 同样由唯一分解性可得 $(i, j) \in P_1$ 或 $(j, i) \in P_1$. 断言得证

对于 P_2 也有同样性质. 由此易见

$$f_1 = \pm c_1 \prod_{i < j} (t_i - t_j), \quad f_2 = \pm c_2 \prod_{i < j} (t_i - t_j).$$

但 $\prod_{i < j} (t_i - t_j)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不是关于 $t_1, \dots, t_n$ 的对称多项式 (对换导致变号). 矛盾.

5. (20 分) 判断以下有理系数多项式是否可约 (不必过程).

(a) $2X^4 - X^3 + 2X - 3$.

解答. 有根 $X = 1$, 故可约.

(b) $-7X^4 + 25X^2 - 15X + 10$.

解答. 应用 Eisenstein 判准 (取 $p = 5$) 说明它不可约.

(c) $X^4 + X^2 + 1$.

解答. 有因式分解 $(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$ 故可约.

(d) $X^4 + 4X + 1$.

解答. 记此多项式为 f , 则 $f(X + 1) = X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 8X + 6$, 然后应用 Eisenstein 判准 (取 $p = 2$) 说明它不可约.

6. (10 分) 证明如果 $\mathbf{A} \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 的特征多项式 $\text{Char}_{\mathbf{A}}$ 是整系数多项式, 则 $\text{Char}(\mathbf{A}^p)$ 对所有正整数 p 也都是整系数多项式.

解答. 设 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (计重数). 基于复方阵的上三角化可见

$$\text{Char}_{\mathbf{A}^p} = X^n - e_1(\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p)X^{n-1} + \dots + (-1)^n e_n(\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p);$$

若将 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 视为变元, 则这些系数对所有 p 都是整系数对称多项式, 因此能表作 $e_1(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \dots, e_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 的整系数多项式; 但这在代值后无非是 $\text{Char}_{\mathbf{A}}$ 的系数.

7. (15 分) 试判断并给出简要理由:

- (a) 引入符号 ∞ , 将实数的加法按照 $x + \infty = \infty = \infty + x$ 延拓为集合 $\mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$ 上的二元运算, 它是否构成群?

解答. 否. 它是以 0 为幺元的么半群, 但关于 ∞ 的加法定义导致 ∞ 无逆元.

- (b) 考虑群 $\text{GL}(n, \mathbb{R}) := \{\mathbf{A} \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : \text{可逆}\}$, 以矩阵乘法为二元运算; 对于一般的 n , 所有正定对称的 $\mathbf{A} \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ 是否构成 $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ 的子群?

解答. 否. 正定对称矩阵的乘积未必对称.

- (c) 将 $\mathbb{R}^3$ 中的所有旋转 (保持原点不动) 构成的群记为 $\text{SO}(3)$. 对所有子群 $H \subset \text{SO}(3)$ 记 $gHg^{-1} := \{ghg^{-1} : h \in H\}$. 哪些有限子群 H 满足 $\forall g \in \text{SO}(3), gHg^{-1} \subset H$?

解答. 只有 $H = \{\text{id}\}$, 因为如果 $\sigma \neq \text{id}$ 的转轴是 $\pm \mathbf{v}$, 其中 $\mathbf{v}$ 是单位向量, 则 $g\sigma g^{-1}$ 的转轴是 $\pm g\mathbf{v}$, 因此 $H \neq \{\text{id}\}$ 若满足 $\forall g, gHg^{-1} \subset H$ 则包含所有 $\pm$ 单位向量作为其元素的转轴.

北京大学
2024–2025 学年第二学期高等代数 (II) 期末考

课程号: 00132323 班号: 2 教师: 李文威

简略解答版

- 考试时间为 2025 年 6 月 10 日 08:30 — 10:30, 总分为 100 分.
- 本班课堂和作业中的结论 (包括上学期) 可直接使用.
- 符号 $\text{char}(F)$ 代表域 F 的特征, $F[X, Y, \dots]$ 代表 F 上以 $X, Y, \dots$ 为变量的多项式环, $M_{m \times n}(F)$ 代表 F 上的 $m \times n$ 矩阵所成集合, $\mathbf{1}_{n \times n}$ 代表 $n \times n$ 单位矩阵.
- 符号 $J_n(\lambda)$ 代表特征值为 λ 的 $n \times n$ Jordan 块; $n \times n$ 矩阵的共轭和相似是同义词. 有理标准形的不变因子是一列满足 $f_1 \mid f_2 \mid \dots$ 的首一多项式.

-
1. (20 分) 举例说明存在群 G_1 和 G_2 , 使得 $|G_1| = |G_2| = 6$ 但 G_1 和 G_2 互不同构.

解答. 循环群 $G_1 = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ 和置换群 $G_2 = \mathfrak{S}_3$ 都恰有 6 个元素, 但 G_1 交换, 而 G_2 非交换 (例如有 $(12)(123) = (23) \neq (13) = (123)(12)$).

2. (10 分) 对主理想环 R 判断以下陈述是否成立: 如果 R -模 A 的所有真子模 $A' \subsetneq A$ 都是有限生成的, 则 A 也是有限生成的; 正确概述理由, 错误概述反例.

解答. 否. 一种反例是取 $R = \mathbb{Z}$, 相当于考虑交换群. 考虑 $\mathbb{C}^\times$ 中所有 2^n 次单位根, $n = 0, 1, 2, \dots$; 它们对乘法构成的交换群 A 并非有限生成的. 由于在 A 中 $\text{ord}(a_1) \leq \text{ord}(a_2) \iff a_1 \in \langle a_2 \rangle$, 对子群 $A' \subset A$ 定义

$$m(A') := \sup_{a' \in A'} \text{ord}(a'),$$

则 $m(A') = +\infty \iff A' = A$. 因此在 $A' \subsetneq A$ 的前提下, 取 $a' \in A'$ 使得 $\text{ord}(a') = m(A')$, 则必有 $A' = \langle a' \rangle$.

3. (20 分) 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上, 求下列矩阵的有理标准形, 并列出其不变因子 (不需过程):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

解答. 对 $X \cdot \mathbf{1}_{3 \times 3} - A$ 计算 Smith 标准形, 可得有理标准形为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

不变因子恰有一个, 是 $X^3 - 3X^2 + 3X - 1$.

4. (10 分) 举例说明存在复矩阵 $A, B \in M_{4 \times 4}(\mathbb{C})$ 使得极小多项式满足 $\text{Min}_A = \text{Min}_B$, 特征多项式满足 $\text{Char}_A = \text{Char}_B$, 然而 A 和 B 不共轭.

解答. 例如可取 A 使其不变因子为 $X \mid X \mid X^2$, 取 B 使其不变因子为 $X^2 \mid X^2$. 它们的极小多项式都是 X^2 , 特征多项式都是 X^4 .

5. (20 分) 对非零多项式 $f = \sum_{a,b} c_{ab} X^a Y^b \in \mathbb{C}[X, Y]$, 命 $\deg f = \max\{a + b : c_{ab} \neq 0\}$, 另命 $\deg 0 = -\infty$. 设 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. 考虑复向量空间 $V := \{f \in \mathbb{C}[X, Y] : \deg f \leq n\}$. 以 $T(f) = \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial Y}$ 定义线性映射 $T : V \rightarrow V$, 求其 Jordan 标准形.

解答. 给定 $f \in \mathbb{C}[X, Y]$, 存在唯一的 $g \in \mathbb{C}[X, Y]$ 使得 $f(X, Y) = g\left(\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2}\right)$, 办法是取 $g(X, Y) = f(X+Y, X-Y)$; 易见 $f \mapsto g$ 是 V 的线性自同构, 用链式法则求导可见 T 对应到 $T' : g \mapsto \frac{\partial g}{\partial X}$. 对所有 $0 \leq k \leq n$ 定义 $V_k = (\mathbb{C}[X]_{\deg \leq n-k})Y^k$. 论证 $T'|_{V_k}$ 是幂零指数为 $n-k+1$ 的幂零算子, 故其 Jordan 块为 $J_{n-k+1}(0)$. 综之, T 的 Jordan 块为 $J_1(0), J_2(0), \dots, J_{n+1}(0)$.

6. (10 分) 选定素数 p . 设 F 是满足 $\text{char}(F) = p$ 的域, V 是以 $v_1, \dots, v_p$ 为基的 F -向量空间. 定义线性映射 $T : V \rightarrow V$ 使得

$$Tv_i = \begin{cases} v_{i+1}, & 1 \leq i < p \\ v_1, & i = p. \end{cases}$$

说明 $\text{Char}_T \in F[X]$ 分裂为一次因式之积, 但 T 不可对角化.

解答. 在这组基之下, T 对应于 $X^p - 1$ 给出的友矩阵. 因为 $\text{char}(F) = p$, 它分裂为 $(X-1)^p$. 另一方面, 由于矩阵的不变因子是 $(X-1)^p$, 故仅有一个特征值为 1 的 $p \times p$ 的 Jordan 块, 不可对角化.

7. (10 分) 设 V 为域 F 上的 n 维向量空间, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 而 $T : V \rightarrow V$ 是线性映射. 试以 T 的迹 $\text{Tr}(T)$ 和行列式 $\det(T)$ 表达以下的量 (不需过程):

- (a) $\text{Tr}(T^{\otimes k})$, 其中 $k \geq 1$ 而 $T^{\otimes k} = T \otimes \dots \otimes T : V^{\otimes k} \rightarrow V^{\otimes k}$;
(b) $\det(T \otimes T)$.

解答. (a) 选定 V 的基 $v_1, \dots, v_n$, 设 $Tv_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}v_i$, 则

$$T^{\otimes k}(v_{j_1} \otimes \dots \otimes v_{j_k}) = \left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 j_1} v_{i_1} \right) \otimes \dots \otimes \left(\sum_{i_k=1}^n a_{i_k j_k} v_{i_k} \right),$$

由此可见 $\text{Tr}(T^{\otimes k}) = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n} a_{j_1 j_1} \dots a_{j_k j_k} = \text{Tr}(T)^k$.

(b) 选基并取 F 的扩域后, 不妨设 $V = F^n$ 而 T 对应到上三角矩阵, 对角元记为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. 从 F^n 的标准基得到 $F^n \otimes F^n$ 的基 $\{e_i \otimes e_j\}_{1 \leq i, j \leq n}$, 赋予字典序, 则 $T \otimes T$ 对之仍是上三角的. 由此易见

$$\det(T \otimes T) = \prod_{1 \leq i, j \leq n} \lambda_i \lambda_j = \prod_{i=1}^n (\lambda_i^n \cdot \det T) = (\det T)^{2n}.$$