Université Paris Diderot (Paris 7)

École Doctorale Paris Centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Wen-Wei Li

Vers une formule des traces stable pour le groupe métaplectique

---

dirigée par Jean-Loup Waldspurger

Soutenue le 5 juillet 2011 devant le jury composé de :

M. Henri Carayol	Université de Strasbourg	Rapporteur
M. Jean-François Dat	Université Pierre et Marie Curie - Paris 6	
M. Jean-Pierre Labesse	Université Aix-Marseille II	
M. Gérard Laumon	CNRS, Université Paris-Sud - Paris 11	
M. Bao Châu Ngô	University of Chicago	Rapporteur (absent)
M. David Renard	École Polytechnique	
M. Jean-Loup Waldspurger	CNRS, Université Paris Diderot - Paris 7	Directeur

Institut de Mathématiques de Jussieu
175, rue du chevaleret
75 013 Paris

École doctorale Paris centre Case 188
4 place Jussieu
75 252 Paris cedex 05

À la mémoire de mon père.

Remerciements

Je tiens en tout premier lieu à remercier mon directeur de thèse Jean-Loup Waldspurger, qui m'a proposé ce sujet de recherche et m'a donnée des remarques très pertinentes sur quelques points techniques dans cette thèse. Sans ses encouragements constants et ses pénétrations impeccables, les résultats que l'on obtient n'auraient pas été si généraux.

Je suis reconnaissant à Henri Carayol et Ngô Bao Châu d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je remercie ensuite Jean-François Dat, Jean-Pierre Labesse, Gérard Laumon et David Renard qui m'ont fait l'honneur de participer au jury. Je remercie aussi les membres de l'équipe des formes automorphes de l'Institut de Mathématiques de Jussieu, qui ont crée un environnement très favorable pour la recherche.

Grâce au programme Erasmus Mundus ALGANT, j'ai pu faire mes études de Master en Europe pendant 2006-2008. Je remercie Jean-Benoît Bost pour avoir dirigé mon mémoire M2 à l'Université Paris-Sud, ainsi que Bas Edixhoven et Gerrit van Dijk pour leurs aides lorsque j'étudiais à l'Université Leiden aux Pays-Bas. Certes, je voudrais aussi dire merci aux professeurs taïwanais I-Hsun Tsai, Chia-Fu Yu et Jin Yu, qui m'ont encouragé d'étudier en Europe.

Certaines idées cruciales dans cette thèse m'arrivaient aux moments où j'étais à la Bibliothèque nationale de France, site F. Mitterand. Je remercie tous les personnels et usagers de ce lieu qui ont crée, quoiqu'inconsciemment, un atmosphère qui m'inspirait beaucoup.

J'ai eu des des discussion enrichissantes avec beaucoup de professeurs, pour en citer quelques-uns : Wee Teck Gan, Volker Heiermann, Atsushi Ichino, Tamotsu Ikeda, Peter McNamara, Shu-Yen Pan et David Renard, auxquels je remercie chaleureusement. Les discussions parfois non mathématiques avec Arno Kret, Gang Liu, Shoumin Liu, Shijie Qiu et Chun-hui Wang m'ont aussi été très intéressantes. J'en remercie tous ces amis.

Vient à présent le moment pour remercier mes colocataires chez la Place du Petit Pont d'Alfortville, notamment Feng Sha et Yuanyuan Zhu, ainsi que Junfeng Zhang qui est d'un genre rare parmi les propriétaires parisiens. Enfin, je remercie de tout mon cœur ma mère pour son support constant pendant ces années.

Résumé

Résumé

Cette thèse se compose de deux parties, quatre chapitres. Dans le Chapitre I, on établit un formalisme d'endoscopie du groupe métaplectique $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n)$. On prouve le transfert d'intégrales orbitales et le lemme fondamental. Dans le Chapitre II on énonce et prouve le lemme fondamental pondéré à la Arthur pour le groupe métaplectique sous l'hypothèse du lemme fondamental pondéré non standard. Dans le Chapitre III, on se propose d'étudier la formule des traces d'Arthur-Selberg pour une classe assez générale de revêtements des groupes réductifs connexes, y compris $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n)$. On établit la formule des traces grossière et le développement fin géométrique pour ces revêtements. Dans le Chapitre IV, on aborde le côté spectral de la formule des traces en étudiant des résultats de l'analyse harmonique locale. En particulier, on établit la formule des traces locale invariante pour les revêtements.

Mots-clefs groupe métaplectique, endoscopie, transfert, le lemme fondamental, la formule des traces.

Towards a stable trace formula for the metaplectic group

Abstract

This thesis consists of two parts and four chapters. In Chapter I, we establish a formalism of endoscopy for the metaplectic group $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n)$. We prove the transfer of orbital integrals and the fundamental lemma. In Chapter II, we state and prove a variant of Arthur's weighted fundamental lemma for metaplectic groups, which is conditional upon the nonstandard weighted fundamental lemma. In Chapter III, we consider the Arthur-Selberg trace formula for a quite general class of covers of connected reductive groups, including $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n)$. We establish the unrefined trace formula and the refined geometric expansion. In Chapter IV, we attack the spectral side of the trace formula by studying some results of local harmonic analysis. In particular, we establish the invariant local trace formula for covers.

Keywords metaplectic group, endoscopy, transfer, fundamental lemma, trace formula.

Table des matières

Présentation générale

Les formes modulaires de poids entier s'interprètent en termes de représentations automorphes de groupes réductifs connexes. Dans ce contexte, le programme de Langlands prédit des liens profonds entre les représentations automorphes, les représentations galoisiennes et les motifs. Il relie aussi les représentations entre des groupes différents, ce qui s'appelle le principe de fonctorialité. L'un des outils essentiels pour ces problèmes est la formule des traces d'Arthur-Selberg. Afin d'appliquer la formule des traces, un problème central est sa stabilisation.

D'autre part, la théorie classique contient également les formes de poids demi-entier. Elles s'interprètent en termes de représentations automorphes de certains revêtements des points adéliques de groupes réductifs connexes. Pour les formes modulaires de Siegel de poids demi-entier, le revêtement en question est $\mathbf{p} : \widetilde{\mathrm{Sp}}(2n) \to \mathrm{Sp}(2n)$, où $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n)$ est le groupe métaplectique étudié par A. Weil [89]. Malgré son importance, le formalisme de Langlands ne s'appliquait pas mot à mot à $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n)$ car il n'est pas algébrique, et les définitions de L-groupes et stabilité n'étaient pas claires. Par ailleurs, la formule des traces des revêtements n'est jamais écrite de façon sérieuse. Vu les progrès récents sur la formule des traces stable, ces problèmes semblent enfin abordable.

Cette thèse se compose de deux parties, quatre articles en tant que chapitres. La première partie est consacrée à l'endoscopie du groupe métaplectique, et la deuxième partie aborde la formule des traces d'Arthur-Selberg pour une classe assez générale de revêtements. Donnons un survol des contenus de chaque chapitre. Une introduction détaillée se trouve au début de chaque chapitre.

Partie 1 : Le groupe métaplectique

I. Transfert d'intégrales orbitales pour le groupe métaplectique Dans ce chapitre, on propose un formalisme de l'endoscopie pour le groupe métaplectique, qui s'inspire beaucoup des travaux d'Adams [2] et de Renard [71]. On démontre ensuite le transfert d'intégrales orbitales et le lemme fondamental pour l'unité de l'algèbre de Hecke sphérique anti-spécifique. Grosso modo, le groupe dual de $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n)$ est $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$; cela suggère que $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n)$ est étroitement lié au groupe $\mathrm{SO}(2n+1)$ déployé, un fait connu depuis longtemps. Cependant, le formalisme proposé ici et l'étude du lemme fondamental pondéré dans le Chapitre II suggèrent une différence cruciale : on doit remplacer $Z_{\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})} = \{1, -1\}$ par le groupe trivial dans le formalisme.

La démonstration du transfert et du lemme fondamental sont basées sur la descente de Harish-Chandra. Cette méthode nous ramène à la situation sur l'algèbre de Lie. On applique ensuite les résultats de Ngô [67], à savoir l'endoscopie standard et non standard sur l'algèbre de Lie. Le noyau dur mais élémentaire dans ce chapitre est la descente du facteur de transfert.

II. Le lemme fondamental pondéré pour le groupe métaplectique Pour des applications arithmétiques, il faudra stabiliser tous les termes de la formule des traces. Donc il faut une variante du lemme fondamental pondéré d'Arthur [20]. L'énoncé proposé ici est formellement similaire au cas des groupes réductifs connexes sauf qu'une "torsion" curieuse $\gamma \mapsto \gamma[s]$

intervient dans le côté endoscopique. On reprend les arguments de Waldspurger [85] pour se ramener à l'algèbre de Lie. La preuve est conditionnelle : il faut le lemme fondamental pondéré sur l'algèbre de Lie prouvé par Chaudouard et Laumon [29, 30], ainsi que le lemme fondamental pondéré non standard, qui reste encore conjectural. Néanmoins le lemme fondamental pondéré non standard est tautologique en rang 1. Le point technique et toujours élémentaire est un calcul combinatoire inspiré par les travaux d'Arthur [19].

Partie 2 : La formule des traces pour les revêtements de groupes réductifs connexes

III. Le développement géométrique fin On a déjà parlé de la formule des traces pour revêtements, au moins pour $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n)$. Dans ce chapitre on signale une classe de revêtements à étudier. Gross modo, ce sont des revêtements finis des groupes topologiques dans le cas local. Dans le cas global, on exige que (a) le groupe des points rationnels s'immerge dans le revêtement adélique, et (b) les revêtements locaux induits sont "non ramifiés" en presque toute place ; cela signifie grossièrement la commutativité de l'algèbre de Hecke sphérique anti-spécifique. Cette condition est satisfaite pour les revêtements provenant des $\mathbf{K}_2$-extensions de Brylinski-Deligne [27], ce qui incluent tous les revêtements considérés jusqu'à présent.

Pour les revêtements dans notre classe, on établit la formule des traces grossière et le développement fin de son côté géométrique. Les ingrédients dans ce développement géométrique sont des intégrales orbitales pondérées le long des bons éléments. Ici, un élément dans le revêtement est dit bon si son commutant est l'image réciproque du commutant de son image dans le groupe réductif connexe. L'argument est basé sur celui d'Arthur. La méthode de descente nous ramène au terme unipotent de la formule des traces de groupes réductifs connexes tordu par un caractère. Puisqu'une telle formule des traces n'est pas encore systématiquement traitée, on est obligé de faire une analyse détaillée dans ce cadre.

IV. Analyse harmonique locale On étudie les ingrédients locaux du côté spectral de la formule des traces. Plus précisément, on justifie la formule de Plancherel, la normalisation des opérateurs d'entrelacement, l'intégrabilité locale des caractères irréductibles admissibles, le théorème de Paley-Wiener pour les fonctions de Schwartz-Harish-Chandra, et la formule des traces locale invariante pour les revêtements. Il est tentant de penser que ces théories s'adaptent aux revêtements sans peine, or il s'avère que les modifications nécessaires ne sont pas toujours triviales.

Le but de la deuxième partie est la formule des traces invariante d'Arthur. C'est clair que ce programme est dans un état inachevé puisque l'on n'arrive pas encore au développement fin spectral. Un obstacle éventuel à surmonter est le théorème de Paley-Wiener pour les fonctions lisses $\tilde{K}$-finies à support compact [32] sur les revêtements archimédiens. Sa preuve pour les groupes réels linéaires s'appuie sur certaines propriétés de K-types minimaux [81], qui exige la commutativité des sous-groupes de Cartan. Néanmoins, cette difficulté ne se pose pas pour le groupe métaplectique $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n)$. Un projet à plus long terme est de stabiliser la formule des traces pour $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n)$.

Signalons que ces quatre chapitres sont effectivement quatre articles indépendants ; des parts sont déjà mises en ligne ou parues dans le journal, eg. [53, 54, 55]. Pour faciliter la lecture et la comparaison, on choisit consciemment des notations différentes ; par conséquent chaque chapitre a son propre index. Plus précisément, dans le Chapitre I, la notation s'inspire de [48, 84]. Dans le Chapitre II, on choisit les conventions de Waldspurger [85], qui sont compatibles avec celles d'Arthur pour la plupart. Pour le Chapitre III, on suit systématiquement le formalisme d'Arthur. Quant au Chapiter IV, on adopte le formalisme de [83] pour la formule de Plancherel, celui de

Harish-Chandra [40] pour les distributions admissibles, et celui d'Arthur pour la normalisation des opérateur d'entrelacement et pour la formule des trace locale.

Première partie

Le groupe métaplectique

Chapitre I

Transfert d'intégrales orbitales pour le groupe métaplectique

1 Introduction

La formule des traces d'Arthur-Selberg est l'un des outils les plus puissants pour la théorie moderne des formes automorphes. Cette approche est surtout féconde lorsque l'on compare les formules des traces de deux groupes réductifs. Pour ce faire, il faut mettre la formule des traces sous une forme "stable". La théorie de l'endoscopie, inventée par Langlands et ses collaborateurs, donne un plan pour résoudre ce problème pour les groupe réductifs.

D'autre part, il existe une famille de revêtements non linéaires $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, F)$ des groupes symplectiques $\mathrm{Sp}(2n, F)$ sur un corps local F, qui s'appellent les groupes métaplectiques. À un caractère additif non trivial $\psi : F \to \mathbb{S}^1$ est associée une représentation admissible ω_ψ de $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, F)$, qui s'appelle la représentation de Weil. Bien que le revêtement métaplectique soit traditionnellement un revêtement à deux feuillets, pour des raisons techniques nous ferons agrandir le revêtement métaplectique de sorte que $\mathbf{p} : \widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, F) \to \mathrm{Sp}(2n, F)$ est un revêtement à huit feuillets. Autrement dit, $\mathrm{Ker}\,(\mathbf{p}) = \mu_8 := \{z \in \mathbb{C}^\times : z^8 = 1\}$. Cela n'affecte pas les résultats que l'on cherche.

Si l'on envisage d'établir et puis de stabiliser la formule des traces pour $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, F)$, le premier pas est d'étudier le transfert local des intégrales orbitales (5.5.2). Cependant, on ne peut pas adapter littéralement la théorie de l'endoscopie car $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, F)$ n'est pas un groupe linéaire algébrique ; en particulier il n'a pas de L-groupe. L'un des objets de cet article est de mettre en place un tel formalisme.

Les représentations de $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, F)$ qui nous intéressent sont celles telles que la multiplication par chaque $\varepsilon \in \mathrm{Ker}\,(\mathbf{p}) = \mu_8$ agit par $\varepsilon \cdot \mathrm{id}$; ces représentations sont dites spécifiques. Par exemple, la représentation de Weil ω_ψ est spécifique. Pour l'étude des représentations spécifiques, il suffit de considérer les fonctions telles que $f(\varepsilon\tilde{x}) = \varepsilon^{-1} f(\tilde{x})$ pour tout $\varepsilon \in \mu_8$; ces fonctions sont dites anti-spécifiques. Ces notions se généralisent à tout revêtement. La distinction entre objets spécifiques et anti-spécifiques est superficielle pour $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, F)$ (voir 2.1.1).

Notre approche se modèle sur l'endoscopie pour les groupes réductifs. Notons $G := \mathrm{Sp}(2n)$, $\tilde{G} := \widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, F)$. Tout d'abord il faut trouver des bonnes définitions pour :

1. les groupes endoscopiques elliptiques H de $\tilde{G}$,
2. la correspondance de classes de conjugaison semi-simples entre H et G,
3. une notion de conjugaison stable sur $\tilde{G}$,
4. le facteur de transfert Δ.

Une fois que ceci sera fait, on pourra définir l'intégrale orbitale endoscopique

$$J_{H,\tilde{G}}(\gamma, f) = \sum_{\delta} \Delta(\gamma, \tilde{\delta}) J_{\tilde{G}}(\tilde{\delta}, f) \tag{I.1}$$

d'une fonction anti-spécifique f ; les notations sont analogues à celles pour l'endoscopie des groupes réductifs et on les expliquera dans §5.5. Par la suite, on peut formuler le transfert de fonctions $f \mapsto f^H$ qui fait concorder $J_{H,\tilde{G}}(\cdot, f)$ et l'intégrale orbitale stable $J_H^{\mathrm{st}}(\cdot, f^H)$ sur H. Comme pour l'endoscopie pour les groupes réductifs, le transfert doit être explicite pour les fonctions sphériques dans le cas non ramifié (5.5.3). De tels énoncés sont connus sous le nom de "lemme fondamental".

Esquissons nos réponses aux questions ci-dessus.

1. Soit F une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, $p > 2$. Selon un résultat de Savin [72], l'algèbre d'Iwahori-Hecke spécifique (ou anti-spécifique) de $\tilde{G}$ est isomorphe à l'algèbre d'Iwahori-Hecke de $\mathrm{SO}(2n+1)$, le groupe orthogonal impair déployé. Cela suggère que l'on doit regarder $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ comme le groupe dual de $\tilde{G}$; de telles évidences existent aussi pour le cas $F = \mathbb{R}$ [3]. En poursuivant cette philosophie, on définit une donnée endoscopique elliptique de $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n)$ comme une paire $(n', n'') \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ telle que $n' + n'' = n$; le groupe endoscopique associé est $H_{n',n''} := \mathrm{SO}(2n'+1) \times \mathrm{SO}(2n''+1)$. Contrairement à l'endoscopie pour $\mathrm{SO}(2n+1)$, on distingue les données (n', n'') et (n'', n').
2. Soit $\gamma = (\gamma', \gamma'') \in H_{n',n''}(F)$ semi-simple ayant valeurs propres
$$\underbrace{a'_1, \ldots, a'_{n'}, 1, (a'_{n'})^{-1}, \ldots, (a'_1)^{-1}}_{\text{provenant de } \gamma'}, \underbrace{a''_1, \ldots, a''_{n''}, 1, (a''_{n''})^{-1}, \ldots, (a''_1)^{-1}}_{\text{provenant de } \gamma''}.$$
On dit que $\delta \in G(F)$ correspond à γ s'il est semi-simple avec valeurs propres
$$a'_1, \ldots, a'_{n'}, (a'_{n'})^{-1}, \ldots, (a'_1)^{-1}, -a''_1, \ldots, -a''_{n''}, -(a''_{n''})^{-1}, \ldots, -(a''_1)^{-1}.$$
Cela induit une application entre classes de conjugaison semi-simples géométriques.
3. Il y a aussi une définition *ad hoc* de stabilité : deux éléments semi-simples réguliers dans $\tilde{G}$ sont stablement conjugués si leurs images dans $G(F)$ sont stablement conjugués et si $\mathrm{tr}\,\omega_\psi^+ - \mathrm{tr}\,\omega_\psi^-$ prend la même valeur, où $\omega_\psi^\pm$ sont les deux morceaux irréductibles de la représentation de Weil. C'est aussi la voie poursuivie dans [2, 41].
4. Le facteur de transfert est plus subtil. Lorsque $F = \mathbb{R}$ et $n'' = 0$, Adams a défini un facteur de transfert Δ sur l'ensemble des éléments semi-simples réguliers dans $\tilde{G}$ et il est égal à $\mathrm{tr}\,\omega_\psi^+ - \mathrm{tr}\,\omega_\psi^-$. Plus généralement, pour un groupe endoscopique H quelconque, le facteur de transfert est défini dans cet article comme un produit $\Delta = \Delta'\Delta''\Delta_0$, où Δ', Δ'' sont fabriqués à partir des caractères $\mathrm{tr}\,\omega_\psi^\pm$ et Δ_0 est un terme relativement simple qui est stablement invariant. Le facteur Δ_0 coïncide avec le facteur défini par Renard [71]. Il n'y a pas de facteur Δ_{IV} comme en [52], car nous avons normalisé les intégrales orbitales.

Le facteur de transfert satisfait aux propriétés suivantes.

Spécificité (5.3.4) : on exige cette propriété de sorte que l'intégrale orbitale endoscopique (I.1) est bien définie.

Propriété de cocycle (5.3.5) : c'est une condition naturelle pour l'endoscopie, qui affecte des signes aux classes de conjugaison dans une classe de conjugaison semi-simple régulière stable.

Descente parabolique (5.4.1) : cela réduit le calcul du facteur de transfert aux éléments elliptiques ; c'est aussi la principale raison pour laquelle on travaille sur le revêtement à huit feuillets.

Normalisation (5.3.7) : dans le cas non ramifié, le facteur vaut 1 pour les éléments à réductions régulières qui se correspondent.

Symétrie (5.3.8) : qui relie les facteurs de transfert pour $H_{n',n''}$ et $H_{n'',n'}$. Cette symétrie est réalisée par la multiplication par une image réciproque canonique dans $\tilde{G}$ de $-1 \in G(F)$, ce que l'on désigne encore par -1. L'usage d'un tel élément est loisible car on travaille avec le revêtement à huit feuillets.

Formule du produit (5.3.9) : elle servira à stabiliser les termes elliptiques réguliers dans la formule des traces.

Les quatre premières propriétés et la descente semi-simple caractérisent le facteur de transfert dans le cas non ramifié (cf. [37]).

Dans le cas $F = \mathbb{R}$, J. Adams [2] a établi le relèvement de caractères entre $\tilde{G}$ et $\mathrm{SO}(2n+1)$ et D. Renard [70] a démontré le transfert d'intégrales orbitales. Pour les groupes endoscopiques $H_{n',n''}$ en général, le transfert d'intégrales orbitales est établi par Renard dans le cas réel ; son formalisme paraît différent, mais il est équivalent au nôtre, pour l'essentiel. Pour F non archimédien, $n' = 1$ et $n'' = 0$, J. Schultz a établi le relèvement de caractères entre $\tilde{G}$ et $\mathrm{SO}(3)$ dans sa thèse [74].

Indiquons brièvement notre approche. À la suite de Langlands, Shelstad [50] et Waldspurger, on applique la méthode de descente semi-simple de Harish-Chandra pour réduire le transfert à l'algèbre de Lie. Le revêtement disparaît et on se ramène à des situations composées de l'endoscopie pour les groupes unitaires et symplectiques, ainsi qu'une situation "non standard" étudiée dans [84], à savoir le transfert entre les algèbres de Lie de $\mathrm{Sp}(2n)$ et $\mathrm{SO}(2n+1)$. Grâce aux travaux de Ngô Bao Châu [67], le transfert est maintenant établi dans chaque situation ci-dessus. Le noyau technique de cet article est donc de prouver que notre facteur Δ se descend en les bons facteurs aux algèbres de Lie. On demande de plus que les facteurs ainsi descendus soient normalisés dans le cas non ramifié.

Récapitulons la structure de cet article.

- Dans §2, on recueille les définitions et propriétés de base du groupe métaplectique. L'usage de cocycles est minimaliste. Il y a aussi des discussions de revêtements non linéaires en général.
- Dans §3, on paramètre explicitement les classes de conjugaison dans les groupes classiques. La classification est bien connue. Remarquons que notre convention diffère de celle de [82] (voir 3.3.6). Faute d'avoir une référence complète, on y reproduit toutes les démonstrations.
- Dans §4, on rappelle les formules du caractère de la représentation de Weil dues à Maktouf [59] en suivant l'approche de T. Thomas [79]. Leurs approches reposent sur le modèle de Schrödinger du groupe métaplectique. Ces formules servent aussi à caractériser le scindage au-dessus d'un parabolique de Siegel (4.1.7). Pour traiter le cas non ramifié, il faudra aussi étudier le caractère via le modèle latticiel.
- Dans §5, les fondations de l'endoscopie sont mises en place. On établit aussi des résultats utiles pour les articles qui feront suite.
- La section §6 traite le transfert archimédien. On réconcilie le formalisme de Renard avec le nôtre. On prouve que nos facteurs de transfert coïncident et le transfert archimédien en résulte.
- La section §7 est consacrée à la descente semi-simple. La descente des termes Δ', Δ'' repose sur des formules de Maktouf et le calcul de l'indice de Weil de la forme de Cayley (4.3.4). D'autre part, la descente du terme Δ_0 est une manipulation des symboles locaux et des formes quadratiques.
- La section §8 reprend les arguments pour l'endoscopie des groupes réductifs (cf. [84]) ; on établit le transfert non archimédien et le lemme fondamental pour les unités par la

méthode de descente.
Dans §6-§7, on travaillera avec le revêtement métaplectique à $\mathbf{f}$ feuillets avec $8|\mathbf{f}$. Dans §8, on supposera $\mathbf{f} = 8$.

Enfin, signalons un autre formalisme de l'endoscopie pour $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n)$ proposé par Renard dans [71] pour le cas $F = \mathbb{R}$. Grosso modo, les données endoscopiques elliptiques sont toujours en bijection avec les paires $(n', n'') \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ telles que $n' + n'' = n$, mais les groupes endoscopiques sont $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n') \times \widetilde{\mathrm{Sp}}(2n'')$. Le facteur de transfert est Δ_0. Nous étudierons une variante de ce formalisme en détail dans §6, dont les définitions marchent dans le cas non archimédien sans modification. En particulier, on peut parler du transfert d'intégrales orbitales à la Renard.

Remarquons que l'on peut déduire le transfert à l'aide du transfert à la Renard composé avec le transfert de $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2k)$ vers $\mathrm{SO}(2k+1)$ (associé à la paire $(k, 0)$) pour $k = n'$ et $k = n''$. Vu la définition du facteur de transfert $\Delta = \Delta' \Delta'' \Delta_0$, cette approche paraît raisonnable. En effet, le transfert pour $F = \mathbb{R}$ sera démontré de cette façon dans §6. Réciproquement, si l'on peut montrer que chaque intégrale orbitale stable sur $\mathrm{SO}(2m+1)$ provient de $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2m)$ via transfert, alors le transfert à la Renard résulte de notre formalisme. On espère revenir un jour sur cette question.

Conventions

On note $\mathbb{S}^1$ le groupe $\{z \in \mathbb{C}^\times : |z| = 1\}$. Si $\mathbf{f} \in \mathbb{Z}$, on note $\mu_{\mathbf{f}}$ le groupe $\{z \in \mathbb{C}^\times : z^{\mathbf{f}} = 1\}$. Si A est une algèbre centrale semi-simple de dimension finie sur un corps F, on note la trace et la norme réduite par $\mathrm{tr}_{A/F}$ et $N_{A/F}$ respectivement.

Corps locaux Soit F un corps local non archimédien, on note $\mathfrak{o}_F$ l'anneau des entiers, $\mathfrak{p}_F$ l'idéal maximal de $\mathfrak{o}_F$ et ϖ_F une uniformisante choisie. On prend toujours la valuation v sur F telle que $v(\varpi_F) = 1$. Le conducteur d'un caractère additif $\psi : F \to \mathbb{S}^1$ non-trivial est le plus grand sous $\mathfrak{o}_F$-module $\mathfrak{a}$ de F tel que $\psi|_{\mathfrak{a}} = 1$. Le symbole de Hilbert quadratique pour le corps local F est noté par $(\cdot, \cdot)_F$. Le groupe de Galois absolu de F est noté Γ_F.

Groupes réductifs Soit F un corps et M un F-groupe réductif. La composante connexe de M est notée M^0. Soit R une F-algèbre commutative, on note l'ensemble de R-points de M par $M(R)$. Lorsque M est un groupe classique, on confond systématiquement $M(F)$ et M.

Supposons que M agit algébriquement sur une F-variété X. Pour $x \in X(F)$, on note $M^x \subset M$ son fixateur et $M_x := (M^x)^0$. Par exemple, M agit sur lui-même par conjugaison et on obtient ainsi les commutants.

Supposons M connexe et soit $m \in M(F)$. La classe de conjugaison contenant m est notée $\mathcal{O}(m)$. On dira que $m_1, m_2 \in M(F)$ sont géométriquement conjugués s'ils sont conjugués par $M(\bar{F})$. La classe de conjugaison géométrique contenant $m \in M(F)$ est notée par $\mathcal{O}^{\mathrm{geo}}(m)$. L'ensemble de classes de conjugaison (resp. conjugaison géométrique) semi-simples dans M est noté par $\mathscr{C}_{\mathrm{ss}}(M)$ (resp. $\mathscr{C}^{\text{géo}}_{\mathrm{ss}}(M)$). L'ensemble des éléments semi-simples dans $M(F)$ est noté $M(F)_{\mathrm{ss}}$. On dira qu'un élément $m \in M(F)_{\mathrm{ss}}$ est régulier si M_m est un tore, on dira qu'il est fortement régulier si de plus $M^m = M_m$. L'ouvert de Zariski des éléments semi-simples réguliers dans M est noté M_{reg}.

Soient $m_1, m_2 \in M(F)_{\mathrm{ss}}$, on dira qu'ils sont stablement conjugués s'il existe $x \in M(\bar{F})$ tel que $x^{-1} m_1 x = m_2$ et $x\sigma(x)^{-1} \in M_{m_1}(\bar{F})$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. La classe de conjugaison stable contenant m est notée par $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(m)$; l'ensemble de classes de conjugaison stable semi-simples dans M est notée par $\mathscr{C}^{\mathrm{st}}_{\mathrm{ss}}(M)$. Si m est fortement régulier, alors $\mathcal{O}^{\mathrm{geo}}(m) = \mathcal{O}^{\mathrm{st}}(m)$. On dit qu'une fonction ϕ est stablement invariante si $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(x) = \mathcal{O}^{\mathrm{st}}(y)$ implique $\phi(x) = \phi(y)$.

Éléments compacts Soit F un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p. Soient M un F-groupe réductif connexe et $\delta \in M(F)$. On dit que δ est compact si l'ensemble $\delta^{\mathbb{Z}}$ est d'adhérence compacte dans $M(F)$. On dit que δ est topologiquement unipotent si $\lim_{n\to\infty} \delta^{p^n} = 1$. Soit $X \in \mathfrak{m}(F)$, notons T le plus grand F-tore central dans le commutant de sa partie semi-simple X_s. On dit que X est topologiquement nilpotent si $|x^*(X_s)|_F < 1$ pour tout $x^* \in X^*(T)$. Si p est assez grand (voir [84] 4.4 pour une borne explicite), l'exponentielle fournit un homéomorphisme de l'ensemble des éléments topologiquement nilpotents sur l'ensemble des éléments topologiquement unipotents. Tout élément compact δ admet une décomposition de Jordan topologique $\delta = \exp(X)\eta = \eta \exp(X)$, où X est topologiquement nilpotent et η est d'ordre fini premier à p. Cette décomposition est unique, η et $\exp(X)$ appartiennent à l'adhérence de $\delta^{\mathbb{Z}}$. Les détails se trouvent, par exemple, dans [84] 5.2.

Formes quadratiques Dans ce texte, on ne considère que les formes quadratiques non dégénérées. Soient A un anneau commutatif avec $\frac{1}{2}$ et $a_1, \ldots, a_m \in A^\times$, on note $\langle a_1, \ldots, a_m \rangle$ la A-forme quadratique sur A^m définie par

$$(x_1, \ldots, x_m) \mapsto a_1 x_1^2 + \ldots a_m x_m^2.$$

On note par $\mathbb{H}$ la forme hyperbolique de rang 2. On abrège souvent une forme quadratique (V, q) par q. Si F est un corps local et q est une F-forme quadratique, on note $\det q$ le déterminant de q et $s(q)$ l'invariant de Hasse de q. On note la somme orthogonale des formes q_1 et q_2 par $q_1 \oplus q_2$. Pour un caractère additif non-trivial $\psi : F \to \mathbb{S}^1$ et une F-forme quadratique q, notons $\gamma_\psi(q)$ l'indice de Weil défini dans [89]. Il induit un homomorphisme du groupe de Witt $W(F)$ vers μ_8.

2 Le groupe métaplectique

2.1 Revêtements de groupes réductifs

Soient F un corps local et $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Soient M un F-groupe algébrique et $\mathbf{p} : \tilde{M} \to M(F)$ une extension centrale de groupes topologiques telle que $\mathrm{Ker}\,(\mathbf{p}) \simeq \mu_m$; on l'appelle un revêtement à m feuillets. Il y a une notion naturelle d'équivalence pour de tels revêtements. Le groupe $\tilde{M}$ est localement compact. De plus, il est totalement discontinu si F est non archimédien. Nous fixons toujours une identification $\mathrm{Ker}\,(\mathbf{p}) = \mu_m$.

Supposons M réductif. Soit P un sous-groupe parabolique défini sur F dont U est le radical unipotent. Alors il existe un unique scindage $s : U(F) \to \tilde{M}$ pour $\mathbf{p}$, qui est invariant par conjugaison par $P(F)$ ([66], appendice A).

Objets spécifiques Soit $C_c^\infty(\tilde{M})$ l'algèbre des fonctions lisses à support compact sur $\tilde{M}$, munie du produit de convolution. Il y a une décomposition

$$C_c^\infty(\tilde{M}) = \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Hom}(\mu_m, \mathbb{C}^\times)} C_{c,\chi}^\infty(\tilde{M})$$

selon l'action par translation par μ_m. Idem pour l'espace des fonctions de Schwartz $\mathcal{S}(\tilde{M})$ lorsque F est archimédien.

Soit $\chi \in \mathrm{Hom}(\mu_m, \mathbb{C}^\times)$. Une fonction dans $C_{c,\chi}^\infty(\tilde{M})$ (resp. $\mathcal{S}_\chi(\tilde{M})$) est dite χ-équivariante. Ceci permet de définir la notion de distributions χ-équivariantes. Une représentation π de $\tilde{M}$ est dite χ-équivariante si $\pi|_{\mu_m}$ est une somme de χ. Le caractère d'une représentation de $\tilde{M}$, pourvu qu'il soit bien défini, est χ-équivariante si et seulement si sa représentation l'est.

Notons $\chi_- : \mu_m \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$ le plongement standard. Pour $\chi = \chi_-$ (resp. $\chi = \chi_-^{-1}$), les objets χ-équivariants sont abrégés comme spécifiques (resp. anti-spécifiques). Les objets spécifiques (resp. anti-spécifiques) sont affectés de l'indice $-$ (resp. $\text{-}\text{-}$). Par exemple, on définit les espaces $C^\infty_{c,-}(\tilde{M})$ et $C^\infty_{c,\text{-}\text{-}}(\tilde{M})$. Lorsque F est archimédien, on définit de la même manière les espaces $\mathcal{S}_-(\tilde{M})$ et $\mathcal{S}_{\text{-}\text{-}}(\tilde{M})$.

Pousser-en-avant Soit $m|m'$. On peut pousser-en-avant l'extension centrale $1 \to \mu_m \to \tilde{M} \to M(F) \to 1$ via $\mu_m \hookrightarrow \mu_{m'}$ et on obtient ainsi un revêtement à m'-feuillets $\mathbf{p}' : \tilde{M}' \to M(F)$. On le note aussi par $\tilde{M}' = \tilde{M} \times_{\mu_m} \mu_{m'}$. La restriction de $\tilde{M}'$ à $\tilde{M}$ identifie les objets spécifiques sur $\tilde{M}'$ à ceux sur $\tilde{M}$ (par exemple les fonctions, les représentations etc...). De même pour les objets anti-spécifiques.

Tout revêtement que l'on rencontrera dans cet article provient d'un revêtement à deux feuillets. Indiquons un passage entre objets spécifiques et anti-spécifiques dans telles situations.

Proposition 2.1.1. *Soient $m \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\mathbf{p} : \tilde{M} \to M(F)$ un revêtement à deux feuillets et $\tilde{M}' := \tilde{M} \times_{\mu_2} \mu_m$. Alors il existe un caractère continu $\xi : \tilde{M}' \to \mu_{m/2}$ tel que $\xi([\tilde{m}, \boldsymbol{\varepsilon}]) = \boldsymbol{\varepsilon}^{-2}$.*

L'application $\pi \mapsto \pi \otimes \xi$ est une bijection des représentations spécifiques sur les représentations anti-spécifiques. L'application $f \mapsto f\xi$ induit un isomorphisme d'algèbres $C^\infty_{c,-}(\tilde{M}') \xrightarrow{\sim} C^\infty_{c,\text{-}\text{-}}(\tilde{M}')$; elle induit un isomorphisme $\mathcal{S}_-(\tilde{M}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_{\text{-}\text{-}}(\tilde{M}')$ si F est archimédien.

Démonstration. On vérifie que ξ est bien défini et continu. Le reste en résulte immédiatement. $\square$

Remarque 2.1.2. On aura parfois besoin de considérer $\tilde{M}' := \tilde{M} \times_{\mu_m} \mathbb{C}^\times$, qui est une extension de $M(F)$ par $\mathbb{C}^\times$. Les définitions ci-dessus sont pareilles pour $\tilde{M}'$ et on a toujours ladite équivalence entre objets spécifiques/anti-spécifiques.

Si F est un corps global et $\mathbb{A}$ son anneau d'adèles, alors les terminologies précédentes s'adaptent aux revêtements de $M(k)$ où k est une sous-algèbre de $\mathbb{A}$ munie de la topologie induite.

Nous adoptons systématiquement la convention de désigner un élément dans $\tilde{M}$ par $\tilde{m}$, etc., et sa projection dans $M(F)$ par m, etc.

2.2 La représentation de Weil et le groupe métaplectique local

Soit F un corps local de caractéristique nulle. On fixe un caractère additif non trivial $\psi : F \to \mathbb{S}^1$.

Soient $n > 0$ et $(W, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un F-espace symplectique de dimension $2n$. On supprime souvent la forme $\langle\cdot|\cdot\rangle$ quand on parle d'un tel espace.

Le groupe de Heisenberg $H(W)$ associé à $(W, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ est l'espace $W \times F$ muni du produit

$$(w, t) \cdot (w', t') = \left(w + w', t + t' + \frac{\langle w|w'\rangle}{2} \right).$$

Le centre de $H(W)$ est $\{0\} \times F \simeq F$, on l'identifie à F.

Notons $\mathrm{Sp}(W)$ le groupe symplectique associé à $(W, \langle\cdot|\cdot\rangle)$. Il agit sur $H(W)$ par

$$g \cdot (w, t) = (g(w), t).$$

Le théorème de Stone-von Neumann affirme qu'il existe une et une seule représentation lisse irréductible (ρ_ψ, S_ψ) de $H(W)$ de caractère central ψ, à isomorphisme près. De plus, une telle représentation est admissible et unitarisable.

Soit $g \in \mathrm{Sp}(W)$. La représentation

$$\rho_\psi^g : h \mapsto \rho_\psi(g \cdot h)$$

vérifie encore les propriétés du théorème de Stone-von Neumann, d'où un opérateur d'entrelacement $M[g] : S_\psi :\to S_\psi$ tel que

$$M[g] \circ \rho_\psi = \rho_\psi^g \circ M[g].$$

L'opérateur $M[g]$ est unique à une constante multiplicative près, donc $g \mapsto M[g]$ est un homomorphisme $\mathrm{Sp}(W) \to \mathrm{PGL}(S_\psi)$. Si l'on remplace (ρ_ψ, S_ψ) par sa version unitaire, on peut supposer que $M[g]$ est une isométrie.

Posons

$$\overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W) := \{(g, M) \in \mathrm{Sp}(W) \times \mathrm{GL}(S_\psi) : M \circ \rho_\psi = \rho_\psi^g \circ M\}.$$

Cela fournit une extension centrale de $\mathrm{Sp}(W)$ par $\mathbb{C}^\times$ et $\overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W)$ admet une structure naturelle de groupe localement compact ([89], §35). Notons $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W)$ le groupe dérivé de $\overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W)$.

Si $F = \mathbb{C}$, le revêtement $\mathbf{p} : \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W) \to \mathrm{Sp}(W)$ est scindé et on identifie $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W)$ à $\mu_2 \times \mathrm{Sp}(W)$; sinon, p est l'unique revêtement non trivial à deux feuillets de $\mathrm{Sp}(W)$. C'est pourquoi nous avons supprimé l'indice ψ. La représentation de Weil attachée à ψ est la composée $\omega_\psi : \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W) \hookrightarrow \overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W) \to \mathrm{GL}(S_\psi)$. Elle se décompose en deux morceaux non-isomorphes irréductibles, l'un dit pair $(+)$ et l'autre impair $(-)$:

$$\omega_\psi = \omega_\psi^+ \oplus \omega_\psi^-,$$

où les représentations $\omega_\psi^\pm$ sont admissibles et unitarisables. Cela permet de définir ses caractères comme distributions spécifiques sur $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W)$.

Soit $\mathbf{f} \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$. Posons

$$\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W) := \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W) \times_{\mu_2} \mu_{\mathbf{f}}.$$

Notons le revêtement $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W) \to \mathrm{Sp}(W)$ par la même lettre p. On obtient ainsi une famille de revêtements indexée par $2\mathbb{Z}_{\geq 1}$ telle que $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W) \subset \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f}')}(W)$ si et seulement si $\mathbf{f}|\mathbf{f}'$. Regardons $\omega_\psi^\pm$ comme représentations spécifiques sur les $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W)$. Idem pour leurs caractères.

Dans le cas $F = \mathbb{C}$, on a un scindage canonique $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W) \simeq \mu_{\mathbf{f}} \times \mathrm{Sp}(W)$. Dans le cas trivial $W = \{0\}$, nos définitions entraînent que $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W) = \mu_{\mathbf{f}}$.

2.3 Sous-groupes et réseaux hyperspéciaux

Supposons que F est non archimédien de caractéristique résiduelle $p > 2$. Soit $L \subset W$ un $\mathfrak{o}_F$-réseau, on définit son réseau dual comme

$$L^* := \{w \in W : \forall m \in L,\ \langle w|m\rangle \in \mathfrak{o}_F\}.$$

Un réseau L dans W est dit autodual si $L^* = L$. De tels réseaux existent toujours.

Théorème 2.3.1. *Si L est un réseau dans W tel que $L^* = L$ ou $L^* = \mathfrak{p}_F L$, alors $K_L := \mathrm{Stab}_{\mathrm{Sp}(W)}(L)$ est un sous-groupe hyperspécial de $\mathrm{Sp}(W)$. Cela fournit une correspondance biunivoque entre les sous-groupes hyperspéciaux et les réseaux L tels que $L^* = L$ ou $L^* = \mathfrak{p}_F L$.*

Un tel réseau L détermine un modèle de $\mathrm{Sp}(W)$ sur $\mathfrak{o}_F$. On définit le réseau hyperspécial dans $\mathfrak{sp}(W)$ associé à L par $\mathfrak{k}_L := \mathfrak{sp}(W, \mathfrak{o}_F)$. Si l'on remplace $\langle\cdot|\cdot\rangle$ par $\varpi_F\langle\cdot|\cdot\rangle$ alors cela a pour effet d'échanger les réseaux L avec $L^* = L$ et ceux avec $L^* = \varpi_F L$, à homothéthie près ; pourtant $\mathrm{Sp}(W)$ ne change pas.

Observons aussi que $\mathrm{Sp}(W)$ agit transitivement sur les réseaux autoduaux. Nous avons fixé une forme symplectique $\langle\cdot|\cdot\rangle$ sur W, cela a l'effet de distinguer une classe de conjugaison canonique de sous-groupes hyperspéciaux de $\mathrm{Sp}(W)$, à savoir ceux associés aux réseaux autoduaux. On ne considère que des tels sous-groupes hyperspéciaux dans cet article.

2.4 Modèles de la représentation de Weil

Nous donnerons deux constructions pour la représentation (ρ_ψ, S_ψ) et les opérateurs d'entrelacement $M[g]$ dans les définitions précédentes. Commençons par une construction générale.

Soit $A \subset W$ un sous-groupe tel que $A_F := A \times F$ est un sous-groupe abélien maximal dans $H(W)$; ceci est équivalent à $A = A^\perp$ où $A^\perp := \{w \in W : \forall a \in A,\ \psi(\langle a, w\rangle) = 1\}$. Puisque $A_F/(\{0\} \times \mathrm{Ker}\,(\psi))$ est abélien, il existe un caractère $\psi_A : A_F \to \mathbb{S}^1$ qui prolonge $1 \times \psi$ sur $\{0\} \times F$. On définit

$$(\rho_A, S_A) := \mathrm{Ind}_{A_F}^{H(W)}(\psi_A).$$

Théorème 2.4.1. (ρ_A, S_A) *est une représentation lisse irréductible de caractère central* ψ.

Le modèle de Schrödinger

Les détails se trouvent dans [78, 79].

Un sous-espace $\ell \subset W$ est dit un lagrangien dans W si ℓ est totalement isotrope de dimension maximale pour $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Notons $\mathrm{Lagr}(W)$ l'ensemble des lagrangiens dans W.

Dans la construction ci-dessus, prenons pour $A = \ell \in \mathrm{Lagr}(W)$. Dans ce cas-là $\ell_F = \ell \times F$ comme groupes topologiques, et on peut prendre $\psi_\ell = 1 \times \psi$. Soit (ρ_ℓ, S_ℓ) la représentation ainsi obtenue. On fixe une mesure de Haar sur ℓ et on prend la mesure autoduale sur W par rapport à $\psi(\langle\cdot|\cdot\rangle)$. La représentation (ρ_ℓ, S_ℓ) s'identifie à l'espace des vecteurs lisses de l'induite compacte $\mathrm{ind}_{\ell_F}^{H(W)}(\psi_\ell)$.

Soit ℓ' un autre lagrangien muni d'une mesure de Haar. P. Perrin a défini un opérateur d'entrelacement canonique

$$\mathscr{F}_{\ell',\ell} : S_\ell \to S_{\ell'}.$$

C'est essentiellement une transformation de Fourier partielle convenablement normalisée.

Soit $g \in \mathrm{Sp}(W)$, alors on obtient une isométrie par transport de structures :

$$g_* : S_\ell \to S_{g\ell}.$$

Définissons

$$M_\ell[g] := \mathscr{F}_{\ell,g\ell} \circ g_* = g_* \circ \mathscr{F}_{g^{-1}\ell,\ell}.$$

On vérifie que $(g, M_\ell[g]) \in \overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W)$. Grosso modo, la représentation $\tilde{\omega}_\psi$ sur $\overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W)$ ne peut pas être définie sur $\mathrm{Sp}(W)$ car $\mathscr{F}_{\ell'',\ell'} \circ \mathscr{F}_{\ell',\ell}$ n'est pas égale à $\mathscr{F}_{\ell'',\ell}$, mais diffère par un nombre complexe de module 1 ($\ell, \ell', \ell'' \in \mathrm{Lagr}(W)$ quelconques). Pour expliciter cette obstruction, récapitulons des propriétés de l'indice de Maslov telle qu'elles sont énoncées par T. Thomas [78].

Étant donnés $\ell_1, \ldots, \ell_m \in \mathrm{Lagr}(W)$ ($m \geq 3$), On définit une F-forme quadratique $\tau(\ell_1, \ldots, \ell_m)$. Elle s'appelle l'indice de Maslov. Soit $[\tau(\ell_1, \ldots, \ell_m)]$ sa classe dans le groupe de Witt $W(F)$; cette classe satisfait aux propriétés suivantes.

1. **Invariance symplectique**. Pour tout $g \in \mathrm{Sp}(W)$,
$$\tau(\ell_1, \ldots, \ell_m) \simeq \tau(g\ell_1, \ldots, g\ell_m).$$
2. **Additivité symplectique**. Soient W_1, W_2 deux F-espaces quadratiques et $W := W_1 \oplus W_2$. Si $\ell_1, \ldots, \ell_m \in \mathrm{Lagr}(W_1)$ et $\ell'_1, \ldots, \ell'_m \in \mathrm{Lagr}(W_2)$, alors
$$\tau(\ell_1 \oplus \ell'_1, \ldots, \ell_m \oplus \ell'_m) \simeq \tau(\ell_1, \ldots, \ell_m) \oplus \tau(\ell'_1, \ldots, \ell'_m).$$
3. **Symétrie diedrale**.
$$\tau(\ell_1, \ldots, \ell_m) \simeq \tau(\ell_2, \ldots, \ell_m, \ell_1),$$
$$[\tau(\ell_1, \ldots, \ell_m)] = -[\tau(\ell_m, \ldots, \ell_1)].$$
4. **Condition de chaîne**. Pour tout $3 \leq k < m$, on a
$$[\tau(\ell_1, \ldots, \ell_m)] = [\tau(\ell_1, \ldots, \ell_k)] + [\tau(\ell_1, \ell_k, \ldots, \ell_m)].$$

Dans le cas $m = 3$, l'espace $\tau(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ est Witt équivalent à l'indice de Maslov défini par Kashiwara [57]. Vu la condition de chaîne, cela détermine $[\tau(\ell_1, \ldots, \ell_m)] \in W(F)$ pour $m \geq 3$ quelconque. La dimension de τ est aussi calculée :

Proposition 2.4.2 ([78])**.** *Regardons les lagrangiens $\ell_1, \ldots, \ell_m$ comme indexés par $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Alors :*
$$\dim \tau(\ell_1, \ldots, \ell_m) = \frac{(m-2)\dim W}{2} - \sum_{i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \dim(\ell_i \cap \ell_{i+1}) + 2 \dim \bigcap_{i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \ell_i.$$

Théorème 2.4.3 (G. Lion, P. Perrin)**.** *Soient $\ell_1, \ldots, \ell_m \in \mathrm{Lagr}(W)$ $(m \geq 3)$. Alors*
$$\mathscr{F}_{\ell_1,\ell_m} \circ \cdots \circ \mathscr{F}_{\ell_2,\ell_1} = \gamma_\psi(-\tau(\ell_1, \ldots, \ell_m)) \cdot \mathrm{id}_{S_{\ell_1}}.$$

Corollaire 2.4.4. *Soit $\ell \in \mathrm{Lagr}(W)$, alors pour tout $x, y \in \mathrm{Sp}(W)$ on a*
$$M_\ell[x] \cdot M_\ell[y] = \gamma_\psi(\tau(\ell, y\ell, xy\ell)) M_\ell[xy].$$

On en déduit un scindage au-dessus d'un sous-groupe parabolique de Siegel.

Proposition 2.4.5. *Soit $\ell \in \mathrm{Lagr}(W)$. Notons P_ℓ le sous-groupe de $\mathrm{Sp}(W)$ qui stabilise ℓ, alors $\sigma_\ell : x \mapsto (x, M_\ell[x])$ fournit un scindage de $\mathbf{p} : \overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W) \to \mathrm{Sp}(W)$ au-dessus de $P_\ell(F)$.*

Démonstration. Vu la définition de la topologie sur $\overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W)$ ([89], §35), la continuité de σ_ℓ est immédiate. Il suffit que $\tau(\ell, x\ell, xx'\ell) = 0$ pour tous $x, x' \in P_\ell(F)$. Or dans ce cas $\tau(\ell, x\ell, xx'\ell) = \tau(\ell, \ell, \ell)$, et 2.4.2 montre que sa dimension est zéro. □

Définition 2.4.6. L'élément $\sigma_\ell(-1)$ dans $\overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W)$ est central d'ordre 2. Il s'envoie sur -1 dans $\mathrm{Sp}(W)$. On le note abusivement par -1. Cette convention sera justifiée par le fait qu'elle ne dépend pas de ℓ (2.4.7) et qu'elle est compatible avec tout scindage de p dont nous ferons usage (2.5.3, 4.4.2).

On abrège souvent $(-1) \cdot \tilde{x}$ par $-\tilde{x}$, pour tout $\tilde{x} \in \overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W)$. L'indépendance du choix de ℓ résulte de la proposition suivante.

Proposition 2.4.7. *L'élément $-1 \in \overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W)$ agit par $\pm\mathrm{id}$ sur $S_\psi^\pm$.*

Démonstration. Fixons $\ell \in \mathrm{Lagr}(W)$. On se ramène à prouver que $M_\ell[-1]$ agit par $\pm\mathrm{id}$ sur $S_\psi^\pm$, ce qui résulte des formules explicites dans [65] chapitre 2, II.6. □

Il sera démontré que -1 vit dans le revêtement $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W)$ pourvu que $8|\mathbf{f}$ (2.4.13). On obtiendra aussi une caractérisation de -1 par la valeur du caractère de la représentation de Weil.

Le modèle latticiel

Dans cette sous-section, F est supposé non archimédien de caractéristique résiduelle $p > 2$. Fixons un $\mathfrak{o}_F$-réseau $L \subset W$ tel que $L = L^\perp$ et prenons $A = L$ dans la construction générale de (ρ_A, S_A). De tels réseaux existent toujours.

Prenons $L_F = L \times F$. Puisque $p > 2$, L_F est un sous-groupe de $H(W)$ et on peut prendre $\psi_L(a,t) = \psi(t)$. D'où une représentation lisse (ρ_L, S_L) de $H(W)$.

On choisit un système de représentants $R \subset W$ de l'espace discret W/L. Pour tout $r \in R$, définissons une fonction localement constante à support compact $f_r : H(W) \to \mathbb{C}$ par

$$f_r((r'+a,t)) = \begin{cases} \psi\left(t + \frac{\langle r'|a\rangle}{2}\right), & \text{si } r' = r \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

où $r' \in R$ et $a \in L$. Ces fonctions forment une base de S_L. Si l'on munit S_L du produit hermitien $(f|g) := \sum_{\dot{w}\in W/L} f(w,0)\overline{g(w,0)}$ en rappelant que W/L est discret, alors $\{f_r\}_{r\in R}$ est une base orthonormée.

Proposition 2.4.8. *Posons $K := Stab_{\mathrm{Sp}(W)}(L)$. Pour $x \in K$, soit $M_L[x] : S_L \to S_L$ l'opérateur unitaire $g(\cdot) \mapsto g(x^{-1}(\cdot))$. Alors $x \mapsto (x, M_L[x])$ est un homomorphisme injectif continu de K dans $\overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W)$. Ceci fournit un scindage de $\mathbf{p} : \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W) \to \mathrm{Sp}(W)$ au-dessus de K.*

Démonstration. Pour la deuxième assertion, voir [65], Chapitre 2, II.10. □

Le sous-groupe ouvert compact K est toujours hyperspécial. Nous identifions désormais K comme un sous-groupe ouvert compact de $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W)$.

Proposition 2.4.9. *Soient $\{f_r\}_{r\in R}$ les fonctions définies précédemment. Pour $r, r' \in R$ et $x \in K$, on a*

$$(M_L[x]f_r)(r',0) = \begin{cases} \psi\left(\dfrac{\langle r|x^{-1}(r') - r\rangle}{2}\right), & \text{si } x^{-1}(r') - r \in L \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, si $r' \in R$ représente la classe $x^{-1}(r)$ mod L, alors on a

$$(M_L[x]f_r) = \psi\left(\frac{\langle r|x^{-1}(r')\rangle}{2}\right) f_{r'}.$$

Remarque 2.4.10. Lorsque ψ est de conducteur $\mathfrak{o}_F$, on a $M^\perp = M^*$ pour tout réseau $M \subset W$; en particulier, L est autodual.

Remarque 2.4.11. Supposons ψ de conducteur $\mathfrak{o}_F$. Posons

$$H(L) := L \times \mathfrak{o}_F.$$

C'est un sous-groupe ouvert compact de $H(W)$. Soit (ρ_ψ, S_ψ) une représentation satisfaisant aux énoncés du théorème de Stone-von Neumann. En utilisant le modèle latticiel associé a un réseau autodual L, on montre que

$$\dim_{\mathbb{C}} S_\psi^{H(L)} = 1.$$

En effet, cet espace engendré par la fonction caractéristique de L. Soit $s_L \in S_\psi^{H(L)}$, $s_L \neq 0$, alors $M_L[x]$ est caractérisé par $M_L[x](s_L) = s_L$.

Montrons une compatibilité entre le modèle de Schrödinger et le modèle latticiel qui sera utile. Supposons qu'il existe $\ell, \ell' \in \mathrm{Lagr}(W)$ tels que $W = \ell \oplus \ell'$ et $L = (\ell \cap L) \oplus (\ell' \cap L)$. Soit $x \in \mathrm{Sp}(W)$ tel que $x\ell = \ell$ et $x\ell' = \ell'$.

Proposition 2.4.12. *Conservons les hypothèses ci-dessus. Soit T un F-tore maximal déployé dans $P_\ell \cap P_{\ell'}$, alors $M_\ell[x] = M_L[x]$ pour $x \in T(F) \cap K$.*

Démonstration. Du point de vue du modèle de Schrödinger, $S_\psi^{H(L)}$ est engendré $s_L := \mathbb{1}_{L\cap\ell'}$ ([65] chapitre 2, II. 10). On a $M_L[x](s_L) = s_L$ car $x \in K$. D'après la formule explicite de $M_\ell[x]$ ([65] chapitre 2, II. 6), on a aussi $M_\ell[x](s_L) = s_L$, d'où l'assertion. □

La construction de Lion-Perrin

Le modèle de Schrödinger conduit à une construction du revêtement à deux feuillets $\mathbf{p} : \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W) \to \mathrm{Sp}(W)$, étudiée systématiquement par Lion et Perrin [56].

Pour V un F-espace vectoriel de dimension finie, posons

$$\mathfrak{o}(V) := (\bigwedge^{\max} V \setminus \{0\})/F^{\times 2}.$$

C'est un torseur sous $F^\times/F^{\times 2}$; ici nous adoptons la convention $\bigwedge^0\{0\} = F$ de sorte que $\mathfrak{o}(\{0\}) = F^\times/F^{\times 2}$. Un élément dans $\mathfrak{o}(V)$ est dit une orientation de V.

Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathrm{Lagr}(W)$ et $e_i \in \mathfrak{o}(\ell_i)$ $(i = 1, 2)$. Les F-espaces vectoriels $\ell_1/(\ell_1 \cap \ell_2)$ et $\ell_2/(\ell_1 \cap \ell_2)$ sont en dualité par rapport à $\langle\cdot|\cdot\rangle$, d'où l'accouplement

$$\langle\cdot|\cdot\rangle : \mathfrak{o}(\ell_1/(\ell_1 \cap \ell_2)) \times \mathfrak{o}(\ell_2/(\ell_1 \cap \ell_2)) \to F^\times/F^{\times 2}.$$

Fixons une orientation $e \in \mathfrak{o}(\ell_1 \cap \ell_2)$ et choisissons $\bar{e}_i \in \mathfrak{o}(\ell_i/(\ell_1 \cap \ell_2))$ de sorte que $\bar{e}_i \wedge e = e_i$ $(i = 1, 2)$. Définissons

$$A_{\ell_1,\ell_2} := \langle \bar{e}_1 | \bar{e}_2 \rangle \in F^\times/F^{\times 2}.$$

C'est indépendant du choix de e.

Fixons maintenant $\ell \in \mathrm{Lagr}(W)$ et $e \in \mathfrak{o}(\ell)$. Pour tout $g \in \mathrm{Sp}(W)$, munissons $g\ell$ de l'orientation transportée. On définit

$$m_g(\ell) := \gamma_\psi(1)^{\frac{\dim W}{2} - \dim g\ell\cap\ell - 1} \gamma_\psi(A_{g\ell,\ell}).$$

Cela ne dépend pas du choix de l'orientation e. On construit $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W)$ comme l'ensemble des

$$(g, t), \qquad g \in \mathrm{Sp}(W),\ t : \mathrm{Lagr}(W) \to \mathbb{C}^\times$$

tels que

- $t(\ell)^2 = m_g(\ell)^2$ pour tout ℓ ;
- $t(\ell') = \gamma_\psi(\tau(\ell, g\ell, g\ell', \ell'))t(\ell)$ pour tout ℓ, ℓ'.

La multiplication dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W)$ est définie par $(g, t)(g', t') = (gg', tt' \cdot c_{g,g'})$ où

$$c_{g,g'}(\ell) = \gamma_\psi(\tau(\ell, g\ell, gg'\ell)).$$

On définit $\mathbf{p} : \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W) \to \mathrm{Sp}(W)$ par $\mathbf{p}(g, t) = g$. En utilisant les propriétés de l'indice de Maslov, on vérifie que la multiplication est bien définie et associative, et que $\mathbf{p}$ est un revêtement à deux feuillets. L'élément neutre est $(1, \mathbb{1})$ où $\mathbb{1}$ est la fonction constante de valeur 1.

Soit $\ell \in \mathrm{Lagr}(W)$, on définit la fonction d'évaluation ev_ℓ par

$$\forall (g,t) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W), \quad \mathrm{ev}_\ell(g,t) = t(\ell). \tag{I.2}$$

Étant fixé un lagrangien $\ell \in \mathrm{Lagr}(W)$, on a un plongement de $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W)$ dans $\overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W)$ par le modèle de Schrödinger :

$$(g,t) \mapsto (g, t(\ell)M_\ell[g]).$$

L'image ne dépend pas du choix de ℓ et cela identifie $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W)$ au sous-groupe dérivé de $\overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W)$.

Notons $P = P_\ell$ le stabilisateur de ℓ ; c'est le sous-groupe parabolique de Siegel associé à ℓ. Le résultat suivant affirme que le revêtement $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(8)}(W)$ est suffisamment grand pour réaliser le modèle de Schrödinger.

Proposition 2.4.13. *Le scindage $\sigma_\ell : P(F) \to \overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W)$ dans 2.4.5 est à valeurs dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(8)}(W)$. En particulier, l'élément -1 dans 2.4.6 appartient à $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(8)}(W)$.*

Démonstration. On a $\sigma_\ell(g) = (g, M_\ell[g])$. Il existe $t : \mathrm{Lagr}(W) \to \mathbb{C}^\times$ tel que $(g,t) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W)$. On voit que $\sigma_\ell(g)$ et l'image de (g,t) dans $\overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W)$ diffèrent par $t(\ell) \in \mathbb{C}^\times$. D'après la construction de Perrin-Lion, $t(\ell)$ est un produit des indices de Weil $\gamma_\psi(\cdot)$, qui appartiennent à μ_8. D'où l'assertion. □

Remarque 2.4.14. Soit $P_\ell = MU$ une décomposition de Lévi, alors le scindage est unique sur $U(F)$ ([65], appendice 1). Nous donnerons une caractérisation de $\sigma_\ell|_M$ en termes du caractère de ω_ψ (4.1.8).

2.5 Le cas global

Dans cette section F est un corps de nombres. Notons $\mathbb{A}$ l'anneau d'adèles associé à F.

Fixons un caractère non-trivial $\psi : \mathbb{A}/F \to \mathbb{S}^1$, regardé aussi comme un caractère de $\mathbb{A}$ avec décomposition en composantes locales

$$\psi = \bigotimes_v \psi_v.$$

Fixons un F-espace symplectique $(W, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ défini sur $\mathfrak{o}_F$, notons L l'ensemble de $\mathfrak{o}_F$-points de W, c'est un $\mathfrak{o}_F$-réseau dans W. Pour toute place v de F, on construit les objets suivants :

$$\begin{aligned}
(W_v, \langle\cdot|\cdot\rangle) &:= (W, \langle\cdot|\cdot\rangle) \otimes_F F_v;\\
H(W_v) &: \text{le groupe de Heisenberg;}\\
(\rho_v, S_v) &: \text{représentation irréductible lisse de caractère central } \psi_v;\\
\overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W_v), \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W_v), \mathbf{p}_v &: \text{les revêtements} \quad (\mathbf{f} \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1});\\
\omega_{\psi_v} &: \text{la représentation de Weil.}
\end{aligned}$$

Pour presque toute place finie v, ψ_v est de conducteur $\mathfrak{o}_v$ et le complété L_v de L est autodual. Pour une telle v, posons $K_v := \mathrm{Stab}(L_v)$ et $s_v \in S_v$ le vecteur correspondant à la fonction caractéristique de L_v pour le modèle latticiel (cf. 2.4.11).

On définit $(\rho_\psi, S_\psi) = \bigotimes'_v (\rho_v, S_v)$, produit restreint par rapport aux vecteurs s_v. On définit le groupe de Heisenberg adélique $H(W, \mathbb{A})$ par rapport à L, alors (ρ_ψ, S_ψ) est une représentation de $H(W, \mathbb{A})$ de caractère central ψ. Le groupe $\mathrm{Sp}(W, \mathbb{A})$ agit sur $H(W, \mathbb{A})$ de façon naturelle.

On sait construire le produit restreint $\prod'_v \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W_v)$ par rapport aux K_v. Posons

$$\mathbf{N} := \left\{ (\varepsilon_v) \in \bigoplus_v \mathrm{Ker}\,(\mathbf{p}_v) = \bigoplus_v \mu_{\mathbf{f}} : \prod \varepsilon_v = 1 \right\},$$
$$\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W, \mathbb{A}) := \prod_v{}' \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W_v)/\mathbf{N}.$$

On écrit une classe dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W, \mathbb{A})$ comme $[\tilde{x}_v]_v$, où $\tilde{x}_v \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W_v)$ pour toute v.

Les projections locales $(\mathbf{p}_v)_v$ fournissent un revêtement $\mathbf{p} : \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W, \mathbb{A}) \to \mathrm{Sp}(W, \mathbb{A})$ et on a $\mathrm{Ker}\,(\mathbf{p}) = \mu_{\mathbf{f}}$. On définit la représentation de Weil adélique par $\omega_\psi := \bigotimes'_v \omega_{\psi_v}$; elle est spécifique. On retrouve les avatars locaux $\mathbf{p}_v : \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W_v) \to \mathrm{Sp}(W_v)$ comme les fibres de $\mathbf{p}$ au-dessus des $\mathrm{Sp}(W_v)$.

Par ailleurs, on peut formuler une variante du théorème de Stone-von Neumann pour $H(W, \mathbb{A})$, ce qui permet de définir

$$\overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W, \mathbb{A}) := \{(g, M) \in \mathrm{Sp}(W, \mathbb{A}) \times \mathrm{GL}(S_\psi) : \rho_\psi^g \circ M = M \circ \rho_\psi\}$$

comme dans le cas local. C'est une extension centrale de $\mathrm{Sp}(W, \mathbb{A})$ par $\mathbb{C}^\times$. On définit $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W, \mathbb{A})$ comme le groupe dérivé de $\overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W, \mathbb{A})$. La représentation de Weil ω_ψ provient de la projection sur $\mathrm{GL}(S_\psi)$, et on a

$$\overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W, \mathbb{A}) = \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W, \mathbb{A}) \times_{\mu_2} \mathbb{C}^\times.$$

On définit les $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W, \mathbb{A})$ en posant $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W, \mathbb{A}) := \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W, \mathbb{A}) \times_{\mu_2} \mu_{\mathbf{f}}$.

Remarque 2.5.1. Les constructions dans cette section ne dépendent pas du choix de L. En effet, si L, L' sont deux tels réseaux, alors $L_v = L'_v$ pour presque toute place finie v.

Pour formuler la théorie des représentations automorphes, il faudra un scindage canonique de p au-dessus de $\mathrm{Sp}(W)$. L'existence d'un tel scindage est dû à Weil. C'est unique et à image dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W, \mathbb{A})$ car $\mathrm{Sp}(W)$ est engendré par ses commutateurs. Donnons une construction explicite. Fixons $\ell \in \mathrm{Lagr}(W)$, on construit les opérateurs $M_{\ell_v}[x]$ pour tout $x \in \mathrm{Sp}(W)$ et toute place v de F où $\ell_v := \ell \otimes_F F_v$.

Proposition 2.5.2. *L'application*

$$\begin{aligned} i : \mathrm{Sp}(W) &\to \overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W, \mathbb{A}) \\ x &\mapsto (x, \bigotimes_v M_{\ell_v}[x]) \end{aligned}$$

est un homomorphisme bien définie.

Démonstration. Prenons $\ell' \in \mathrm{Lagr}(W)$ tel que $W = \ell \oplus \ell'$. Pour presque toute place finie v, on a $L_v = L_v \cap \ell_v \oplus L_v \cap \ell'_v$. D'après les formules explicites pour $M_{\ell_v}[x]$ et s_v ([65] chapitre 2, II.6, II.10) avec la décomposition de Bruhat, $M_{\ell_v}[x]$ fixe s_v pour presque tout v, donc $\bigotimes_v M_{\ell_v}[x] \in \mathrm{GL}(S_\psi)$ et i est bien défini.

Montrons que i est un homomorphisme. Soient $x, y \in \mathrm{Sp}(W)$, alors

$$M_{\ell_v}[x] M_{\ell_v}[y] = \gamma_{\psi_v}(\tau(\ell, x\ell, xy\ell)) M_{\ell_v}[xy].$$

L'espace quadratique $\tau(\ell, x\ell, xy\ell)$ est défini sur F. Grâce à la réciprocité de Weil ([89] §30, Proposition 5), le produit $\prod_v \gamma_{\psi_v}(\tau(\ell, x\ell, xy\ell))$ vaut 1, cela permet de conclure. □

Corollaire 2.5.3. *Pour toute place v, soit $-1_v \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(8)}(W_v)$ l'élément considéré dans 2.4.6. Alors $i(-1)$ est égal à $[-1_v]_v$.*

Démonstration. Si l'on plonge $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(8)}(W, \mathbb{A})$ dans $\overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W)$, alors $[-1_v]_v$ s'identifie à

$$(-1, \bigotimes_v M_{\ell_v}[-1]),$$

qui est égal à $i(-1)$ par ladite proposition. □

3 Classes de conjugaison semi-simples dans les groupes classiques

3.1 Formes hermitiennes

Dans cette section, F est un corps parfait de caractéristique $\neq 2$.

Formes pour les anneaux à involutions Fixons A une F-algèbre et τ une F-involution de A (i.e. un antiautomorphisme de carré l'identité). On dit qu'une telle paire (A, τ) est une F-algèbre à involution. Lorsque A est étale, on supprime souvent l'involution et on exprime l'algèbre à involution par $A/A^\#$, où $A^\#$ est la sous-algèbre fixée par τ. C'est loisible car les données $A, A^\#$ déterminent τ.

Soit M un A-module projectif à droite de type fini. Lorsque A est commutatif, les modules à gauche et à droite se confondent. Une application bi F-additive $q : M \times M \to A$ est dite une forme sesquilinéaire si pour tout $m, n \in M$ et $a, b \in A$, on a

$$q(ma|nb) = \tau(a)q(m|n)b.$$

Une telle application q équivaut à un homomorphisme

$$\begin{aligned} g_q : & M \to M^* := \mathrm{Hom}_A(M, A) \\ & m \mapsto q(m|-) \end{aligned}$$

où on regarde le dual M^* comme un A-module à droite par $(fa)(m) = \tau(a)f(m)$ pour tout $a \in A$, $m \in M$.

Une forme sesquilinéaire q est dite non-dégénérée si g_q est un isomorphisme. Soit $\epsilon = \pm 1$, on dit que q est ϵ-hermitienne si q est non-dégénérée et $q(m|n) = \epsilon\tau(q(n|m))$ pour tout $m, n \in M$; cela équivaut à la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g_q"] \arrow[d, "\epsilon \cdot \varpi"'] & M^* \arrow[d, equal] \\ M^{**} \arrow[r, "g_q^*"] & M^* \end{tikzcd}$$

où $\varpi : M \to M^{**}$ est donnée par $\varpi(m)(\lambda) = \langle \lambda, m \rangle$ pour tous $m \in M$,$\lambda \in M^*$. Il y a une notion naturelle d'isométries entre ces formes. Notons la catégorie des (A, τ)-formes ϵ-hermitienne par $\mathfrak{Herm}^\epsilon(A, \tau)$.

Voici quelques cas spéciaux que nous utiliserons plus tard.

- $A = F$, $\tau = \mathrm{id}$, $\epsilon = 1$: les F-formes quadratiques.
- Idem, mais $\epsilon = -1$: les F-formes symplectiques.
- $A = E$ une extension quadratique de F, τ l'involution associée, $\epsilon = 1$: les E/F-formes hermitiennes.
- Idem, mais $\epsilon = -1$: les E/F-formes anti-hermitiennes.

Pousser-en-avant des formes Supposons donnés une inclusion $(A_1, \tau_1) \hookrightarrow (A_2, \tau_2)$ et un homomorphisme F-linéaire $t : A_2 \to A_1$ tel que $t \circ \tau_2 = \tau_1 \circ t$. Soit q une (A_2, τ_2)-forme ϵ-hermitienne, on en déduit une (A_1, τ_1)-forme ϵ-hermitienne $t_* q$ sur M (regardé comme un A_1-module) définie par

$$(t_* q)(m|n) = t(q(m|n)).$$

Formes en catégories Afin de classifier les classes de conjugaison, travaillons dans un cadre plus abstrait. Une référence possible est [45] II.

Définition 3.1.1 (cf. [45] II 2)**.** Une catégorie F-additive avec dualité est un triplet $(\mathcal{C}, *, \varpi)$ où $\mathcal{C}$ est une catégorie F-additive, $*$ est un foncteur $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ et $\varpi : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} **$ est un isomorphisme de foncteurs.

Une forme ϵ-hermitienne dans $(\mathcal{C}, *, \varpi)$ est une paire (M, ϕ) où M est un objet dans $\mathcal{C}$ et ϕ est un isomorphisme $M \xrightarrow{\sim} M^*$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\epsilon\varpi_M"'] & M^* \arrow[d, equal] \\ M^{**} \arrow[r, "\phi^*"] & M^* \end{tikzcd}$$

est commutatif. On dit aussi qu'une forme ϵ-hermitienne est hermitienne si $\epsilon = 1$ et anti-hermitienne si $\epsilon = -1$. On note la catégorie des formes ϵ-hermitienne dans $\mathcal{C}$ par $\mathfrak{Herm}^{\epsilon}(\mathcal{C})$.

Soient $(\mathcal{C}_1, *_1, \varpi_1)$, $(\mathcal{C}_2, *_2, \varpi_2)$ deux catégories F-additives avec dualité. Un morphisme entre elles est une paire (G, η), où G est un foncteur F-additif $\mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ et η est un isomorphisme $G \circ *_1 \xrightarrow{\sim} *_2 \circ G$, tels que

$$\begin{tikzcd} G(M) \arrow[r, "G(\varpi_1)"] \arrow[d, "\varpi_2"] & G(M^{**}) \arrow[d, "\eta_{M^*}"] \\ G(M)^{**} \arrow[r, "(\eta_M)^*"] & G(M^*)^* \end{tikzcd}$$

est commutatif pour tout M.

On définit aisément la somme orthogonale de formes ϵ-hermitiennes. Une isométrie entre deux formes ϵ-hermitiennes (M_1, ϕ_1), (M_2, ϕ_2) est un isomorphisme $h : M_1 \xrightarrow{\sim} M_2$ tel que $h^* \phi_2 h = \phi_1$.

Pour une catégorie F-additive $(\mathcal{C}, *, \varpi)$ et un objet M dans $\mathcal{C}$, on associe la forme ϵ-hermitienne hyperbolique comme la forme $\mathbb{H}(M) := (M \oplus M^*, \phi)$ où $\phi : M \oplus M^* \to M^* \oplus M^{**}$ a l'expression matricielle suivante

$$\phi : \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{M^*} \\ \epsilon\varpi_M & 0 \end{pmatrix}$$

Les formes ϵ-hermitiennes pour les anneaux discutées précédemment sont des exemples de ce formalisme.

Si $(\mathcal{C}, *, \varpi)$ est un produit fini $\prod_{i=1}^{r} (\mathcal{C}_i, *_i, \varpi_i)$, alors la catégorie des formes ϵ-hermitiennes dans $(\mathcal{C}, *, \varpi)$ est canoniquement isomorphe au produit des catégories des formes ϵ-hermitiennes dans les $(\mathcal{C}_i, *_i, \varpi_i)$.

3.2 Kit de classification

Fixons maintenant $\epsilon = \pm 1$ et une F-algèbre à involution (A, τ) de la forme suivante :
– soit $A = F$, $\tau = \mathrm{id}$;
– soit $A = E$ une extension quadratique de F et τ la F-involution non triviale associée.
Si (M, h) est une (A, τ)-forme ϵ-hermitienne, on note $\mathrm{U}(M, h)$ son groupe d'isométries.

Considérons la catégorie F-additive avec dualité $(\mathfrak{H}, *, \varpi)$ (abrégée comme $\mathfrak{H}$ dans ce qui suit) suivante :

- les objets sont les paires (M, x), où M est un A-module de type fini et $x \in \mathrm{GL}_A(M)$ est semi-simple ;
- un morphisme $(M_1, x_1) \to (M_2, x_2)$ est un homomorphisme A-linéaire $f : M_1 \to M_2$ tel que $f \circ x_1 = x_2 \circ f$;
- pour tout objet (M, x), on définit $(M, x)^* = (M^*, (x^{-1})^*)$;
- l'isomorphisme $\varpi : \mathrm{id} \xrightarrow{\sim} **$ est l'isomorphisme canonique $M \xrightarrow{\sim} M^{**}$, pour tout M.

L'ensemble des classes d'isomorphismes de formes ϵ-hermitiennes dans $\mathfrak{H}$ s'identifie à celui des triplets (M, h, x) où (M, h) est ϵ-hermitienne et $x \in \mathrm{U}(M, h)$ est semi-simple, à isométrie près.

Soit $(\mathfrak{H}_0, *, \varpi)$ la catégorie F-additive avec dualité de (A, τ)-formes ϵ-hermitiennes. On a un foncteur d'oubli $\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_0$. Pour classifier les classes de conjugaison semi-simples dans $\mathrm{U}(M, h)$, il suffit de classifier les formes ϵ-hermitiennes dans $\mathfrak{H}$ ayant une image dans $\mathfrak{H}_0$ isomorphe à (M, h).

Pour ce faire, nous suivons la recette dans [45] II (6.6) qui est essentiellement une variante de l'équivalence de Morita. Tout d'abord, on vérifie les propriétés suivantes pour $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{H}_0$ (cf. [45] II. (5.2), (6.3)) :

C1 : tout idempotent se scinde ;

C2 : tout objet M admet une décomposition $M = \bigoplus_{i=1}^m N_i$ où N_i est un objet indécomposable et $\mathrm{End}(N_i)$ est un corps ; si $N_i = (V_i, x_i)$ est un objet dans $\mathfrak{H}$ alors $\mathrm{End}(N_i)$ est engendré par x_i sur A ;

C3 : pour tout objet M, le radical de Jacobson de $\mathrm{End}(M)$ est nul.

En effet, ces propriétés ne font pas intervenir la dualité $*$, elles résultent de l'algèbre linéaire. Elles impliquent aussi la propriété de Krull-Schmidt pour $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{H}_0$, au sens suivant.

Définition 3.2.1. On dit qu'une catégorie additive vérifie la propriété de Krull-Schmidt si tout objet M admet une décomposition $M = \bigoplus_{i=1}^m N_i$ en objets indécomposables, unique à permutation et isomorphisme près.

Le type d'un objet M dans une telle catégorie est l'ensemble des classes d'isomorphisme de ses composantes indécomposables N_i.

La classification marchera en trois étapes. Soit (M, x, h) une forme ϵ-hermitienne dans $\mathfrak{H}$.

Étape 1 Puisque $\mathfrak{H}$ vérifie la propriété de Krull-Schmidt, on peut décomposer (M, x) selon son type et puis regrouper par dualité de sorte que

$$(M, x, h) = \bigoplus_{i=1}^{m} (M_i, x_i, h_i),$$

où (M_i, x_i) est de type N_i (avec $N_i \simeq N_i^*$) ou (N_i, N_i^*) (avec $N_i \not\simeq N_i^*$) pour tout i.

Étape 2a Fixons $1 \leq i \leq m$. Supposons d'abord (M_i, x_i) de type N_i. D'après [45] II (6.5.1) l'objet N_i admet une structure d'une forme hermitienne ou anti-hermitienne, disons $k_i : N_i \to N_i^*$. Posons $K_i := \mathrm{End}(N_i) = A(x_i)$, c'est un corps et il admet l'involution A-linéaire canonique d'adjonction ([45] II (3.2)) :

$$\tau_i : f \mapsto k_i^{-1} f^* k_i.$$

On a $\tau_i(x_i) = x_i^{-1}$ et τ_i prolonge τ sur A. Posons $K_i^{\#}$ le sous-corps fixé par τ_i.

Lemme 3.2.2. *Si* $x_i \neq \pm 1$, *alors* $\tau_i \neq \mathrm{id}$.

Démonstration. On a $\tau_i = \mathrm{id}$ si et seulement si $\tau_i(x_i) = x_i$, c'est-à-dire $x_i = x_i^{-1}$, ce qui contredit l'hypothèse car K_i est un corps. □

Si $x_i = \pm 1$, alors la classification de tels (M_i, x_i, h_i) équivaut à la classification de $(A, \tau)-$formes ϵ-hermitiennes. Conservons l'hypothèse que $x_i \neq \pm 1$ dans ce qui suit.

Étape 2b D'autre part, si (M_i, x_i) est de type (N_i, N_i^*) alors il existe r tel que $(M_i, x_i) = (N_i \oplus N_i^*)^{\oplus r}$ car $(M_i, x_i) \simeq (M_i, x_i)^*$ ([45] II (6.4)). On pose

$$K_i := \mathrm{End}(N_i \oplus N_i^*) = \mathrm{End}(N_i) \times \mathrm{End}(N_i^*).$$

Il est muni de l'involution $\tau_i : (a, b) \mapsto (\varpi(b^*), a^*)$. La sous-algèbre $K_i^{\#}$ fixée par τ_i est isomorphe à $\mathrm{End}(N_i)$, donc $K_i^{\#}$ est un corps. On a

$$(K_i, \tau_i) \simeq (K_i^{\#} \times K_i^{\#}, (a, b) \mapsto (b, a)).$$

De plus, x_i s'identifie à l'élément $(x_i|_{N_i}, (x_i|_{N_i}^{-1})^*) \in K_i^{\times}$. Montrons que $\tau_i(x_i) = x_i^{-1} \neq x_i$. En effet, si $\tau_i(x_i) = x_i$ alors $x_i|_{N_i} = x_i|_{N_i}^{-1}$, d'où $x_i|_{N_i} = \pm 1$ car $\mathrm{End}(N_i)$ est un corps, mais cela implique que $N_i \simeq N_i^*$, qui est contradictoire.

Étape 3 Supposons pour l'instant que $x_i \neq \pm 1$ pour tout $1 \leq i \leq m$. Pour tout i, posons

$$Q_i := \begin{cases} N_i, & \text{si } (M_i, x_i) \text{ est de type } (N_i), \\ N_i \oplus N_i^* & \text{si } (M_i, x_i) \text{ est de type } (N_i, N_i^*). \end{cases}$$

Les objets $K_i, K_i^{\#}, \tau_i$ sont définis comme précédemment. On peut identifier (non canoniquement) l'espace sous-jacent de Q_i à K_i. Définissons $k_i : Q_i \to Q_i^*$ qui correspond à la forme trace sur le A-espace vectoriel K_i

$$(q, q') \mapsto \mathrm{tr}_{K_i/A}(\tau_i(q) q').$$

Alors (Q_i, k_i) est une forme hermitienne dans $\mathfrak{H}$ car $\tau_i(x_i) = x_i^{-1}$.

Posons maintenant $Q := \bigoplus_{i=1}^m Q_i$, muni du morphisme $k = \bigoplus k_i : Q \xrightarrow{\sim} Q^*$ de sorte que (Q, k) est une forme hermitienne. On construit les objets suivants :

$$K := \bigoplus_i K_i = \mathrm{End}(Q),$$
$$x := (x_i)_i, \ K = A[x],$$
$$K^{\#} := \bigoplus_i K_i^{\#},$$
$$\tau_K := \bigoplus \tau_i.$$

Alors K est une A-algèbre étale dont τ_K est une involution prolongeant $\tau : A \to A$, $\tau_K(x) = x^{-1}$ et $K^\#$ est la sous-algèbre fixée par τ.

Posons $\mathfrak{H}|_Q$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{H}$ dont les objets sont facteurs directs des $Q^{\oplus r}$ $(r \geq 1)$. Elle contient (M, x). Considérons le foncteur $G := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{H}}(Q, -)$ de $\mathfrak{H}|_Q$ dans la catégorie des K-modules projectifs de type fini. Il préserve les dualités et induit une équivalence de catégories F-additives avec dualités ([45] II. §3). Cela induit aussi une équivalence

$$\mathfrak{Herm}^\epsilon(\mathfrak{H}|_Q) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Herm}^\epsilon(K, \tau_K).$$

Donnons une forme plus utile de cette correspondance.

Proposition 3.2.3. *Il existe une correspondance biunivoque*

$$\mathfrak{Herm}^\epsilon(K, \tau_K) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Herm}^\epsilon(\mathfrak{H}|_Q)$$

donnée par

$$(M', h') \mapsto (\mathrm{tr}_{K/A})_*(M, h),$$

où M est muni de l'automorphisme qui agit par multiplication par $x \in Q^\times$.

Démonstration. Puisque la formation de cette application est compatible aux réunions de types $\{N_i\}, \{N_i, N_i^*\}$, il suffit de considérer le cas $Q = Q_i$ pour un $1 \leq i \leq m$. Soit $M = Q^{\oplus r}$, l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{H}}(M, M^*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(G(M), G(M)^*)$$

respecte l'action de $\mathrm{End}_{\mathfrak{H}}(M) = \mathrm{Mat}_{r\times r}(K)$ des deux côtés. Prenons une (K, τ)-forme ϵ-hermitienne (M, h) munie de la multiplication par x, alors $\mathrm{tr}_{K/A_*}(M, h)$ munie de l'action de x est une forme ϵ-hermitienne dans $\mathfrak{H}|_Q$. En faisant agir les endomorphismes "symétriques" dans $\mathrm{End}_{\mathfrak{H}}(M)$, on voit que toute forme ϵ-hermitienne sur $\mathfrak{H}|_Q$ est de la forme $\mathrm{tr}_{K/A_*}(M, h)$ avec la multiplication par x. Cette correspondance est biunivoque. □

Remarque 3.2.4. Si $Q_i = N_i \oplus N_i^*$ où $N_i \not\simeq N_i^*$, alors toute forme ϵ-hermitienne dans $\mathfrak{H}|_{Q_i}$ est hyperbolique([45] II (6.4)).

Conclusion Compte tenu des raisonnements ci-dessus, on a obtenu :

Théorème 3.2.5. *Soit (M, h) une (A, τ)-forme ϵ-hermitienne. Les classes de conjugaison semi-simples dans $\mathrm{U}(M, h)$ sont paramétrées par les données suivantes.*

- *Une A-algèbre étale de type fini K et une involution $\tau_K : K \to K$. La sous-algèbre fixée par τ_K est notée par $K^\#$.*
- *Un élément semi-simple $x \in K^\times$ tel que $\tau(x) = x^{-1}$, $x \neq \pm 1$ et $K = A[x]$.*
- *Une (K, τ_K)-forme ϵ-hermitienne (M_K, h_K). Quitte à rétrécir (K, τ_K), on peut supposer que (M_K, h_K) est fidèle.*
- *Deux (A, τ)-formes ϵ-hermitiennes (M_+, h_+) et (M_-, h_-).*

Ces paramètres sont soumis à la condition

$$(M, h) \simeq \mathrm{tr}_{K/A_*}(M_K, h_K) \oplus (M_+, h_+) \oplus (M_-, h_-).$$

Il y a une notion évidente d'équivalence pour les paramètres. Les paramètres pour une classe de conjugaison semi-simple sont uniquement déterminés à équivalence près.

Précisons cette correspondance. Étant donné un tel paramètre

$$(K/K^{\#}, x, (M_K, h_K), (M_\pm, h_\pm)),$$

on fixe un isomorphisme

$$\phi : (M, h) \xrightarrow{\sim} (M_0, h_0) := \operatorname{tr}_{K/A_*}(M_K, h_K) \oplus (M_+, h_+) \oplus (M_-, h_-).$$

Il induit $\phi_* : \mathrm{U}(M_0, h_0) \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}(M, h)$. Soit $x_0 \in \mathrm{U}(M_0, h_0)$ qui agit comme multiplication par x sur M_K et comme $\pm\mathrm{id}$ sur $M_\pm$. Alors $\mathcal{O}(\phi_*(x_0))$ est la classe cherchée ; elle ne dépend pas du choix de ϕ. La classe ainsi obtenue est notée $\mathcal{O}(K/K^{\#}, x, (M_K, h_K), (M_\pm, h_\pm))$.

Remarque 3.2.6. Si $A = E$ est une extension quadratique de F, alors $K = K^{\#} \otimes_F E$.

Discutons deux opérations sur les paramètres.

Somme directe Soient $(M', h'), (M'', h'')$ deux (A, τ)-formes ϵ-hermitiennes et posons $(M, h) := (M', h') \oplus (M'', h'')$, alors on dispose d'un homomorphisme $\iota : U(M', h') \times U(M'', h'') \to U(M, h)$.

Soient $(K'/K'^{\#}, x', (M_{K'}, h_{K'}), (M'_\pm, h'_\pm))$ un paramètre pour $\mathcal{O}(g') \in U(M', h')$ et $(K''/K''^{\#}, x'', (M_{K''}, h_{K''}), (M''_\pm, h''_\pm))$ un paramètre pour $\mathcal{O}(g'') \in U(M'', h'')$. On définit leur somme directe

$$(K'/K'^{\#}, x', (M_{K'}, h_{K'}), (M'_\pm, h'_\pm)) \oplus (K''/K''^{\#}, x'', (M_{K''}, h_{K''}), (M''_\pm, h''_\pm))$$

comme un paramètre $(K/K^{\#}, x, (M_K, h_K), (M_\pm, h_\pm))$ où

$$(K, \tau_K) = (K', \tau_{K'}) \times (K'', \tau_{K''})$$

comme F-algèbres à involutions, $(M_K, h_K) = (M_{K'}, h_{K'}) \oplus (M_{K''}, h_{K''})$ la (K, τ_K)-forme ϵ-hermitienne correspondante, et on définit $(M_\pm, h_\pm) := (M'_\pm, h'_\pm) \oplus (M''_\pm, h''_\pm)$. Alors $(K/K^{\#}, x, (M_K, h_K), (M_\pm, h_\pm))$ paramètre la classe $\mathcal{O}(\iota(g', g'')) \in U(M, h)$.

Pousser-en-avant Soient L une extension finie de F et $B := A \otimes_F L$. Alors $(B, \mathrm{id} \otimes \tau)$ est une extension finie de (A, τ). Soit (M, h) une $(B, \mathrm{id} \otimes \tau)$-forme ϵ-hermitienne, alors $(M, \operatorname{tr}_{B/A_*} h)$ est une (A, τ)-forme ϵ-hermitienne. On a une inclusion $U(M, h) \subset U(M, \operatorname{tr}_{B/A_*} h)$.

Soit $(K/K^{\#}, x, (M_K, h_K), (M_\pm, h_\pm))$ un paramètre pour une classe $\mathcal{O}(g)$ dans $U(M, h)$, toutes les données étant définies par rapport à L, alors $(K/K^{\#}, x, (M_K, h_K), (M_\pm, \operatorname{tr}_{B/A_*} h_\pm))$ paramètre la classe $\mathcal{O}(g)$ dans $U(M, \operatorname{tr}_{B/A_*} h)$. Ici on regarde $K/K^{\#}$ comme une F-algèbre étale.

Décomposition

Remarque 3.2.7. Si l'on décompose

$$(K/K^{\#}, x) = \prod_{i \in I} (K_i/K_i^{\#}, x_i)$$

de sorte que $K_i^{\#}$ est un corps pour tout i, alors il y a un isomorphisme canonique

$$\mathfrak{Herm}^{\epsilon}(K, \tau_K) \simeq \prod_{i \in I} \mathfrak{Herm}^{\epsilon}(K_i, \tau_{K_i}),$$

$$(M_K, h_K) \simeq \prod_{i \in I} (M_{K_i}, h_{K_i}).$$

L'étude des (K, τ_K)-formes ϵ-hermitiennes se ramène à celle des (K_i, τ_{K_i})-formes ϵ-hermitiennes. Posons

$$I^* := \{i \in I : K_i \text{ est un corps}\}.$$

D'après 3.2.4, il suffit de considérer les indices $i \in I^*$.

Remarque 3.2.8. Indiquons deux extensions de ce formalisme. D'abord on peut étendre cette classification aux restrictions des scalaires de schémas en groupes classiques : cela équivaut à remplacer F par un sous-corps $F_0 \subset F$. Ensuite, on peut aussi considérer des produits de la forme $\prod_i \mathrm{Res}_{F_i/F}(U_i)$, où F_i est une extension finie de F et U_i est un groupe classique sur F_i, pour tout i.

3.3 Paramétrage explicite

Maintenant on peut décrire explicitement les classes de conjugaison dans les groupes classiques et leurs commutants. Par conséquent, on dispose aussi d'une description de la régularité.

Les groupes symplectiques Prenons $A = F$, $\epsilon = -1$ dans la classification ci-dessus. Soit $(W, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un F-espace symplectique, alors $\mathrm{U}(W, \langle\cdot|\cdot\rangle) = \mathrm{Sp}(W)$. Les classes de conjugaison semi-simples dans $\mathrm{Sp}(W)$ sont donc paramétrées par les données suivantes.
– Données $(K/K^\#, x)$ comme dans 3.2.5, $K = F[x]$.
– Une (K, τ_K)-forme anti-hermitienne (W_K, h_K) où W_K est un K-module fidèle.
– Deux F-espaces symplectiques $(W_+, \langle\cdot|\cdot\rangle_+)$ et $(W_-, \langle\cdot|\cdot\rangle_-)$.
Les espaces symplectiques sont classifiés par leur dimension, donc les paramètres sont soumis à une seule condition

$$\dim_F W_K + \dim_F W_+ + \dim_F W_- = \dim_F W.$$

Commutants. Soit $g \in \mathcal{O}(K/K^\#, x, (W_K, h_K), (W_\pm, \langle\cdot|\cdot\rangle_\pm))$, alors

$$\mathrm{Sp}(W)^g = \mathrm{Sp}(W)_g = U(W_K, h_K) \times \mathrm{Sp}(W_+) \times \mathrm{Sp}(W_-).$$

Décomposons $K = \prod_{i \in I} K_i$, $\tau_K = (\tau_i)$, $x = (x_i)$, et $(W_K, h_K) = ((W_i, h_i))_{i \in I}$ comme dans 3.2.7. Si $i \notin I^*$ alors $U(W_i, h_i) \simeq \mathrm{GL}_{K_i^\#}(n_i)$ avec $n_i := \frac{1}{2} \dim_{K_i^\#} W_i$. D'où :

$$U(W_K, h_K) = \prod_{i \in I^*} U_{K_i, \tau_i}(W_i, h_i) \times \prod_{i \notin I^*} \mathrm{GL}_{K_i^\#}(n_i).$$

Régularité. La classe ainsi paramétrée est régulière si et seulement si $W_+ = W_- = \{0\}$ et $W_K \simeq K$. Une classe régulière est forcément fortement régulière.

Les groupes orthogonaux impairs Prenons $A = F$, $\epsilon = 1$. Soit (V, q) un F-espace quadratique de dimension impaire, alors $\mathrm{U}(V, q) = O(V, q)$. Les classes de conjugaison semi-simples dans $O(V, q)$ sont paramétrées par les données suivantes
– Données $(K/K^\#, x)$ comme dans 3.2.5, $K = F[x]$.
– Une (K, τ_K)-forme hermitienne (V_K, h_K) où V_K est un K-module fidèle.
– Deux F-espaces quadratiques (V_+, q_+) et (V_-, q_-).
Les paramètres sont soumis à la condition

$$(V, q) \simeq (\mathrm{tr}_{K/F})_*(V_K, h_K) \oplus (V_+, q_+) \oplus (V_-, q_-).$$

Pour que $\mathcal{O}(K/K^\#, x, (V_K, h_K), (V_\pm, q_\pm))$ appartienne à $\mathrm{SO}(V, q)$, il faut et il suffit que

$$\dim_F V_+ \equiv 1 \mod 2,$$
$$\dim_F V_- \equiv 0 \mod 2.$$

Commutants. Soit $g \in \mathcal{O}(K/K^{\#}, x, (V_K, h_K), (V_{\pm}, q_{\pm}))$, alors

$$\begin{aligned}\mathrm{SO}(V,q)^g &= U(V_K, h_K) \times \mathcal{R}\\ \mathrm{SO}(V,q)_g &= U(V_K, h_K) \times \mathrm{SO}(V_+, q_+) \times \mathrm{SO}(V_-, q_-),\end{aligned}$$

où le groupe $U(V_K, h_K)$ admet une description analogue au cas symplectique, et

$$\mathcal{R} = \{(a,b) \in O(V_+, q_+) \times O(V_-, q_-) : \det a \cdot \det b = 1\}.$$

Donc les composantes connexes de $\mathrm{SO}(V,q)^g$ sont définies sur F et

$$(SO(V,q)^g : SO(V,q)_g) = \begin{cases} 2, & \text{si } V_- \neq \{0\},\\ 1, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Régularité. La classe ainsi paramétrée est régulière si et seulement si

$$W_K \simeq K,$$
$$\dim_F V_+ = 1,$$
$$\dim_F V_- = 0 \text{ ou } 2.$$

Une classe régulière est fortement régulière si et seulement si $\dim V_- = 0$.

Les groupes orthogonaux pairs Soit (V,q) un F-espace quadratique de dimension paire, alors $\mathrm{U}(V,q) = O(V,q)$. Les classes de conjugaison semi-simples dans $O(V,q)$ sont paramétrées par les mêmes données pour le cas impair, mais la condition sur $\dim_F V_{\pm}$ devient

$$\dim_F V_+ \equiv 0 \mod 2,$$
$$\dim_F V_- \equiv 0 \mod 2.$$

Une classe de conjugaison $\mathcal{O}(K/K^{\#}, x, (V_K, h_K), (V_{\pm}, q_{\pm}))$ dans $O(V,q)$ se décompose en deux classes $\mathcal{O}^{\pm}$ par $\mathrm{SO}(V,q)$. On n'aura pas besoin de les distinguer dans ce texte.

Commutants. La description des commutants est pareille que dans le cas impair.

Régularité. Une classe $\mathcal{O}(K/K^{\#}, x, (V_K, h_K), (V_{\pm}, q_{\pm}))$ est régulière si et seulement si

$$W_K \simeq K,$$
$$\dim_F V_{\pm} \leq 2.$$

Une classe régulière est fortement régulière si et seulement si $V_+ = \{0\}$ ou $V_- = \{0\}$.

Les groupes unitaires Prenons $A = E$ une extension quadratique de F et τ l'involution de E associée.

Soit (V,h) une (E,τ)-forme ϵ-hermitienne. Les classes de conjugaison semi-simples dans $\mathrm{U}(V,h)$ sont paramétrées par les données suivantes

– Données $(K/K^{\#}, x)$ comme dans 3.2.5, $K = E[x]$. On a $K = K^{\#} \otimes_F E$ et $\tau_K = \mathrm{id} \otimes \tau$.
– Une (K, τ_K)-forme ϵ-hermitienne (V_K, h_K) où V_K est un K-module fidèle.
– Deux (E,τ)-formes ϵ-hermitiennes (V_+, h_+) et (V_-, h_-).

Les paramètres sont soumis à la condition

$$(V,h) \simeq \mathrm{tr}_{K/E_*}(V_K, h_K) \oplus (V_+, h_+) \oplus (V_-, h_-).$$

Commutants. Soit $g \in \mathcal{O}(K/K^{\#}, x, (V_K, h_K), (V_{\pm}, q_{\pm}))$, alors

$$U(V,h)^g = U(V,h)_g = U(V_K, h_K) \times U(V_+, h_+) \times U(V_-, h_-).$$

Le groupe $U(V_K, h_K)$ se décrit comme dans le cas symplectique.

Régularité. La classe ainsi paramétrée est régulière si et seulement si

$$W_K \simeq K,$$
$$\dim_E V_{\pm} \leq 1.$$

Une classe régulière est automatiquement fortement régulière.

Remarque 3.3.1. La description des commutants admet une paraphrase schématique. Plus rigoureusement, il faudra remplacer le groupe $U(W_K, h_K)$ (resp. $U(V_K, h_K)$) par la restriction des scalaires $\mathrm{Res}_{K\#/F} U(W_K, h_K)$ (resp. $\mathrm{Res}_{K\#/F} U(V_K, h_K)$).

Remarque 3.3.2. Supposons que F est infini. Si l'on supprime x dans les paramètres des classes régulières, on arrive à une classification des F-tores maximaux à conjugaison près dans les groupes classiques.

Sous-groupes de Lévi D'après la classification des classes de conjugaison semi-simples et la description de commutants, on arrive aussitôt à une classification de sous-groupes de Lévi.

Proposition 3.3.3. *Les sous-groupes de Lévi des groupes classiques sont classifiés comme suit.*

- *Si $(W, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ est une forme symplectique, alors les sous-groupes de Lévi de* $\mathrm{Sp}(W)$ *sont de la forme*

$$\prod_{i=1}^{r} \mathrm{GL}_F(n_i) \times \mathrm{Sp}(W_+),$$

sousmise à la condition

$$\sum_{i=1}^{r} 2n_i + \dim W_+ = \dim W.$$

- *Si (V, q) est une forme orthogonale, alors les sous-groupes de Lévi de* $\mathrm{SO}(V, q)$ *sont de la forme*

$$\prod_{i=1}^{r} \mathrm{GL}_F(n_i) \times \mathrm{SO}(V_+, q_+)$$

soumise à la condition

$$(\sum_{i=1}^{r} n_i)\mathbb{H} \oplus (V_+, q_+) \simeq (V, q).$$

- *Si (V, h) est une E/F-forme hermitienne ou anti-hermitienne, alors les sous-groupes de Lévi de $U(V, h)$ sont de la forme*

$$\prod_{i=1}^{r} \mathrm{GL}_E(n_i) \times U(V_+, h_+),$$

soumise à la condition

$$(\sum_{i=1}^{r} n_i)\mathbb{H} \oplus (V_+, h_+) \simeq (V, q).$$

où $\mathbb{H}$ signifie la E/F-forme hermitienne ou anti-hermitienne hyperbolique de dimension 2.

Démonstration. Il suffit de considérer les commutants connexes des éléments semi-simples engendrant un F-tore déployé. □

Remarque 3.3.4. Nous utiliserons le fait suivant. En tout cas, les composantes $\mathrm{GL}_F(n_i)$ sont associés à des espaces hyperboliques (en une catégorie convenable), dans lesquelles les éléments laissent invariant un lagrangien. Cela découle de §3.2.

Classes assez régulières

Définition 3.3.5. On dit qu'une classe de conjugaison semi-simple dans un groupe classique (symplectique, orthogonal ou unitaire) est assez régulière si :

(cas symplectique) elle est régulière ;

(cas orthogonal impair) elle est régulière et paramétrée par $(K/K^{\#}, x, (V_K, h_K), (V_{\pm}, q_{\pm}))$ avec $V_- = \{0\}$, $\dim_F V_+ = 1$;

(cas orthogonal pair) elle est régulière et paramétrée par $(K/K^{\#}, x, (V_K, h_K), (V_{\pm}, q_{\pm}))$ avec $V_+ = V_- = \{0\}$;

(cas unitaire) elle est régulière et paramétrée par $(K/K^{\#}, x, (V_K, h_K), (V_{\pm}, h_{\pm}))$ avec $V_+ = V_- = \{0\}$.

Une classe assez régulière est automatiquement fortement régulière. Pour une classe assez régulière, la forme h_K sur $W_K \simeq K$ dans son paramètre est décrite par

$$\forall a, b \in K,\ h_K(a|b) = \mathrm{tr}_{K/A}(c\tau(a)b)$$

où $c \in K^\times$ est tel que $\tau_K(c) = \epsilon c$.

Pour une classe assez régulière dans un groupe orthogonal impair $SO(V, q)$, la donnée (V_+, q_+) dans son paramètre est déterminée par (V, q) et l'autre donnée $(K/K^{\#}, x, c)$ d'après le théorème de Witt. En tout cas, on peut simplifier le paramètre d'une classe assez régulière en la donnée

$$(K/K^{\#}, x, c)$$

satisfaisant à $\tau_K(c) = \epsilon c, \tau_K(x) = x^{-1}$. Deux données $(K/K^{\#}, x, c)$ et $(K'/K'^{\#}, x', c')$ sont équivalentes si et seulement s'il existe un isomorphisme de F-algèbres à involutions $\sigma : (K, \tau_K) \tilde{\to} (K', \tau_{K'})$ tel que

$$\sigma(x) = x'$$
$$\sigma(c)c'^{-1} \in N_{K'/K'^{\#}}(K'^\times)$$

Remarque 3.3.6. Écrivons les paramètres comme $K = \prod_{i \in I} K_i$, $K^{\#} = \prod_{i \in I} K_i^{\#}$ où $K_i^{\#}$ est un corps, $\tau = (\tau_i)$, et $c = (c_i)$ pour tout i. Pour le paramétrage dans [82] I.7, la forme est décrite par

$$h_K((a_i)_{i\in I}|(b_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} [K_i : A]^{-1} \mathrm{tr}_{K_i/K_i^{\#}}(\tau_i(a_i)b_i c_i).$$

Autrement dit, nos paramètres c_i correspondent à $c_i[K_i : A]^{-1}$ selon la convention de [82].

3.4 Le cas de l'algèbre de Lie

On peut décrire les classes de conjugaison semi-simples régulières dans les algèbres de Lie des groupes classiques au moyen des données $(K/K^{\#}, x, c)$ où $\tau_K(x) = -x$, $\tau_K(c) = \epsilon c$.

– Pour un groupe symplectique $\mathrm{Sp}(W)$, on paramètre tous les éléments réguliers de cette manière. Les paramètres sont soumis à la condition

$$\dim_F K = \dim_F W.$$

– Pour un groupe orthogonal impair $\mathrm{SO}(V,q)$, on paramètre tous les éléments réguliers de cette manière. Les paramètres sont soumis à la condition qu'il existe un F-espace quadratique (V_0, q_0) de dimension 1 tel que

$$(V,q) \simeq (\mathrm{tr}\,_{K/F})_*((x,y) \mapsto \tau_K(x)yc) \oplus (V_0, q_0),$$

l'espace (V,q) est uniquement déterminé par le théorème de Witt.
– Pour un groupe orthogonal pair $\mathrm{SO}(V,q)$, on obtient seulement les éléments semi-simples réguliers qui n'ont pas de valeur propre nulle. Le paramètre correspond à deux orbites $\mathcal{O}^{\pm}$, mais on n'aura pas besoin de les distinguer. Les paramètres sont soumis à la condition

$$(V,q) \simeq (\mathrm{tr}\,_{K/F})_*((x,y) \mapsto \tau_K(x)yc).$$

– Pour un groupe unitaire $U(V,h)$, on paramètre tous les éléments réguliers de cette manière. Les paramètres sont soumis à la condition

$$(V,h) \simeq (\mathrm{tr}\,_{K/E})_*((x,y) \mapsto \tau_K(x)yc).$$

3.5 Conjugaison géométrique, le cas des corps locaux

Fixons un groupe classique U sur F.

Proposition 3.5.1. *Soient $\mathcal{O}(K/K^{\#}, x, c)$ et $\mathcal{O}(K'/K'^{\#}, x', c')$ deux classes de conjugaison semi-simple assez régulières dans $U(F)$. Elles appartiennent à la même classe de conjugaison géométrique si et seulement s'il existe un isomorphisme de F-algèbres à involutions*

$$\sigma : (K, \tau_K) \xrightarrow{\sim} (K', \tau_{K'})$$

tel que $\sigma(x) = x'$.

La même assertion reste valide pour les classes de conjugaison semi-simples régulières dans l'algèbre de Lie.

Autrement dit, le passage à conjugaison géométrique équivaut à oublier la donnée c.

Supposons que F est un corps local. Décomposons $(K/K^{\#}, x, c) = \bigoplus_{i\in I}(K_i/K_i^{\#}, x_i, c_i)$ comme dans 3.2.7. Posons $\mathrm{sgn}_{K_i/K_i^{\#}} : K_i^{\#\times} \to \mu_2$ le caractère associé à l'extension quadratique $K_i/K_i^{\#}$ si $i \in I^*$, et $\mathrm{sgn}_{K_i/K_i^{\#}} = 1$ si $i \notin I^*$. En tout cas, on a

$$\mathrm{sgn}_{K_i/K_i^{\#}}(a) = \begin{cases} 1, & \text{si } a \in N_{K_i/K_i^{\#}}(K_i^{\#}), \\ -1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a un isomorphisme

$$(\mathrm{sgn}_{K_i/K_i^{\#}})_{i\in I^*} : K^{\#\times}/N_{K/K^{\#}}(K^{\times}) \xrightarrow{\sim} \mu_2^{I^*}.$$

Posons d'ailleurs

$$\mathrm{sgn}_{K/K^{\#}} := \prod_{i\in I} \mathrm{sgn}_{K_i/K_i^{\#}} : K^{\#\times} \to \mu_2.$$

Supposons que U est un groupe classique et $(K/K^{\#}, x, c)$ paramètre une classe de conjugaison assez régulière $\mathcal{O}(K/K^{\#}, x, c)$ dans U. Soit $c' \in K^{\times}$ tel que $\tau(c') = \epsilon c'$, $\epsilon = -1$ dans le cas symplectique ou anti-hermitien et sinon $\epsilon = 1$. On dit que $\mathcal{O}(K/K^{\#}, x, c')$ existe dans U si $(K/K^{\#}, x, c')$ paramètre une classe de conjugaison dans U.

Proposition 3.5.2 ([82], I.7). *Si U est symplectique, alors $\mathcal{O}(K/K^{\#}, x, c')$ existe toujours dans U. Par conséquent les classes de conjugaison dans la classe de conjugaison géométrique contenant $\mathcal{O}(K/K^{\#}, x, c)$ sont en bijection avec $\mu_2^{I^*}$.*

Supposons F non archimédien. Si U est orthogonal ou unitaire, alors $\mathcal{O}(K/K^{\#}, x, c')$ existe dans U si et seulement si

$$\mathrm{sgn}_{K/K^{\#}}(c^{-1}c') = 1.$$

Les classes de conjugaison dans la classe de conjugaison géométrique contenant $\mathcal{O}(K/K^{\#}, x, c)$ sont en bijection avec

$$(\mu_2)_0^{I^*} := \{(t_i) \in \mu_2^{I^*} : \prod_i t_i = 1\}.$$

Les mêmes assertions restent valides pour l'algèbre de Lie.

4 Le caractère de la représentation de Weil

Sauf mention expresse du contraire, F est toujours un corps local de caractéristique nulle dans cette section.

4.1 Formules du caractère

Nous adoptons l'approche de [79] et nous utiliserons systématiquement la construction de Lion-Perrin dans cette section.

Désignons par $\overline{W}$ l'espace vectoriel symplectique $(W, -\langle\cdot|\cdot\rangle)$. Si $x \in \mathrm{Sp}(W)$, alors le graphe

$$\Gamma_x := \{(w, xw) : w \in W\}$$

est un lagrangien dans $\overline{W} \oplus W$. On a un plongement $f : \mathrm{Sp}(W) \to \mathrm{Sp}(\overline{W} \oplus W)$ donné par $f(x) = (1, x)$.

Proposition 4.1.1 ([79] 1.3). *Il existe un homomorphisme continu injectif*

$$\tilde{f} : \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W) \to \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(\overline{W} \oplus W)$$

donné par $\tilde{f}(x, t) = ((1, x), f_x(t))$ dans la construction de Lion-Perrin, où $f_x(t)$ est déterminé par

$$f_x(t)(\ell \oplus \ell) = t(\ell).$$

De plus, il rend le diagramme ci-dessous commutatif :

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W) \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] & \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(\overline{W} \oplus W) \arrow[d] \\ \mathrm{Sp}(W) \arrow[r, "f"'] & \mathrm{Sp}(\overline{W} \oplus W) \end{tikzcd}.$$

Définissons des ouverts de Zariski denses dans $\mathrm{Sp}(W)$:

$$\mathrm{Sp}(W)^\dagger := \{x \in \mathrm{Sp}(W) : \det(x - 1) \neq 0\},$$
$$\mathrm{Sp}(W)^\ddagger := \{x \in \mathrm{Sp}(W) : \det(x^2 - 1) \neq 0, \}.$$

On vérifie que $\mathrm{Sp}(W)^\dagger \supset \mathrm{Sp}(W)^\ddagger \supset \mathrm{Sp}(W)_{\mathrm{reg}}$. Posons $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W)^\dagger$, $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W)^\ddagger$, $\overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W)^\dagger$, $\overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W)^\ddagger$ leurs images réciproques dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W)$, $\overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W)$, respectivement, où $\mathbf{f} \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Fixons une mesure de Haar sur $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W)$. L'admissibilité de $\omega_\psi^\pm$ permet de définir le caractère $\Theta_\psi^\pm = \mathrm{tr}\,(\omega_\psi^\pm)$ comme une distribution sur $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W)$, d'où la distribution $\Theta_\psi = \mathrm{tr}\,(\omega_\psi)$. Énonçons les formules du caractère de Maktouf.

Théorème 4.1.2 (K. Maktouf [59])**.** *La distribution Θ_ψ est lisse sur $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W)^\dagger$. Si $\tilde{x} = (x,t) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W)^\dagger$, alors*

1. *en rappelant la définition de $\mathrm{ev}_{\Gamma_1}(\cdot)$ (I.2), on a*
$$\Theta_\psi(\tilde{x}) = \frac{\mathrm{ev}_{\Gamma_1}(\tilde{f}(\tilde{x}))}{|\det(x-1)|^{\frac{1}{2}}};$$
2. *en fixant $\ell \in \mathrm{Lagr}(W)$, on a aussi*
$$\Theta_\psi(x,t) = \frac{t(\ell)\gamma_\psi(\tau(\Gamma_x, \Gamma_1, \ell \oplus \ell))}{|\det(x-1)|^{\frac{1}{2}}};$$
3. *il y a une autre formule avec ambiguïté de signe :*
$$\Theta_\psi(\tilde{x}) = \pm \frac{\gamma_\psi(1)^{\dim W - 1}\gamma_\psi(\det(x-1))}{|\det(x-1)|^{\frac{1}{2}}}.$$

De plus, $|\det(x+1)|^{\frac{1}{2}}\Theta_\psi(\tilde{x})$ est localement constante sur $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W)^\dagger$.

Remarque 4.1.3. Si $F = \mathbb{C}$, on identifie $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W)$ à $\mu_2 \times \mathrm{Sp}(W)$. On a
$$\Theta_\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, x) = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{|\det(x-1)|_{\mathbb{C}}^{\frac{1}{2}}};$$
où la valeur absolue $|\cdot|_{\mathbb{C}}$ est définie par $|x+yi|_{\mathbb{C}} = x^2+y^2$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

Notons par le même symbole Θ_ψ le caractère de ω_ψ sur la grosse extension $\overline{\mathrm{Sp}}_\psi$, qui est bien défini comme une distribution. On en déduit une formule pour Θ_ψ au moyen du modèle de Schrödinger.

Corollaire 4.1.4. *Fixons $\ell \in \mathrm{Lagr}(W)$. Soit $\bar{x} = (x, zM_\ell[x]) \in \overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W)$ où $z \in \mathbb{C}^\times$ et $x \in \mathrm{Sp}(W)^\dagger$, alors*
$$\Theta_\psi(\bar{x}) = \frac{z\gamma_\psi(\tau(\Gamma_x, \Gamma_1, \ell \oplus \ell))}{|\det(x-1)|^{\frac{1}{2}}}.$$

Démonstration. Vu la spécificité de ω_ψ, il suffit de vérifier l'énoncé pour le cas $\bar{x} \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W)$. L'immersion $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W) \hookrightarrow \overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W)$ est donnée par $(x,t) \mapsto (x, t(\ell)M_\ell[x])$. Donc il suffit de vérifier le cas $z = t(\ell)$ et cela résulte immédiatement dudit théorème. □

Corollaire 4.1.5. *Supposons que $\mathbf{f} \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$. Si $\tilde{x}, \tilde{y} \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W)^\dagger$ sont tels que $x, y \in \mathrm{Sp}(W)$ sont géométriquement conjugués, alors il existe $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mu_{\mathbf{f}}$ tel que*
$$\Theta_\psi(\tilde{x}) = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \Theta_\psi(\tilde{y}).$$

Démonstration. Pour $\mathbf{f} = 2$, cela résulte de la troisième formule du théorème. Le cas général en découle par la spécificité du caractère. □

Corollaire 4.1.6. *Soit* $-1 \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(8)}(W)$ *l'élément défini dans 2.4.6. Alors*

$$\Theta_\psi(-1) = |2|^n.$$

Démonstration. Vu 4.1.4, il suffit de démontrer que

$$\tau(\Gamma_{-1}, \Gamma_1, \ell \oplus \ell) = 0$$

pour tout $\ell \in \mathrm{Lagr}(W)$. D'après 2.4.2, on a

$$\begin{aligned}
\dim \tau(\Gamma_{-1}, \Gamma_1, \ell \oplus \ell) =& \frac{\dim W \oplus \overline{W}}{2} \\
& - \dim \Gamma_{-1} \cap \Gamma_1 - \dim \Gamma_1 \cap (\ell \oplus \ell) - \dim(\ell \oplus \ell) \cap \Gamma_{-1} \\
& + 2 \dim \Gamma_1 \cap \Gamma_{-1} \cap (\ell \oplus \ell) \\
=& \dim W - 0 - \dim \ell - \dim \ell + 2 \cdot 0 \\
=& 0.
\end{aligned}$$

D'où l'assertion. □

Corollaire 4.1.7. *Fixons* $\ell \in \mathrm{Lagr}(W)$*, soit* P_ℓ *le stabilisateur de* ℓ *et* $\sigma_\ell : P_\ell(F) \to \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(8)}(W)$ *le scindage défini dans 2.4.13. Supposons que* $x \in \mathrm{Sp}(W)^\dagger$ *et qu'il existe* $\ell' \in \mathrm{Lagr}(W)$ *tel que* $W = \ell \oplus \ell'$ *et* $x \in M(F) := (P_\ell \cap P_{\ell'})(F)$*, alors*

$$\Theta_\psi(\sigma_\ell(x)) \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Démonstration. D'après 4.1.4 et la définition de σ_ℓ, il suffit de montrer que $\tau(\Gamma_x, \Gamma_1, \ell \oplus \ell) = 0$. En identifiant ℓ' à $\ell^\vee$, le dual de ℓ, on a $x = (y, {}^t y^{-1})$ où $y = x|_\ell$. Donc

$$\begin{aligned}
\Gamma_x \cap \Gamma_1 &= \{(w, w) : w \in W, x(w) = w\} \\
&\simeq \{v \in \ell, y(v) = v\}^{\oplus 2}, \\
\Gamma_1 \cap (\ell \oplus \ell) &= \{(w, w) : w \in \ell\} \simeq \ell, \\
(\ell \oplus \ell) \cap \Gamma_x &= \{(w, x(w)) : w \in \ell\} \simeq \ell, \\
\Gamma_x \cap \Gamma_1 \cap (\ell \oplus \ell) &= \{(w, w) : w \in \ell, x(w) = w\} \\
&\simeq \{v \in \ell, y(v) = v\}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\dim \tau(\Gamma_x, \Gamma_1, \ell \oplus \ell) = 0$ à l'aide de 2.4.2. □

Remarque 4.1.8. L'hypothèse est équivalente à : $x \in \mathrm{Sp}(W)^\dagger$ et x appartient à un facteur de Lévi M de P_ℓ. Ce corollaire caractérise le scindage de $\mathbf{p} : \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(8)}(W) \to \mathrm{Sp}(W)$ au-dessus de $M(F)$ car $\mathrm{Sp}(W)^\dagger \cap M(F)$ est dense dans $M(F)$.

4.2 Formules pour $\Theta_\psi^+ - \Theta_\psi^-$, la forme de Cayley

Proposition 4.2.1. *La distribution* $\Theta_\psi^+ - \Theta_\psi^-$ *est lisse sur* $\{\tilde{x} \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(8)}(W) : \det(x+1) \neq 0\}$*. Pour tout* $\tilde{x} \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(8)}(W)$ *tel que* $\det(x+1) \neq 0$*, on a*

$$(\Theta_\psi^+ - \Theta_\psi^-)(\tilde{x}) = (\Theta_\psi^+ + \Theta_\psi^-)((-1) \cdot \tilde{x}).$$

Ici -1 est l'élément défini dans 2.4.6.

Démonstration. Soit $S_\psi = S_\psi^+ \oplus S_\psi^-$ la décomposition de S_ψ selon $\omega_\psi = \omega_\psi^+ \oplus \omega_\psi^-$. On conclut par 2.4.7. □

Donnons un autre lien entre $\Theta_\psi^+ + \Theta_\psi^-$ et $\Theta_\psi^+ - \Theta_\psi^-$. Introduisons d'abord des formes quadratiques auxiliaires.

Définition 4.2.2. Pour tout $X \in \mathfrak{sp}(W)$ inversible, définissons une F-forme quadratique $q[X]$ sur W par

$$q[X](w_1|w_2) = \langle Xw_1|w_2\rangle.$$

Définition 4.2.3. Pour tout $x \in \mathrm{Sp}(W)^\ddagger$, définissons un élément C_x dans $\mathrm{End}(W)$ par

$$C_x := 2 \cdot \frac{x-1}{x+1}.$$

On vérifie que $C_x \in \mathfrak{sp}(W)$. Si x est semi-simple régulier alors C_x l'est aussi.

On appelle $q[C_x]$ la forme de Cayley.

Théorème 4.2.4 (T. Thomas [80])**.** *Si $\tilde{x} \in \overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W)^\ddagger$, alors*

$$\frac{\Theta_\psi^+ + \Theta_\psi^-}{\Theta_\psi^+ - \Theta_\psi^-}(\tilde{x}) = \gamma_\psi(q[C_x]) \cdot \left|\frac{\det(x+1)}{\det(x-1)}\right|^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. Par la spécificité de $\Theta_\psi^\pm$, il suffit de considérer le cas $m = 2$. Fixons $\ell \in \mathrm{Lagr}(W)$. Soit $\tilde{x} := (x,t) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W)^\ddagger$ une paire dans la construction de Perrin-Lion. Rappelons que l'on a défini une constante $m_{-1} := m_{-1}(\ell)$ dans la construction. On a $(x,t)(-1, m_{-1}) = (-x, m_{-1}t)$ car $\tau(\ell, \ell, x\ell) = 0$ par 2.4.2. D'après 4.1.2, on a

$$\Theta_\psi(x,t) = \frac{\mathrm{ev}_{\Gamma_1}(\tilde{f}(x,t))}{|\det(x-1)|^{1/2}},$$
$$\Theta_\psi(-x, m_{-1}t) = \frac{\mathrm{ev}_{\Gamma_1}(\tilde{f}(-x, m_{-1}t))}{|\det(x+1)|^{1/2}}.$$

Comme $\tilde{f}$ est un homomorphisme, on a

$$\mathrm{ev}_{\Gamma_1}(\tilde{f}(-x, m_{-1}t)) = \mathrm{ev}_{\Gamma_1}(\tilde{f}(x,t)) \cdot \mathrm{ev}_{\Gamma_1}(\tilde{f}(-1, m_{-1})) \cdot \gamma_\psi(\tau(\Gamma_1, \Gamma_x, \Gamma_{-x})).$$

On sait que

$$\begin{aligned}\mathrm{ev}_{\Gamma_1}(\tilde{f}(-1, m_{-1})) &= \mathrm{ev}_{\ell\oplus\ell}(\tilde{f}(-1, m_{-1}))\gamma_\psi(\tau(\ell\oplus\ell, \ell\oplus\ell, \Gamma_{-1}, \Gamma_1)), \\ &= m_{-1}(\ell)\end{aligned}$$

car $\tau(\ell\oplus\ell, \ell\oplus\ell, \Gamma_{-1}, \Gamma_1) = 0$ par 2.4.2.

Soit $-1 \in \overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W)$ l'élément défini dans 2.4.6, alors $(-1) \cdot (x,t) = m_{-1}(\ell)^{-1} \cdot (-x, m_{-1}t)$ comme un élément dans $\overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W)$, d'où $\Theta_\psi(-x, m_{-1}t) = m_{-1}(\ell)(\Theta_\psi^+ - \Theta_\psi^-)(x,t)$ par 4.2.1. En utilisant les formules ci-dessus, on arrive à

$$\frac{\Theta_\psi^+ + \Theta_\psi^-}{\Theta_\psi^+ - \Theta_\psi^-}(x,t) = \left|\frac{\det(x+1)}{\det(x-1)}\right|^{\frac{1}{2}} \gamma_\psi(\tau(\Gamma_1, \Gamma_x, \Gamma_{-x})).$$

Calculons $\gamma_\psi(\tau(\Gamma_1, \Gamma_x, \Gamma_{-x}))$. En vertu de l'invariance symplectique, on a $\tau(\Gamma_1, \Gamma_x, \Gamma_{-x}) \simeq \tau(\Gamma_{x^{-1}}, \Gamma_1, \Gamma_{-1})$. Posons $y := x^{-1}$, alors $C_y = -C_x$ et donc $q[C_y] \simeq -q[C_x]$. Il reste à prouver que $q[C_y]$ est isomorphe à $\tau(\Gamma_{-1}, \Gamma_y, \Gamma_1)$.

Puisque $\Gamma_1 \cap \Gamma_{-1} = \Gamma_1 \cap \Gamma_y = \{0\}$, on sait d'après [68] 1.4.2 que $\tau(\Gamma_{-1}, \Gamma_y, \Gamma_1)$ est Witt équivalent à la forme quadratique r sur Γ_y définie par

$$r(v) = \langle \pi_{\Gamma_{-1}}(v) | v \rangle_{\overline{W} \oplus W},$$

où $\pi_{\Gamma_{-1}}$ est la projection $\overline{W} \oplus W = \Gamma_1 \oplus \Gamma_{-1} \to \Gamma_{-1}$. Soit $v = (w, y(w))$ où $w \in W$. Posons

$$\begin{aligned} w_1 &:= \frac{1+y}{2}(w), \\ w_2 &:= \frac{1-y}{2}(w), \end{aligned}$$

de sorte que $(w, y(w)) = (w_1, w_1) + (w_2, -w_2)$. Alors $\pi_{\Gamma_{-1}}(v) = (w_2, -w_2)$, et

$$\begin{aligned} r(v) &= \langle (w_2, -w_2) | (w, y(w)) \rangle_{\overline{W} \oplus W} \\ &= -\langle w_2 | w \rangle - \langle w_2 | y(w) \rangle \\ &= \frac{-1}{2} \langle (1-y)w | (1+y)w \rangle. \end{aligned}$$

Après le changement de variable $w' = \frac{1}{2}(1+y)w$, la forme r est isomorphe à la forme r_1 sur W définie par :

$$r_1(w') = \langle 2(y-1)(y+1)^{-1} w' | w' \rangle = q[C_y](w'),$$

ce qui fallait démontrer. □

4.3 Paramètres et la forme de Cayley

Lemme 4.3.1. *Soit $K/K^\#$ une F-algèbre étale à involution. Pour tout $r \in K^{\#\times}$, soit $(K, q(r))$ le F-espace quadratique défini par*

$$q(r) := (\operatorname{tr}_{K^\#/K})_*(r N_{K/K^\#}(\cdot))$$

où on regarde $(K, N_{K/K^\#}(\cdot))$ comme un $K^\#$-espace quadratique. Alors pour tout $r, r' \in K^{\#\times}$,

$$\gamma_\psi(q(r')) = \gamma_\psi(q(r)) \operatorname{sgn}_{K/K^\#}\left(\frac{r}{r'}\right).$$

Démonstration. Écrivons

$$K = \prod_{i \in I} K_i$$

tels que les $K_i^\#$ sont des corps, comme dans 3.2.7. Écrivons aussi $r = (r_i)_i$. Alors

$$\operatorname{sgn}_{K/K^\#} = \prod_{i \in I^*} \operatorname{sgn}_{K_i/K_i^\#}.$$

Posons $\psi_i := \psi \circ \operatorname{tr}_{K_i^\#/F}$ pour $i \in I^*$. Alors

$$\gamma_\psi(q(r)) = \prod_{i \in I} \gamma_{\psi_i}(r_i N_{K_i/K_i^\#}(\cdot)),$$

Effectuons la même décomposition pour $q(r')$. Il suffira de démontrer que pour tout $i \in I$,

$$\gamma_{\psi_i}(r_i N_{K_i/K_i^\#}(\cdot)) = \gamma_{\psi_i}(r_i' N_{K_i/K_i^\#}(\cdot)) \cdot \operatorname{sgn}_{K_i/K_i^\#}\left(\frac{r_i}{r_i'}\right). \tag{I.3}$$

Prenons $d_i \in K_i^\times$ tel que $K_i = K_i^\#(\sqrt{d_i})$, alors $\det(r_i N_{K_i/K_i^\#}(\cdot)) = \det N_{K_i/K_i^\#}(\cdot) = -d_i$. D'autre part, l'invariant de Hasse $s(\cdot)$ satisfait à

$$\begin{aligned} s(r_i N_{K_i/K_i^\#}(\cdot)) &= (r_i, -r_i d_i)_{K_i^\#} \\ &= (r_i, -r_i)_{K_i^\#}(r_i, d_i)_{K_i^\#} \\ &= (r_i, d_i)_{K_i^\#}. \end{aligned}$$

Les mêmes formules restent valides si r_i est remplacé par r_i'.

On sait que ([56] 1.3.4) pour tout F-espace quadratique (E, Q), on a

$$\gamma_\psi(Q) = \gamma_\psi(1)^{\dim_F E - 1}\gamma_\psi(\det Q) s(Q).$$

Cela entraîne que

$$\gamma_\psi(r_i N_{K_i/K_i^\#}(\cdot)) = \gamma_\psi(r_i' N_{K_i/K_i^\#}(\cdot)) \cdot \left(\frac{r_i}{r_i'}, d_i\right)_{K_i^\#}.$$

Or $(\cdot, d_i)_{K_i^\#} = \mathrm{sgn}_{K_i/K_i^\#}$, cela démontre (I.3). □

Soit $X \in \mathfrak{sp}(W)$ semi-simple régulier tel que $X \in \mathcal{O}(K/K^\#, a, c)$. Désignons l'involution de K par τ, on a $\tau(a) = -a$, $\tau(c) = -c$. Alors on peut identifier $q[X]$ à la F-forme quadratique $q[a]$ sur K :

$$q[a] : (x, y) \mapsto -\mathrm{tr}_{K/F}(ac\tau(x)y).$$

Lemme 4.3.2. *Soit $c' \in K^\times$ tel que $\tau(c') = -c'$. Soit $X' \in \mathfrak{sp}(W)$ semi-simple tel que*

$$X' \in \mathcal{O}(K/K^\#, a, c').$$

Alors

$$\gamma_\psi(q[X']) = \gamma_\psi(q[X]) \cdot \mathrm{sgn}_{K/K^\#}(c'c^{-1}).$$

Démonstration. On conclut en appliquant 4.3.1 à $r := ac$ et $r' := ac'$. □

Corollaire 4.3.3. *Soient $x, y \in \mathrm{Sp}(W)$ semi-simples réguliers. Si*

$$x \in \mathcal{O}(K/K^\#, a, c)$$
$$y \in \mathcal{O}(K/K^\#, a, c')$$

alors

$$\gamma_\psi(q[C_x]) = \gamma_\psi(q[C_y]) \cdot \mathrm{sgn}_{K/K^\#}(c'c^{-1}).$$

Démonstration. On a

$$C_x \in \mathcal{O}\left(K/K^\#, 2 \cdot \frac{a-1}{a+1}, c\right)$$
$$C_y \in \mathcal{O}\left(K/K^\#, 2 \cdot \frac{a-1}{a+1}, c'\right).$$

On applique le lemme précédent pour conclure. □

Notre but principal est l'assertion suivante.

Théorème 4.3.4. *Soient P_X le polynôme caractéristique de $X \in \mathrm{End}_F(W)$ et $\dot{P}_X$ sa dérivée, alors*

$$\gamma_\psi(q[X]) = \gamma_\psi((-1)^{n-1})\gamma_\psi(\det X) \cdot \mathrm{sgn}_{K/K^\#}(c^{-1}\dot{P}_X(a)).$$

La démonstration se fait en plusieurs étapes. Traduisons d'abord tous les objets en termes de paramètres. On a $K \simeq F[T]/(P_X(T))$, et P_X est égal au polynôme caractéristique P_a de $a \in K$. Le déterminant $\det X$ est égal à $N_{K/F}(a)$. Observons aussi $\dot{P}_a(a) \in K^\times$. Posons $b := a^2$ et P_b son polynôme caractéristique, alors $K^\# = F[b]$ et

$$\begin{aligned} P_a(T) &= P_b(T^2), \\ \dot{P}_a(a) &= 2\dot{P}_b(b)a. \end{aligned}$$

On a $\dot{P}_X(X) \in \mathfrak{sp}(W)$ et sa classe de conjugaison est paramétrée par $(K/K^\#, \dot{P}_a(a), c)$. Il suffira donc de prouver

$$\gamma_\psi(q[a]) = \gamma_\psi((-1)^{n-1})\gamma_\psi(N_{K/F}(a))\mathrm{sgn}_{K/K^\#}(2c^{-1}\dot{P}_b(b)a). \tag{I.4}$$

D'après 4.3.3, les deux côtés de 4.3.4 varient de la même façon par rapport à c, donc il suffit d'établir (I.4) dans le cas où

$$c = \dot{P}_a(a) = 2\dot{P}_b(b)a. \tag{I.5}$$

La forme $q[a]$ est une F-forme quadratique sur le F-espace vectoriel K. On écrit un élément $w \in K$ comme $w = x + ya$ $(x, y \in K^\#)$, alors $q[a]$ s'écrit comme

$$\begin{aligned} w = x + ya \mapsto & -\mathrm{tr}_{K/F}(2b\dot{P}_b(b)N_{K/K^\#}(x+ya)) \\ &= -4\mathrm{tr}_{K^\#/F}(b\dot{P}_b(b)(x^2 - by^2)). \end{aligned}$$

En posant $x' = 2\dot{P}_b(b)by$, $y' = 2\dot{P}_b(b)x$, on obtient

$$q[a] \simeq (\mathrm{tr}_{K^\#/F})_*\langle \dot{P}_b(b)^{-1}, -\dot{P}_b(b)^{-1}b\rangle.$$

Les lemmes suivants sur la forme trace concluront la démonstration de (I.4).

Lemme 4.3.5. *Définissons*

$$g_0 + g_1T + \cdots + g_{n-1}T^{n-1} := P_b(T)/(T-b) \in K^\#[T].$$

Alors la base duale de $\{1, \ldots, b^{n-1}\}$ *par rapport à la forme trace* $(\mathrm{tr}_{K^\#/F})_*\langle 1\rangle : x \mapsto \mathrm{tr}_{K^\#/F}(x^2)$ *est*

$$\{\dot{P}_b(b)^{-1}g_0, \ldots, \dot{P}_b(b)^{-1}g_{n-1}\}.$$

Si l'on écrit $P_b(T) = h_0 + h_1T + \cdots + T^n$, *alors les* g_k *sont donnés par la formule*

$$g_k = \sum_{j=k+1}^{n} h_j b^{j-k-1}.$$

Démonstration. L'énoncé est bien connu dans le cas où $K^\#$ est un corps. Notre démonstration est aussi une variante de la démonstration traditionnelle. On a

$$\forall s = 0, \ldots, n-1, \quad \sum_{\beta \in \bar{F}: P_b(\beta)=0} \frac{P_b(T)}{T-\beta}\frac{\beta^s}{\dot{P}_b(\beta)} = T^s$$

car la différence des deux côtés est un polynôme sur $\bar{F}$ de degré $n-1$ qui s'annule en toute racine de P_b. Cela équivaut

$$\forall s = 0, \ldots, n-1, \ \operatorname{tr}_{K\#/F}\left(\frac{P_b(T)}{T-b}\frac{b^s}{\dot{P}_b(b)}\right) = T^s,$$

où $\operatorname{tr}_{K\#/F}(\cdots)$ signifie la trace appliquée à chaque coefficient d'un polynôme.

En comparant les coefficients, on obtient

$$\operatorname{tr}_{K\#/F}(\dot{P}_b(b)^{-1} g_k \cdot b^s) = \delta_{k,s}.$$

On vérifie la formule des g_k par $g_{n-1} = 1$ et la récurrence $g_{k-1} - bg_k = h_k$. □

Posons $m := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Lemme 4.3.6. *La F-forme quadratique*

$$q_1 := (\operatorname{tr}_{K\#/F})_* \langle \dot{P}_b(b)^{-1} \rangle$$

est isomorphe à

1. *$m\mathbb{H}$, si $n = 2m$.*
2. *$m\mathbb{H} \oplus \langle 1 \rangle$, si $n = 2m+1$.*

Démonstration. Prenons la base $\{g_0, \ldots, g_{n-1}\}$. Elle est duale à $\{1, b, \ldots, b^{n-1}\}$ par rapport à q_1 d'après 4.3.5. La matrice $Q := (q_1(g_i, g_j))_{i,j}$ est :

$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_{n-1} & 1 \\ h_2 & h_3 & \cdots & 1 & 0 \\ h_3 & h_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons que $\det Q = (-1)^m$ et $g_0, \ldots, g_{m-1}$ forment un sous-espace totalement isotrope de dimension m. Si $n = 2m$, alors $q_1 \simeq m\mathbb{H}$. Si $n = 2m+1$, alors il existe $a \in F^\times$ tel que $q_1 \simeq m\mathbb{H} \oplus \langle a \rangle$. En comparant les déterminants, on peut prendre $a = 1$. □

Lemme 4.3.7. *La F-forme quadratique*

$$q_2 := (\operatorname{tr}_{K\#/F})_* \langle b^{-1} \dot{P}_b(b)^{-1} \rangle$$

est isomorphe à

1. *$(m-1)\mathbb{H} \oplus \langle 1, -N_{K\#/F}(b) \rangle$, si $n = 2m$;*
2. *$m\mathbb{H} \oplus \langle N_{K\#/F}(b) \rangle$, si $n = 2m+1$.*

Démonstration. Prenons la base $\{bg_0, \ldots, bg_{n-1}\}$. Elle est duale à $\{1, b, \ldots, b^{n-1}\}$ par rapport à q_2 d'après 4.3.5. La matrice $Q_2 := (q_2(bg_i, bg_j))_{i,j}$ est :

$$\begin{pmatrix} -h_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & h_3 & \cdots & h_{n-1} & 1 \\ 0 & h_3 & h_4 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & h_4 & h_5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc q_2 se décompose en $q_2 = \langle -h_0 \rangle \oplus q_3$ selon les blocs.

La forme q_3 est déterminée de la même façon qu'en 4.3.6 : $q_3 \simeq m\mathbb{H}$ si $n = 2m+1$, $q_3 \simeq (m-1)\mathbb{H} \oplus \langle 1 \rangle$ si $n = 2m$.

D'autre part $-h_0 = (-1)^{n+1} N_{K\#/F}(b)$ d'après la description de 4.3.5. Ceci permet de conclure. □

Observons que $q_2 \simeq (\mathrm{tr}_{E\#/F})_* \langle b\dot{P}_b(b)^{-1} \rangle$.

Démonstration du théorème 4.3.4. Avec le choix de c fait en (I.5), on a vu que

$$q[a] \simeq q_1 \oplus -q_2,$$

où q_1, q_2 sont définies dans 4.3.6 et 4.3.7. En utilisant 4.3.6, 4.3.7 et le fait $N_{K/F}(a) = N_{K\#/F}(-b) = (-1)^n N_{K\#/F}(b)$, on arrive à

$$q[a] \simeq (n-1)\mathbb{H} \oplus \langle (-1)^{n-1}, N_{K/F}(a) \rangle.$$

D'où

$$\gamma_\psi(q[a]) = \gamma_\psi((-1)^{n-1}) \gamma_\psi(N_{K/F}(a)).$$

Puisque $\mathrm{sgn}_{K/K\#}(2c^{-1}\dot{P}_b(b)a) = 1$ avec notre choix de c, cela établit (I.4), donc finit la démonstration de 4.3.4. □

4.4 La formule via le modèle latticiel

Supposons désormais F non archimédien de caractéristique résiduelle $p > 2$ et fixons un $\mathfrak{o}_F$-réseau $L \subset W$ tel que $L = L^\perp$. Posons $K := \mathrm{Stab}_{\mathrm{Sp}(W)}(L)$. Le modèle latticiel (ρ_L, S_L) permet d'identifier K à un sous-groupe compact ouvert de $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W)$. On va étudier le comportement de Θ_ψ sur K.

Remarquons d'abord que le relèvement de $-1 \in K$ à $\overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W)$ est égal à l'élément -1 défini dans 2.4.6 d'après 2.4.12. Par conséquent, l'équation

$$\Theta_\psi(-x) = \Theta_\psi^+(x) - \Theta_\psi^-(x), \ x \in \mathrm{Sp}(W)^\ddagger \cap K$$

est vraie en deux sens : on peut considérer $-x$ comme un élément de K, relevé à $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W)$ au moyen du modèle latticiel, ou au sens de 4.2.1. Ceci justifie notre abus de notations.

Lemme 4.4.1. *Pour $x \in K \cap \mathrm{Sp}(W)^\dagger$, on a*

$$\Theta_\psi(x) = \sum_{\substack{\dot{w} \in W/L \\ (x-1)w \in L}} \psi\left(\frac{\langle x(w)|w \rangle}{2} \right),$$

qui est une somme finie si l'on fixe x.

Démonstration. Prenons un système de représentants $R \subset W$ de W/L et la base orthonormée $\{f_r\}_{r \in R}$ de S_L dans §2.4. Soit $\phi \in C_c^\infty(K \cap \mathrm{Sp}(W)^\dagger)$ quelconque. Pour $r \in R$, on a

$$\begin{aligned}(\omega_\psi(\phi)f_r)(r,0) &= \int_{K \cap \mathrm{Sp}(W)^\dagger} \phi(x)(\omega_\psi(x)f_r)(r,0)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{K \cap \mathrm{Sp}(W)^\dagger} \phi(x)\mathbb{1}_{E_r}(x)\psi\left(\frac{\langle r|x^{-1}(r)\rangle}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &(E_r := \{x \in K : x^{-1}(r) - r \in L\}, \text{qui est ouvert.})\end{aligned}$$

Si x est fixé, la somme sur tout $r \in R$ du terme intérieur est finie et bornée par

$$|\phi(x)| \cdot \#((x^{-1}-1)^{-1}L/L) = |\phi(x)| \cdot |\det(x^{-1}-1)|^{-1},$$

qui est uniformément borné dans $K \cap \mathrm{Sp}(W)^\dagger$. En utilisant le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\begin{aligned}\Theta_\psi(\phi) &= \sum_{r\in R} \int\limits_{K\cap\mathrm{Sp}(W)^\dagger} \phi(x)\mathbb{1}_{E_r}(x)\psi\left(\frac{\langle r|x^{-1}(r)\rangle}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{K\cap\mathrm{Sp}(W)^\dagger} \phi(x)\sum_{r\in R}\mathbb{1}_{E_r}(x)\psi\left(\frac{\langle r|x^{-1}(r)\rangle}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{K\cap\mathrm{Sp}(W)^\dagger} \phi(x) \sum_{\substack{r\in R\\ (x^{-1}-1)r\in L}} \psi\left(\frac{\langle r|x^{-1}(r)\rangle}{2}\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Le terme dans la somme ne dépend que de la classe de r mod L. On a $\langle r|x^{-1}(r)\rangle = \langle x(r)|r\rangle$, et $(x^{-1}-1)r \in L$ si et seulement si $(x-1)r \in L$ car $x \in K$. D'où le résultat cherché. □

Proposition 4.4.2. *Soit $x \in K \cap \mathrm{Sp}(W)^\dagger$. On a :*

1. *si $(x-1)(L) = L$, alors*
$$\Theta_\psi(x) = 1;$$
la condition est satisfaite lorsque $-x$ est topologiquement unipotent ;
2. *si x topologiquement unipotent, alors $x \in \mathrm{Sp}(W)^\ddagger$ et*
$$\Theta_\psi(x) = |\det(x-1)|^{-1/2} \cdot \gamma_\psi(q[C_x]).$$

Démonstration. Montrons la première assertion. Si $(x-1)L = L$, la somme dans 4.4.1 porte seulement sur l'élément 0, donc $\Theta_\psi(x) = 1$.

Supposons que $-x$ est topologiquement unipotent. Soit $\bar{x}$ l'image de x dans $\mathrm{End}_{\mathbb{F}_q}(L/\mathfrak{p}_F L)$. On a $(-\bar{x})^{q^m} = 1$ pourvu que m soit assez grand. Puisque q est impair, il en résulte que -1 n'est pas une valeur propre de $-\bar{x}$. Autrement dit : $(x-1)L = L$. Cela démontre la première assertion.

Montrons la dernière assertion. Soit $x \in \mathrm{Sp}(W)^\dagger \cap K$ topologiquement unipotent. L'argument pour la première assertion montre que $(x+1)L = L$; en particulier $|\det(x+1)| = 1$ et donc $x \in \mathrm{Sp}(W)^\ddagger$. Par 4.2.4 et 4.2.1, on en déduit

$$\begin{aligned}\Theta_\psi(x) &= \gamma_\psi(q[C_x])|\det(x-1)|^{-1/2}(\Theta_\psi^+ - \Theta_\psi^-)(-x) \\ &= \gamma_\psi(q[C_x])|\det(x-1)|^{-1/2}\Theta_\psi(-x).\end{aligned}$$

Or $\Theta_\psi(-x) = 1$ par la première assertion. D'où $\Theta_\psi(x) = |\det(x-1)|^{-1/2}\gamma_\psi(q[C_x])$. □

Corollaire 4.4.3. *Soit $x \in K \cap \mathrm{Sp}(W)^\dagger$ tel que sa réduction $\bar{x} \in \mathrm{Sp}(L/\mathfrak{p}L)$ est régulière, alors*

$$\Theta_\psi(x) = \Theta_\psi(-x) = 1.$$

Démonstration. Si $\bar{x}$ est régulière, alors $(x \pm 1)L = L$. □

Dans ce cas, on dit que x est de réduction régulière par rapport à L.

4.5 Formules sur l'algèbre de Lie

On peut obtenir une formule pour Θ_ψ sur l'algèbre de Lie, ce qui aura un intérêt indépendant. Soit $X \in \mathfrak{sp}(W)$ inversible. On fait l'une des hypothèses suivantes :

1. l'élément X est suffisamment proche de 0,
2. F est non archimédien de caractéristique résiduelle p assez grande par rapport à n ([84] 4.3), $p > 2$ et X est topologiquement nilpotent.

Alors il est loisible de définir $\exp(X)$ et $\exp(X) \in \mathrm{Sp}(W)^\ddagger$.

Lemme 4.5.1. *Supposons que X vérifie l'une des hypothèses ci-dessus. Soit $x = \exp(X) \in \mathrm{Sp}(W)^\ddagger$, alors*
$$q[C_x] \simeq q[X].$$

Démonstration. Il suffit de considérer le cas X semi-simple ; le cas général en résultera par continuité. Soit A la sous-algèbre commutative de $\mathrm{End}(W)$ engendrée par X. Pour $a \in A$, considérons son rayon spectral
$$\|a\| := \sup\{|\lambda|_F : \lambda \text{ est une valeur propre de } a\}.$$
C'est une norme sur A car X est semi-simple ; A est complète par rapport à $\|\cdot\|$.

On cherche une série formelle $P(T) \in F[[T]]$ dont le rayon de convergence est $> \|X\|$ telle que $P(X)$ est inversible et $q[2 \cdot \frac{x-1}{x+1}](v|w) = \langle XP(X)v|P(X)w\rangle$ pour tout $u, v \in W$. Cela équivaut à
$$P(X)P(-X)X = 2 \cdot \frac{\exp(X)-1}{\exp(X)+1},$$
ou
$$P(X)P(-X) = \frac{2}{X} \cdot \frac{\exp(X)-1}{\exp(X)+1}.$$
Le terme à droite est de la forme $1 + Q(X)$, où $Q(T) \in F[[T^2]]$ a un rayon de convergence $> \|X\|$ et $T|Q(T)$. Cela nous permet de définir
$$P(T) := \exp\left(\frac{1}{2}\log(1+Q(T))\right) \in F[[T^2]]$$
Cette série formelle a aussi un rayon de convergence $> \|X\|$. Donc $P(X)$ est inversible car il appartient à l'image de l'exponentielle. On a
$$P(T)P(-T) = P(T)^2 = 1 + Q(T) = \frac{2}{T} \cdot \frac{\exp(T)-1}{\exp(T)+1}.$$
On remplace T par X et cela permet de conclure. □

Corollaire 4.5.2. *Avec les mêmes hypothèses, il existe une constante c indépendante de X telle que*
$$\Theta_\psi(\tilde{x}) = \frac{c \cdot \gamma_\psi(q[X])}{|\det(x-1)|^{1/2}}.$$
où $\tilde{x} := \exp(X)$. Si l'hypothèse (2) est satisfaite, on a $c = 1$.

Démonstration. D'après 4.2.4, 4.2.1 et le lemme,
$$\begin{aligned}\Theta_\psi(\tilde{x}) &= \left|\frac{\det(x+1)}{\det(x-1)}\right|^{1/2} \gamma_\psi(q[C_x])(\Theta_\psi^+ - \Theta_\psi^-)(\tilde{x}) \\ &= \left|\frac{\det(x+1)}{\det(x-1)}\right|^{1/2} \gamma_\psi(q[X])\Theta_\psi(-\tilde{x}).\end{aligned}$$
Posons $c := |2|^n\Theta_\psi(-1)$. Lorsque X est assez petit, $\Theta_\psi(-\tilde{x}) = |\det(x+1)|^{-1/2}c$. Dans le cas où l'hypothèse (2) est satisfaite, on a $c = 1$. D'où le corollaire. □

4.6 Décompositions

Fixons $\mathbf{f} \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$. Supposons qu'il y a une décomposition orthogonale d'espaces symplectiques

$$W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r,$$

Alors il existe un homomorphisme canonique

$$\iota : \prod_{k=k}^{r} \mathrm{Sp}(W_k) \to \mathrm{Sp}(W).$$

On en déduit un homomorphisme recouvrant ι,

$$j : \prod_{k=1}^{r} \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W_k) \to \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W)$$

telle que $j^{-1}(\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W)^\dagger) = \prod_{k=1}^{r} \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W_k)^\dagger$. Pour $1 \leq k \leq r$, notons $\Theta_\psi^{[k]}$ le caractère de la représentation de Weil de $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W_k)$ attachée à ψ ; il est lisse sur $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W_k)^\dagger$. Le résultat découle de l'additivité symplectique de l'indice de Maslov.

Proposition 4.6.1. *Soient $\tilde{x}_k \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W_k)^\dagger$ pour $1 \leq k \leq r$, alors*

$$\Theta_\psi(j(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_r)) = \prod_{k=1}^{r} \Theta_\psi^{[k]}(\tilde{x}_k).$$

Supposons maintenant F non archimédien de caractéristique résiduelle $p > 2$. Fixons un réseau $L \subset W$ tel que $L = L^\perp$. Soient $L_k := W_k \cap L$. Supposons que $L = \bigoplus_{k=1}^{r} L_k$, alors $L_k^\perp = L_k$ dans W_k. Posons $K_k := \mathrm{Stab}_{\mathrm{Sp}(W_k)}(L_k)$.

Soit $x \in \mathrm{Sp}(W)^\dagger \cap K$ tel que $x(L_k) \subset L_k$ pour tout k. Il existe alors $x_k \in \mathrm{Sp}(W_k)^\dagger \cap K_k$ pour tout k tel que $\iota(x_1, \ldots, x_r) = x$. On regarde x (resp. les x_k) comme un élément de $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W)$ (resp. $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W_k)$) à l'aide du modèle latticiel associé à L (resp. L_k). La proposition suivant résulte immédiatement de 4.4.1.

Proposition 4.6.2. *Avec les hypothèses ci-dessus, on a*

$$\Theta_\psi(x) = \prod_{k=1}^{r} \Theta_\psi^{[k]}(x_k).$$

4.7 La formule du produit

Dans cette section on se place dans le cas global. Fixons $\mathbf{f} \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$. Rappelons que l'on a une immersion canonique $i : \mathrm{Sp}(W, F) \to \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W, \mathbb{A}) \subset \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W, \mathbb{A})$. On écrit $i(x) = [\tilde{x}_v]_v$ où $\tilde{x}_v \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W_v)$.

Définition 4.7.1. On dit que deux éléments $x = (x_v)_v$, $y = (y_v)_v$ dans $\mathrm{Sp}(W, \mathbb{A})$ sont localement géométriquement conjugués si pour toute place v, x_v et y_v dans $\mathrm{Sp}(W, F_v)$ sont géométriquement conjugués.

Théorème 4.7.2. *Soient* $x \in \mathrm{Sp}(W, F)$ *et* $\tilde{y} = [\tilde{y}_v] \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W, \mathbb{A})$ *tels que* y *est localement géométriquement conjugué à* x*. Supposons que* $\det(x-1) \neq 0$*. Alors* $\Theta_{\psi_v}(\tilde{y}_v) = 1$ *pour presque tout* v*, et le produit* $\prod_v \Theta_{\psi_v}(\tilde{y}_v)$ *est bien défini et à valeurs dans* $\mu_{\mathbf{f}}$*. On a aussi*

$$\prod_v \Theta_{\psi_v}(\tilde{x}_v) = 1.$$

De même, si $\det(x+1) \neq 0$ *alors les assertions ci-dessus restent valables avec* $(\Theta^+_{\psi_v} - \Theta^-_{\psi_v})$ *au lieu de* Θ_{ψ_v}.

Démonstration. Traitons d'abord le cas $\det(x-1) \neq 0$. Pour presque toute place finie v on a $L_v = L_v^\perp$, $\tilde{y}_v \in K_v$ et $(y_v - 1)(L_v) = L_v$, alors 4.4.2 entraîne que $\Theta_{\psi_v}(\tilde{y}_v) = 1$. Puisque les distributions locales Θ_{ψ_v} sont spécifiques, le produit $\prod_v \Theta_{\psi_v}(\tilde{y}_v)$ ne dépend pas du choix des $\tilde{y}_v$.

Fixons un lagrangien $\ell \in \mathrm{Lagr}(W)$. On plonge $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W, \mathbb{A})$ dans $\overline{\mathrm{Sp}}_\psi(W, \mathbb{A})$, alors

$$i(x) = (x, \bigotimes_v M_{\ell_v}[x])$$

d'après 2.5.2. La formule 4.1.4 entraîne que

$$\prod_v \Theta_{\psi_v}(\tilde{x}_v) = \prod_v \frac{\gamma_{\psi_v}(\tau(\Gamma_x, \Gamma_1, \ell \oplus \ell))}{|\det(x-1)|_v^{1/2}}.$$

Or $\prod_v |\det(x-1)|_v = 1$, et la réciprocité de Weil entraîne que

$$\prod_v \gamma_{\psi_v}(\tau(\Gamma_x, \Gamma_1, \ell \oplus \ell)) = 1$$

car l'espace quadratique $\tau(\Gamma_x, \Gamma_1, \ell \oplus \ell)$ est défini sur F. D'où la formule du produit de la première assertion. Soit $\tilde{y} = [\tilde{y}_v] \in \mathrm{Sp}(W, \mathbb{A})$ tel que y est localement géométriquement conjugué à x, on a $\Theta_{\psi_v}(\tilde{x}_v)\Theta_{\psi_v}(\tilde{y}_v)^{-1} \in \mu_{\mathbf{f}}$ pour toute place v d'après 4.1.5, cela démontre le reste.

Le cas $\det(x+1) \neq 0$ résulte du cas précédent, de 4.2.1 et de 2.5.3. □

5 Endoscopie

Désormais, fixons $\mathbf{f} \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$ et posons $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W) = \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W)$ pour W un F-espace symplectique où F est un corps local. De même, posons $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W, \mathbb{A}) = \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W, \mathbb{A})$ si F est un corps global.

5.1 Données endoscopiques elliptiques

Fixons F un corps local ou global de caractéristique 0 et fixons $(W, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un F-espace symplectique de dimension $2n$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Soient $n', n'' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n' + n'' = n$. Nous étudierons les groupes

$$\begin{aligned}
G &:= \mathrm{Sp}(W), \\
H = H_{n',n''} &:= H' \times H'', \quad \text{où} \\
H' &:= \mathrm{SO}(2n'+1), \\
H'' &:= \mathrm{SO}(2n''+1); \\
\tilde{G} &:= \begin{cases} \widetilde{\mathrm{Sp}}(W), & \text{lorsque } F \text{ est local,} \\ \widetilde{\mathrm{Sp}}(W, \mathbb{A}), & \text{lorsque } F \text{ est global.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ici $\mathrm{SO}(2m+1)$ ($m = n'$ ou n'') signifie le groupe orthogonal impair déployé associé à la forme quadratique sur F^{2m+1} :

$$(x_{-m}, \dots, x_0, \dots, x_m) \mapsto 2\sum_{i=1}^{m} x_i x_{-i} + x_0^2.$$

Notons $\mathbf{p} : \tilde{G} \to G(F)$ (resp. $\mathbf{p} : \tilde{G} \to G(\mathbb{A})$) le revêtement métaplectique si F est local (resp. global).

Une donnée endoscopique elliptique de $\tilde{G}$ est une paire (n', n'') comme ci-dessus. Désormais, fixons une telle donnée (n', n''). Le groupe $H := H_{n',n''}$ est le groupe endoscopique elliptique associé à (n', n''). Spécifions maintenant la correspondance de classes de conjugaison géométriques semi-simples.

Fixons des F-tores maximaux déployés $S' \subset H'$, $S'' \subset H''$ et posons $S = S' \times S''$, c'est un F-tore maximal déployé dans H. Fixons aussi des F-tores maximaux déployés $T' \subset \mathrm{Sp}(2n')$, $T'' \subset \mathrm{Sp}(2n'')$ et $T \subset \mathrm{Sp}(W)$. Ces objets sont uniques à F-conjugaison près.

Notons par $W^{H'}(S')$, $W^{H''}(S'')$, $W^{\mathrm{Sp}(2n')}(T')$, $W^{\mathrm{Sp}(2n'')}(T'')$, $W^G(T)$ les groupes de Weyl associés à ces tores maximaux, alors $W^H(S) = W^{H'}(S') \times W^{H''}(S'')$. Il y a des homomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} W^{H'}(S') &\xrightarrow{\sim} W^{\mathrm{Sp}(2n')}(T'), \\ W^{H''}(S'') &\xrightarrow{\sim} W^{\mathrm{Sp}(2n'')}(T''), \\ W^{\mathrm{Sp}(2n')}(T') \times W^{\mathrm{Sp}(2n'')}(T'') &\hookrightarrow W^{\mathrm{Sp}(2n)}(T), \end{aligned}$$

et des F-isomorphismes qui respectent les homomorphismes ci-dessus

$$\begin{aligned} \mu' :& S' \xrightarrow{\sim} T', \\ \mu'' :& S'' \xrightarrow{\sim} T'', \\ \nu :& T' \times T'' \xrightarrow{\sim} T. \end{aligned}$$

On obtient ainsi des F-morphismes, notés par les mêmes lettres :

$$\begin{aligned} \mu' :& S'/W^{H'}(S') \xrightarrow{\sim} T'/W^{\mathrm{Sp}(2n')}(T'), \\ \mu'' :& S''/W^{H''}(S'') \xrightarrow{\sim} T''/W^{\mathrm{Sp}(2n'')}(T''), \\ \nu :& T'/W^{\mathrm{Sp}(2n')}(T') \times T''/W^{\mathrm{Sp}(2n'')}(T'') \to T/W^G(T). \end{aligned}$$

Posons

$$\mu = \mu_{n',n''} := \nu \circ (\mathrm{id}, -\mathrm{id}) \circ (\mu', \mu'') : S/W^H(S) \to T/W^G(T). \tag{I.6}$$

Puisque G est simple et simplement connexe, μ donne naissance à une application, notée encore par μ :

$$\mu : \mathscr{C}^{\text{géo}}_{\text{ss}}(H(F)) \to \mathscr{C}^{\text{géo}}_{\text{ss}}(G(F)). \tag{I.7}$$

Cette application ne dépend pas du choix de F-tores maximaux. De plus, elle est à fibres finies car μ', μ'', ν le sont.

Définition 5.1.1. Si $\delta \in G(F)_{\text{ss}}$, $\gamma \in H(F)_{\text{ss}}$ sont tels que $\mu(\mathcal{O}^{\text{geo}}(\gamma)) = \mathcal{O}^{\text{geo}}(\delta)$, on dit que δ et γ se correspondent.

Remarque 5.1.2. Lorsque $n' = 0$ ou $n'' = 0$, μ est bijectif. C'est démontré dans [41] pour F un corps local, mais l'argument marche aussi sur un corps global.

Explicitons l'application μ en termes de paramètres.

Proposition 5.1.3. *Soit $\gamma \in H(F)_{ss} = H'(F)_{ss} \times H''(F)_{ss}$ tel que*

$$\gamma \in \mathcal{O}((K'/K'^{\#}, a', (V_{K'}, h_{K'}), (V'_{\pm}, q'_{\pm})) \oplus (K''/K''^{\#}, a'', (V_{K''}, h_{K''}), (V''_{\pm}, q''_{\pm}))),$$

alors un élément $\delta \in G(F)_{ss}$ lui correspond si et seulement si $\mathcal{O}(\delta)$ est paramétré par

$$\mathcal{O}(K/K^{\#}, (a', -a''), (W_K, h_K), (W_{\pm}, \langle\cdot|\cdot\rangle_{\pm}))$$

où $K := K' \times K''$ comme F-algèbres étales à involution, et les autres données sont soumises aux conditions

$$\begin{aligned} W_K \simeq V_{K'} \oplus V_{K''} &\quad \textit{comme } K-\textit{modules}, \\ \dim_F W_+ + 1 = \dim_F V'_+ + \dim_F V''_-&, \\ \dim_F W_- + 1 = \dim_F V'_- + \dim_F V''_+&. \end{aligned}$$

Démonstration. L'application μ' induit une application $\mathscr{C}_{\mathrm{ss}}^{\text{géo}}(H'(F)) \to \mathscr{C}_{\mathrm{ss}}^{\text{géo}}(\mathrm{Sp}(2n', F))$ qui envoie une classe de valeurs propres

$$a'_1, \ldots, a'_{n'}, 1, (a'_{n'})^{-1}, \ldots, (a'_1)^{-1}$$

sur une classe de valeurs propres

$$a'_1, \ldots, a'_{n'}, (a'_{n'})^{-1}, \ldots, (a'_1)^{-1}.$$

Il en est de même pour μ'' avec n'' au lieu de n'.

D'autre part ν induit une application $\mathscr{C}_{\mathrm{ss}}^{\text{géo}}(\mathrm{Sp}(2n', F)) \times \mathscr{C}_{\mathrm{ss}}^{\text{géo}}(\mathrm{Sp}(2n'', F)) \to \mathscr{C}_{\mathrm{ss}}^{\text{géo}}(G(F))$ préservant les valeurs propres. L'assertion en résulte par la construction de μ (I.6), (I.7). □

Définition 5.1.4. On dit qu'un élément $\gamma \in H(F)_{\mathrm{ss}}$ est G-régulier si $\mu(\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(\gamma))$ est régulier. On note l'ouvert de Zariski des éléments G-réguliers par $H_{G-\mathrm{reg}}$.

Si $\gamma = (\gamma', \gamma'')$ est G-régulier, alors γ' et γ'' sont assez réguliers.

Corollaire 5.1.5. *Deux éléments $\gamma = (\gamma', \gamma'') \in H_{G-reg}(F)$ et $\delta \in G_{reg}(F)$ se correspondent si et seulement s'ils admettent des paramètres de la forme suivante*

$$\begin{aligned} \gamma' &\in \mathcal{O}(K'/K'^{\#}, a', c') \\ \gamma'' &\in \mathcal{O}(K''/K''^{\#}, a'', c'') \\ \delta &\in \mathcal{O}(K/K^{\#}, (a', -a''), c) \end{aligned}$$

où $K = K' \times K''$ comme F-algèbres étales à involution. Il n'y a pas de restrictions sur les données c', c'', c.

Enfin, la formation de l'application μ est compatible aux complétions.

5.2 Une notion de stabilité

Supposons que F est un corps local. Soient $\delta \in G_{\mathrm{reg}}(F)$ et T l'unique F-tore maximal contenant δ. Alors $\mathcal{D}(\delta) := \mathcal{O}^{\mathrm{st}}(\delta)/\mathrm{conj}$ est un torseur sous $H^1(F,T)$. Explicitons cette action. Si $\mathcal{O}(\delta)$ est paramétré par $(K/K^{\#}, a, c)$, $K = \prod_{i \in I} K_i$, alors on a des isomorphismes canoniques

$$H^1(F,T) \simeq K^{\#\times}/N_{K/K^{\#}}(K^{\times}) \xrightarrow[(\mathrm{sgn}_i)_{i\in I}]{\sim} \mu_2^{I_*}$$

où $\mathrm{sgn}_i := \mathrm{sgn}_{K_i/K_i^{\#}}$. D'autre part $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(\delta)/\mathrm{conj}$ est isomorphe au même ensemble, sur lequel $H^1(F,T)$ agit par multiplication.

Définition 5.2.1. Soient $\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2 \in \tilde{G}_{\mathrm{reg}}$, on dit qu'ils sont stablement conjugués si leurs images dans $G(F)$ sont stablement conjugués et si

$$(\Theta^+_\psi - \Theta^-_\psi)(\tilde{\delta}_1) = (\Theta^+_\psi - \Theta^-_\psi)(\tilde{\delta}_2).$$

Soit $\tilde{\delta} \in \tilde{G}_{\mathrm{reg}}$, notons $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(\tilde{\delta})$ l'ensemble d'éléments dans $\tilde{G}_{\mathrm{reg}}$ stablement conjugués à $\tilde{\delta}$. On définit $\mathcal{D}(\tilde{\delta}) := \mathcal{O}^{\mathrm{st}}(\tilde{\delta})/\mathrm{conj}$.

Pour $F = \mathbb{R}$, cette notion *ad hoc* coïncide avec celle d'Adams ([2] 8.10) si l'on se restreint à $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W)$. Pour $F = \mathbb{C}$, on identifie $\tilde{G}$ à $\mathrm{Ker}\,(\mathbf{p}) \times G(\mathbb{C})$. Deux éléments réguliers $(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \delta_1), (\boldsymbol{\varepsilon}_2, \delta_2)$ sont stablement conjugués si et seulement si δ_1, δ_2 le sont et $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}_2$, d'après 4.1.3.

Lemme 5.2.2. *Soit $\tilde{\delta} \in \tilde{G}_{reg}$, alors $\mathbf{p} : \tilde{G} \to G(F)$ induit une bijection $\mathcal{D}(\tilde{\delta}) \to \mathcal{D}(\delta)$.*

Démonstration. Soit $\delta_1 \in \mathcal{O}^{\mathrm{st}}(\delta)$ et $\tilde{\delta}_1 \in \mathbf{p}^{-1}(\delta_1)$ quelconque. D'après 4.1.5, il existe $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathrm{Ker}\,(\mathbf{p})$ tel que

$$(\Theta^+_\psi - \Theta^-_\psi)(\tilde{\delta}_1) = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\Theta^+_\psi - \Theta^-_\psi)(\tilde{\delta}).$$

Or $\Theta^+_\psi - \Theta^-_\psi$ est spécifique, donc il existe un unique $\tilde{\delta}_1 \in \mathbf{p}^{-1}(\delta_1)$ stablement conjugué à $\tilde{\delta}$. Cela permet de conclure. □

Soient $\tilde{\delta}, \tilde{\delta}_1$ stablement conjugués. Notons T le F-tore maximal contenant δ, on pose $\mathrm{inv}(\tilde{\delta}, \tilde{\delta}_1) := \mathrm{inv}(\delta, \delta_1)$; c'est l'unique élément $c \in H^1(F,T)$ tel que $c \cdot \delta = \delta_1$.

Remarque 5.2.3. La notion de stabilité est compatible avec la restriction : si $\mathbf{f}, \mathbf{f}' \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\mathbf{f}|\mathbf{f}'$ et $\tilde{\delta}, \tilde{\delta}_1 \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W)_{\mathrm{reg}}$, alors $\tilde{\delta}$ et $\tilde{\delta}_1$ sont stablement conjugués dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W)$ si et seulement s'ils sont stablement conjugués dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f}')}(W)$.

5.3 Facteur de transfert

Sauf mention expresse du contraire, dans cette section F est toujours un corps local.

Soient $\tilde{\delta} \in \tilde{G}_{\mathrm{reg}}$, $\gamma = (\gamma', \gamma'') \in H_{G-\mathrm{reg}}(F)$ tels que δ et γ se correspondent. Supposons que

$$\gamma' \in \mathcal{O}(K'/K'^{\#}, a', c'),$$
$$\gamma'' \in \mathcal{O}(K''/K''^{\#}, a'', c'');$$

alors on a une unique décomposition orthogonale $W = W' \oplus W''$ stable par δ telle que si l'on pose $\delta' := \delta|_{W'}$, $\delta'' := \delta|_{W''}$, alors

$$\delta' \in \mathcal{O}(K'/K'^{\#}, a', c')$$
$$\delta'' \in \mathcal{O}(K''/K''^{\#}, -a'', c'').$$

On a un diagramme commutatif associé à $W = W' \oplus W''$:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathrm{Sp}}(W') \times \widetilde{\mathrm{Sp}}(W'') \arrow[r, "j"] \arrow[d, "(\mathbf{p}',\mathbf{p}'')"'] & \widetilde{\mathrm{Sp}}(W) \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{Sp}(W') \times \mathrm{Sp}(W'') \arrow[r, hook, "\iota"'] & \mathrm{Sp}(W) \end{tikzcd}$$

et il existe $\tilde{\delta}' \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(W')$, $\tilde{\delta}'' \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(W'')$ tels que $j(\tilde{\delta}', \tilde{\delta}'') = \tilde{\delta}$, $\iota(\delta', \delta'') = \delta$. La paire (δ', δ'') est unique et appartient à $\mathrm{Sp}(W')_{\mathrm{reg}} \times \mathrm{Sp}(W'')_{\mathrm{reg}}$. Par contre la paire $(\tilde{\delta}', \tilde{\delta}'')$ est unique à multiplication par $\{(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{-1}) : \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathrm{Ker}\,(\mathbf{p})\}$ près.

Définition 5.3.1. Avec les hypothèses ci-dessus, définissons

$$\begin{aligned} \Delta'(\tilde{\delta}') &:= \frac{\Theta'^{+}_{\psi} - \Theta'^{-}_{\psi}}{|\Theta'^{+}_{\psi} - \Theta'^{-}_{\psi}|}(\tilde{\delta}'), \\ \Delta''(\tilde{\delta}'') &:= \frac{\Theta''^{+}_{\psi} + \Theta''^{-}_{\psi}}{|\Theta''^{+}_{\psi} + \Theta''^{-}_{\psi}|}(\tilde{\delta}''), \\ \Delta_0(\delta', \delta'') &:= \mathrm{sgn}_{K''/K''^{\#}}(P_{a'}(a'')(-a'')^{-n'} \det(\delta' + 1)), \end{aligned}$$

où $\Theta'^{\pm}_{\psi}$ (resp. $\Theta''^{\pm}_{\psi}$) sont les caractères définis sur $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W')$ (resp. $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W'')$), et $P_{a'}(T) \in F[T]$ est le polynôme caractéristique de $a' \in K'^{\times}$ (qui est aussi le celui de $\delta' \in \mathrm{End}_F(W')$). Remarquons que $P_{a'}(a'')(-a'')^{-n'} \in K''^{\#\times}$. En effet, $P_{a'}(T)(T)^{-n'} \in F[T + T^{-1}]$ car $\tau(a') = a'^{-1}$ où τ est l'involution de K', et la régularité de δ entraîne que $P_{a'}(a'') \neq 0$.

Le facteur de transfert est défini par

$$\Delta(\gamma, \tilde{\delta}) := \Delta_0(\delta', \delta'')\Delta'(\tilde{\delta}')\Delta''(\tilde{\delta}'').$$

Comme Δ', Δ'' sont des distributions spécifiques, $\Delta(\gamma, \tilde{\delta})$ est bien défini. Ce ne dépend que de $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(\gamma)$ et $\mathcal{O}(\tilde{\delta})$, et le terme Δ_0 ne dépend que de $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(\gamma)$.

Définissons $\Delta(\gamma, \tilde{\delta}) = 0$ si γ et δ ne se correspondent pas. Cela définit une fonction Δ sur $H_{G-\mathrm{reg}}(F) \times \tilde{G}_{\mathrm{reg}}$.

Remarque 5.3.2. Le terme Δ_0 est trivial lorsque $n' = 0$ ou $n'' = 0$. Lorsque $F = \mathbb{R}$ et $n'' = 0$, Δ coïncide avec le facteur de transfert défini par Adams [2], quitte à se restreindre à $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(2)}(W)$. Lorsque $F = \mathbb{C}$, Δ est trivial.

Déduisons d'autres formules utiles pour Δ.

Proposition 5.3.3. *On a aussi*

$$\begin{aligned} \Delta(\gamma, \tilde{\delta}) &= \Delta_0(\delta', \delta'') \cdot \frac{\Theta^{+}_{\psi} - \Theta^{-}_{\psi}}{|\Theta^{+}_{\psi} - \Theta^{-}_{\psi}|}(\tilde{\delta}) \cdot \gamma_{\psi}(q[C_{\delta''}]) \\ &= \Delta_0(\delta', \delta'') \cdot \frac{\Theta^{+}_{\psi} + \Theta^{-}_{\psi}}{|\Theta^{+}_{\psi} + \Theta^{-}_{\psi}|}(\tilde{\delta}) \cdot \gamma_{\psi}(q[C_{\delta'}])^{-1}. \end{aligned}$$

Démonstration. Cela résulte de 4.2.4 et 4.6.1. □

Proposition 5.3.4 (Spécificité)**.** Δ *est spécifique au sens suivant*

$$\forall \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathrm{Ker}\,(\mathbf{p}), \quad \Delta(\gamma, \boldsymbol{\varepsilon}\tilde{\delta}) = \boldsymbol{\varepsilon}\Delta(\gamma, \tilde{\delta}).$$

Démonstration. On utilise la première formule de 5.3.3. Les termes $\Delta_0(\delta', \delta'')$ et $\gamma_\psi(q[C_{\delta''}])$ ne dépendent que de δ, pourtant le terme $(\Theta^+_\psi - \Theta^-_\psi)(\tilde{\delta})/|\cdots|$ est spécifique. Cela permet de conclure. □

Maintenant soit T le F-tore maximal contenant δ, et $T = T' \times T''$ la décomposition correspondant à $\delta = i(\delta', \delta'')$. Décomposons les F-algèbres étales dans les paramètres pour δ', δ'' comme

$$K' = \prod_{i \in I'} K'_i,$$
$$K'' = \prod_{i \in I''} K''_i.$$

Cela nous permet d'écrire

$$H^1(F, T') = \mu_2^{I'^*},$$
$$H^1(F, T'') = \mu_2^{I''^*}.$$

Comme l'endoscopie pour les groupes réductifs, on dispose de la notion du caractère endoscopique $\kappa = \kappa_T : H^1(F, T) \to \mu_2$. Vu l'identification ci-dessus, c'est défini par

$$\kappa : \mu_2^{I'^*} \times \mu_2^{I''^*} \longrightarrow \mu_2$$
$$((t'_i)_{i \in I'^*}, (t''_i)_{i \in I''^*}) \longmapsto \prod_{i \in I''^*} t''_i.$$

Proposition 5.3.5 (Propriété de cocycle)**.** *Conservons le formalisme ci-dessus. Si $\tilde{\delta}$ est stablement conjugué à $\tilde{\delta}_1$, alors*

$$\Delta(\gamma, \tilde{\delta}_1) = \langle \kappa, \mathrm{inv}(\tilde{\delta}, \tilde{\delta}_1) \rangle \Delta(\gamma, \tilde{\delta}).$$

Démonstration. On utilise la première formule de 5.3.3. Le terme Δ_0 ne dépend que de $(K'/K'^{\#}, a')$ et $(K''/K''^{\#}, a'')$, donc la stabilité n'y intervient pas. D'autre part $\Theta^+_\psi - \Theta^-_\psi$ est constante sur une classe de conjugaison stable par définition. Il suffit de traiter le terme $\gamma_\psi(q[C_{\delta''}])$. L'assertion résulte immédiatement de 4.3.3. □

Remarque 5.3.6. Si F est global, les caractères locaux définis ci-dessus s'assemblent, par la théorie du corps du classes, en un caractère

$$\kappa_T : H^1(\mathbb{A}/F, T) \to \mu_2$$

avec la notation de [49] §1.4. Ceci sera utile pour la stabilisation de la formule des traces.

Considérons la question de la normalisation (cf. [84] 4.6). Pour l'instant, supposons que F est non archimédien de caractéristique résiduelle $p > 2$ et ψ est de conducteur $\mathfrak{o}_F$. Fixons un réseau autodual $L \subset W$ et le sous-groupe hyperspécial associé $K \subset G(F)$. Fixons aussi un sous-groupe hyperspécial K_H de $H(F)$. Supposons qu'il existe $\gamma \in K_H$, $\delta \in K$ qui se correspondent tels que γ, δ sont de réductions régulières. De tels choix existent.

Proposition 5.3.7 (Normalisation à la Waldspurger)**.** *Pour (γ, δ) comme ci-dessus, on a $\Delta(\gamma, \delta) = 1$.*

Démonstration. Il existe une décomposition $L = L' \oplus L''$ où $L' = W' \cap L$, $L'' = W'' \cap L$ par nos hypothèses. Soient $K' \subset \mathrm{Sp}(W')$, $K'' \subset \mathrm{Sp}(W'')$ les sous-groupes hyperspéciaux associés, alors $\delta' \in K'$, $\delta'' \in K''$ et ils sont de réductions régulières.

Montrons que $\Delta_0(\delta', \delta'')$, $\Delta'(\delta')$ et $\Delta''(\delta'')$ sont tous 1. C'est clair pour Δ_0 ; pour Δ' et Δ'', on utilise 4.4.3. □

Proposition 5.3.8 (Symétrie)**.** *Notons $\Delta_{n',n''}$ le facteur de transfert associé à la paire (n', n'') et $\Delta_{n'',n'}$ celui associé à (n'', n'). Pour tous $\gamma = (\gamma', \gamma'') \in H(F)$ et $\delta \in G(F)$ qui se correspondent, on a*

$$\Delta_{n',n''}((\gamma', \gamma''), \tilde{\delta}) = \Delta_{n'',n'}((\gamma'', \gamma'), -\tilde{\delta}) \quad \textit{si } 8|\mathbf{f}$$

où $-1 \in \tilde{G}$ est celui défini dans 2.4.6. Plus précisément, on a

$$\Delta'_{(n',n'')}(\tilde{\delta}')\Delta''_{(n',n'')}(\tilde{\delta}'') = \Delta'_{(n'',n')}(-\tilde{\delta}'')\Delta''_{(n'',n')}(-\tilde{\delta}''), \quad \textit{si } 8|\mathbf{f};$$
$$\Delta_{0,(n',n'')}(\delta', \delta'') = \Delta_{0,(n'',n')}(-\delta'', -\delta'), \quad \mathbf{f} \textit{ quelconque.}$$

Démonstration. L'assertion pour $\Delta'\Delta''$ résulte de 4.2.1. L'assertion pour Δ_0 sera démontrée en 7.4.6. □

Enfin, on dispose aussi d'une formule du produit. Supposons F global, $\psi : \mathbb{A}/F \to \mathbb{S}^1$ un caractère non-trivial avec décomposition $\psi = \prod_v \psi_v$. On a défini un facteur de transfert Δ_v pour toute place v.

Proposition 5.3.9 (Formule du produit)**.** *Soient $\gamma \in H_{G-reg}(F)$ et $\delta \in G(F)$ qui se correspondent. Soit $i(\delta) = [\tilde{\delta}_v]_v$, alors :*
- *pour presque toute place v, on a $\Delta_v(\gamma, \tilde{\delta}_v) = 1$;*
- *$\prod_v \Delta_v(\gamma, \tilde{\delta}_v) = 1$.*

Démonstration. Dans ce cas-là, on a une décomposition $W = W' \oplus W''$ et des éléments $\delta' \in \mathrm{Sp}(W')_{\mathrm{reg}}, \delta'' \in \mathrm{Sp}(W'')_{\mathrm{reg}}$ tels que $\iota(\delta', \delta'') = \delta$. Tous ces objets sont définis sur F. Vu la formule du produit pour Δ', Δ'' (4.7.2), il reste à prouver :
- pour presque toute place v, on a $\Delta_{0,v}(\delta', \delta'') = 1$;
- $\prod_v \Delta_{0,v}(\delta', \delta'') = 1$.

Supposons que $\delta' \in \mathcal{O}(K'/K'^{\#}, a', c')$, $\delta'' \in \mathcal{O}(K''/K''^{\#}, a'', c'')$. Posons d'autre part

$$\alpha'' := P_{a'}(a'')(-a'')^{-n'} \det(1 + a') \in K''^{\#\times}.$$

La formation de α'' est compatible à complétion. Il s'agit de montrer que

$$\prod_v \mathrm{sgn}_{K''_v/K''^{\#}_v}(\alpha'') = 1$$

où K''_v est la complétée de K'' comme une F-algèbre étale à involution. C'est une conséquence de la théorie des corps du classes. □

5.4 Descente parabolique

Supposons maintenant que $8|\mathbf{f}$. Rappelons que les sous-groupes de Lévi de H sont de la forme

$$M_H = \prod_{i \in I} (\mathrm{GL}(n'_i) \times \mathrm{GL}(n''_i)) \times H^\flat \tag{I.8}$$

où I est un ensemble fini, $H^\flat = \mathrm{SO}(2m'+1)\times\mathrm{SO}(2m''+1)$ avec $(m', m'') \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0}$, les $(n'_i, n''_i) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ sont tels que $\sum_{i\in I} n'_i + m' = n'$, $\sum_{i\in I} n''_i + m'' = n''$. Le plongement de M_H dans H est défini par $\prod_i \mathrm{GL}(n'_i) \times \mathrm{SO}(2m'+1) \hookrightarrow \mathrm{SO}(2n'+1)$ et $\prod_i \mathrm{GL}(n''_i) \times \mathrm{SO}(2m''+1) \hookrightarrow \mathrm{SO}(2n''+1)$. Posons $m = m' + m''$. On dit qu'un sous-groupe de Lévi M de G correspond à (M_H, H) s'il est de la forme

$$M = \prod_{i\in I} \mathrm{GL}(n_i) \times G^\flat, \tag{I.9}$$

où $G^\flat := \mathrm{Sp}(W^\flat)$ avec $W^\flat$ un F-espace symplectique de dimension $2m$ tel que $n'_i + n''_i = n_i$ pour tout $i \in I$.

Fixons M_H et supposons M associé à (M_H, H). À l'aide des décompositions ci-dessus, on écrit les éléments de $M(F)$ comme $((\delta_i)_{i\in I}, \delta^\flat)$ et on écrit les éléments de $M_H(F)$ comme $((\gamma_i)_{i\in I}, \gamma^\flat)$. Notons $\tilde{G}^\flat$ la fibre de $\mathbf{p} : \tilde{G} \to G(F)$ au-dessus de $G^\flat(F)$, alors $\mathbf{p} : \tilde{G}^\flat \to G^\flat(F)$ est le revêtement métaplectique et $H^\flat$ est un groupe endoscopique elliptique de $\tilde{G}^\flat$ déterminé par la paire (m', m''). Le revêtement p se scinde canoniquement sur les composantes $\mathrm{GL}(n_i)$ par 3.3.4,2.4.13 et 4.1.8, il y a donc un isomorphisme canonique

$$j : \prod_i \mathrm{GL}(n_i) \times \tilde{G}^\flat \xrightarrow{\sim} \mathbf{p}^{-1}(M(F)).$$

Pour $\tilde{\delta} \in \mathbf{p}^{-1}(\delta)$, notons $\tilde{\delta}^\flat \in \tilde{G}^\flat$ l'élément tel qu'il existe (δ_i) avec $j((\delta_i), \tilde{\delta}^\flat) = \tilde{\delta}$.

Un élément dans $M(F)_{\mathrm{ss}}$ est dit G-régulier s'il est régulier dans G. On note $M_{G-\mathrm{reg}}$ l'ouvert de Zariski des éléments G-réguliers. Un élément $\gamma \in M_H(F)_{\mathrm{ss}}$ est dit G-régulier s'il existe $\delta \in M_{G-\mathrm{reg}}(F)$ qui lui correspond.

Proposition 5.4.1 (Descente parabolique du facteur de transfert)**.** *Soient M_H un sous-groupe de Lévi de H et M un sous-groupe de Lévi de G qui correspond à (M_H, H). Soient $\gamma \in M_H(F)$ et $\delta \in M_{G-reg}(F)$ qui se correspondent comme éléments dans $H(F)$ et $G(F)$. Alors $\gamma^\flat$ et $\delta^\flat$ se correspondent. Notons $\Delta_{H,\tilde{G}}$ et $\Delta_{H^\flat,\tilde{G}^\flat}$ les facteurs de transfert associés à (G, H) et $(G^\flat, H^\flat)$, alors*

$$\Delta_{H,\tilde{G}}(\gamma, \tilde{\delta}) = \Delta_{H^\flat,\tilde{G}^\flat}(\gamma^\flat, \tilde{\delta}^\flat)$$

pour tout $\tilde{\delta} \in \mathbf{p}^{-1}(\delta)$. Plus précisément, cette propriété est satisfaite pour tous les deux facteurs $\Delta'\Delta''$ et Δ_0.

Démonstration. Pour le terme $\Delta'\Delta''$, observons que, d'après 4.6.1, 3.3.4 et 4.1.7, on a

$$\Theta_\psi(j((\delta_i), \tilde{\delta}^\flat)) = \Theta_\psi(\tilde{\delta}^\flat)$$

où le terme à gauche est défini par rapport à $\tilde{G}^\flat$. Par 5.3.3, on voit que

$$\Delta'(\tilde{\delta}')\Delta''(\tilde{\delta}'') = \frac{\Theta_\psi(\tilde{\delta}^\flat)}{|\Theta_\psi(\tilde{\delta}^\flat)|}\gamma_\psi(q[C_{\delta''}]).$$

Or les classes de conjugaison des composantes δ_i donnent des formes hyperboliques comme facteurs directs de $q[C_{\delta''}]$, qui n'affectent pas $\gamma_\psi(q[C_{\delta''}])$. On obtient la descente du facteur $\Delta'\Delta''$ en appliquant 5.3.3 encore une fois.

Pour le terme Δ_0, observons que $\mathcal{O}(\delta)$ est paramétré par une donnée

$$(K/K^\#, a, c) = \bigoplus_i (K_i/K_i^\#, a_i, c_i) \oplus (E/E^\#, \alpha, \gamma)$$

où $\mathcal{O}(\delta^\flat) = \mathcal{O}(E/E^\#, \alpha, \gamma)$ et $K_i \simeq K_i^\# \times K_i^\#$ pour tout i. Les données ont de plus les décompositions $K_i/K_i^\# = K_i'/K_i'^\# \oplus K_i''/K_i''^\#$, etc.

Il s'agit de démontrer que l'on peut enlever $(K_i'/K_i'^\#, a_i', c_i')$ et $(K_i''/K_i''^\#, a_i'', c_i'')$ dans la définition de Δ_0. C'est clair pour $(K_i''/K_i''^\#, a_i'', c_i'')$ car le caractère $\mathrm{sgn}_{K''/K''^\#}(\cdot)$ se factorise par $K^{\#\times} \to E^{\#\times}$. Pour $(K_i'/K_i'^\#, a_i', c_i')$, observons que la symétrie 7.4.6 pour Δ_0 échange les rôles de δ' et δ'' quitte à les multiplier par -1. Un argument de va-et-vient permet de se ramener au cas précédent. □

5.5 Énoncés du transfert et du lemme fondamental

Dans cette section, F est un corps local.

Intégrales orbitales Soit M un F-groupe réductif connexe et soit $m \in M_{\mathrm{reg}}(F)$. Posons

$$D_M(m) := \det(1 - \mathrm{Ad}\,(m)|\mathfrak{m}/\mathfrak{m}_m).$$

Soit $f \in C_c^\infty(M(F))$. Fixons des mesures de Haar sur $M(F)$ et $M_m(F)$. L'intégrale orbitale de f en m est définie comme suit

$$J_M(m, f) := |D_M(m)|^{1/2} \cdot \int\limits_{M_m(F)\backslash M(F)} f(x^{-1}mx)\,\mathrm{d}\dot{x}.$$

Si $m \in M(F)$ est fortement régulier, l'intégrale orbitale stable est définie comme

$$J_M^{\mathrm{st}}(m, f) := \sum_{m_1} J_M(m_1, f)$$

où m_1 parcourt des représentants de $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(m)/\mathrm{conj}$.

Les mêmes définitions s'adaptent à l'algèbre de Lie. Soit $X \in \mathfrak{m}_{\mathrm{reg}}(F)$. Posons

$$D_M(X) := \det(\mathrm{ad}\,(X)|\mathfrak{m}/\mathfrak{m}_X).$$

Soit $f \in C_c^\infty(\mathfrak{m}(F))$. Fixons les mesures comme précédemment et définissons

$$\text{(I.10)} \qquad J_M(X, f) := |D_M(X)|^{1/2} \cdot \int\limits_{M_m(F)\backslash M(F)} f(x^{-1}Xx)\,\mathrm{d}\dot{x},$$

$$\text{(I.11)} \qquad J_M^{\mathrm{st}}(X, f) := \sum_{X_1} J_M(X_1, f)$$

où X_1 parcourt des représentants de $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(X)/\mathrm{conj}$.

On considère aussi les intégrales orbitales sur un revêtement. Soit $\mathbf{p} : \tilde{M} \to M(F)$ un revêtement d'un F-groupe réductif connexe satisfaisant à la condition simplificatrice suivante.

Hypothèse 5.5.1. On suppose que $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{M}$ commutent si $x, y \in M(F)$ commutent.

Définissons les sous-ensembles $\tilde{M}_{\mathrm{reg}}$ et $\tilde{M}_{\mathrm{ss}}$ comme les images réciproques de leurs avatars sur $M(F)$. Fixons les mesures comme précédemment et définissons

$$\text{(I.12)} \qquad J_{\tilde{M}}(\tilde{m}, f) := |D_M(m)|^{1/2} \int\limits_{M_m(F)\backslash M(F)} f(\tilde{x}^{-1}\tilde{m}\tilde{x})\,\mathrm{d}\dot{x}$$

où $\tilde{x}$ est une image réciproque quelconque de x. Si F est archimédien, alors on peut définir les intégrales orbitales d'une fonction f dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(M(F))$ ou $\mathcal{S}(\tilde{M})$.

Revenons au cas du groupe métaplectique pour lequel l'hypothèse 5.5.1 est satisfaite. Soient $\gamma \in H_{G-\mathrm{reg}}(F)$, $f \in C^{\infty}_{c,--}(\tilde{G})$. Définissons l'intégrale orbitale endoscopique par

$$J_{H,\tilde{G}}(\gamma, f) := \sum_{\delta} \Delta(\gamma, \tilde{\delta}) J_{\tilde{G}}(\tilde{\delta}, f)$$

où :

- les δ parcourent les représentants des classes de conjugaison dans $G(F)$ qui se correspondent à γ ;
- $\tilde{\delta} \in \tilde{G}$ est une image réciproque quelconque de δ, le choix n'affecte pas la définition car Δ est spécifique (5.3.4) et f est anti-spécifique.

Si F est archimédien, on peut aussi définir $J_{H,\tilde{G}}(\cdot, f)$ pour $f \in \mathcal{S}_{--}(\tilde{G})$.

La conjecture de transfert Soient $\gamma \in H_{G-\mathrm{reg}}(F)$ et $\delta \in G_{\mathrm{reg}}(F)$ qui se correspondent. D'après la description des commutants via paramètres dans §3.3, on a un isomorphisme entre F-tores $H_\gamma \xrightarrow{\sim} G_\delta$. On en déduit une correspondance entre les mesures de Haar sur $H_\gamma(F)$ et $G_\delta(F)$.

Le résultat que nous établirons est le suivant.

Théorème 5.5.2 (Transfert d'intégrales orbitales)**.** *Fixons des mesures de Haar sur $G(F)$ et $H(F)$. Soit $f \in C^{\infty}_{c,--}(\tilde{G})$, alors il existe $f^H \in C^{\infty}_c(H(F))$ tel que*

$$J_{H,\tilde{G}}(\gamma, f) = J^{st}(\gamma, f^H)$$

pour tout $\gamma \in H_{G-reg}(F)$, où on utilise les mesures de Haar qui se correspondent sur les commutants. On dit que f^H est un transfert de f.

Si F est archimédien et $f \in \mathcal{S}_{--}(\tilde{G})$, alors on peut prendre $f^H \in \mathcal{S}(H(F))$ satisfaisant à l'égalité ci-dessus.

La fonction f^H n'est pas unique, mais ses intégrales orbitales stables sont caractérisées par f.

Le cas non ramifié : le lemme fondamental pour les unités de l'algèbre de Hecke

Hypothèse 5.5.3. On fait les hypothèses ci-dessous.

- F est non archimédien de caractéristique résiduelle $p > 2$ et $|\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F| > 3$.
- p est assez grand par rapport à n. Une minoration possible de p est celle dans [84] 4.4, appliquée aux groupes G et H.
- ψ est de conducteur $\mathfrak{o}_F$.

Définition 5.5.4. Soit M un F-groupe réductif non ramifié. On dit qu'une mesure de Haar sur $M(F)$ est non ramifiée si $\mathrm{mes}(K) = 1$ pour tout sous-groupe hyperspécial K de M.

Remarquons que les sous-groupes hyperspéciaux sont conjugués par $M_{\mathrm{ad}}(F)$, et la conjugaison préserve les mesures de Haar, il suffit donc de considérer un choix de K.

Prenons un réseau autodual $L \subset W$ et notons $K = \mathrm{Stab}_G(L)$ le sous-groupe hyperspécial de $G(F)$ associé. Fixons aussi un sous-groupe hyperspécial K_H de $H(F)$. Le lemme fondamental pour les unités concerne le transfert de la fonction anti-spécifique

$$f_K(\tilde{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^{-1}, & \text{si } \tilde{x} \in \boldsymbol{\varepsilon} K, \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathrm{Ker}\,(\mathbf{p}), \\ 0, & \text{si } \tilde{x} \notin \mathbf{p}^{-1}(K). \end{cases}$$

Théorème 5.5.5 (Le lemme fondamental pour les unités de l'algèbre de Hecke sphérique anti-spécifique)**.** *Soit K_H un sous-groupe hyperspécial $H(F)$, alors $\mathbb{1}_{K_H}$ est un transfert de f_K si l'on utilise les mesures non ramifiées sur $G(F)$ et $H(F)$.*

La démonstration occupera les sections suivantes. Nous obtiendrons aussi des résultats plus forts sur le transfert pour le cas archimédien.

Remarques sur le choix de revêtements Les seuls résultats qui fait intervenir l'hypothèse $8|\mathbf{f}$ sont les suivants :

– la symétrie pour $\Delta'\Delta''$ (5.3.8), qui fait intervenir l'élément $-1 \in \tilde{G}$;
– la descente parabolique §5.4.

En particulier, on peut formuler la conjecture de transfert et le lemme fondamental pour chaque choix de $\mathbf{f}$. Montrons qu'elles sont équivalentes. Soient $\mathbf{f}, \mathbf{f}' \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$ et supposons que $\mathbf{f}|\mathbf{f}'$. Posons $\tilde{G}' := \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f}')}(W)$, $\tilde{G} := \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(\mathbf{f})}(W)$. Alors $\tilde{G} \hookrightarrow \tilde{G}'$. Le résultat suivant découle immédiatement.

Lemme 5.5.6. *Soient $f' \in C^{\infty}_{c,--}(\tilde{G}')$ et $f \in C^{\infty}_{c,--}(\tilde{G})$ sa restriction. Pour tout $\tilde{\delta} \in \tilde{G}$, on a*

$$J_{\tilde{G}'}(\tilde{\delta}, f') = J_{\tilde{G}}(\tilde{\delta}, f),$$

où on utilise les mêmes mesures de Haar sur $G(F)$ et $G_\delta(F)$.

Proposition 5.5.7. *Les énoncés de transfert (cf. 5.5.2) pour $\tilde{G}$ et $\tilde{G}'$ sont équivalents.*

Dans le cas non ramifié, les énoncés du lemme fondamental pour les unités (cf. 5.5.5) pour $\tilde{G}$ et $\tilde{G}'$ sont équivalents.

Démonstration. Soient f', f comme ci-dessus. Dans la définition de l'intégrale orbitale endoscopique $J_{H,\tilde{G}'}(\gamma, f')$, on peut choisir les $\tilde{\delta}$ dans $\tilde{G}$. Vu la compatibilité de la notion de stabilité (par 5.2.3) et du facteur de transfert (par sa spécificité) par rapport à restriction, on déduit par ledit lemme que

$$J_{H,\tilde{G}'}(\gamma, f') = J_{H,\tilde{G}}(\gamma, f).$$

□

Le cas des fonctions de Schwartz dans le cas réel est analogue.

6 Transfert : le cas archimédien

Les résultats ici sont valables pour le transfert des fonctions à support compact ainsi que les fonctions de Schwartz. Nous traitons principalement le premier cas et nous signalerons à la fin les modifications nécessaires pour les fonctions de Schwartz (6.2.5).

Puisque la restriction des scalaires ne s'applique pas au groupe métaplectique, il faut traiter le cas complexe séparément. Pour la plupart, nous nous occupons du cas $F = \mathbb{R}$; le cas $F = \mathbb{C}$ est beaucoup plus simple. Nous rajouterons quelques remarques à la fin.

D'après 5.5.7, il suffit d'établir le transfert pour $\mathbf{f} = 8$. Notons $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W) := \widetilde{\mathrm{Sp}}^{(8)}(W)$ pour tout F-espace symplectique W.

6.1 L'endoscopie chez Renard

Posons $F = \mathbb{R}$ et $n' + n'' = n$. Soient W un F-espace symplectique de dimension $2n$ et $W = W' \oplus W''$, $\dim W' = 2n'$, $\dim W'' = 2n''$. À la paire (n', n'') et à un F-tore maximal T dans G est associé l'objet κ dans 5.3.5.

Afin de réconcilier avec le formalisme de [71], posons

$$\begin{aligned} G &:= \mathrm{Sp}(W), \\ \tilde{G} &:= \widetilde{\mathrm{Sp}}(W), \\ G^{\diamond} &:= \mathrm{Sp}(W') \times \mathrm{Sp}(W''), \\ \tilde{G}^{\diamond} &:= \widetilde{\mathrm{Sp}}(W') \times \widetilde{\mathrm{Sp}}(W''), \\ p^{\diamond} &: \tilde{G}^{\diamond} \to G^{\diamond}, \\ \iota &: G^{\diamond} \hookrightarrow G, \\ j &: \tilde{G}^{\diamond} \to \tilde{G}. \end{aligned}$$

Dans [71], Renard travaille avec les revêtements à deux feuillets et il considère le groupe $\mathrm{Im}\,(j)$ au lieu de $\tilde{G}^{\diamond}$. Mais peu importe.

Définition 6.1.1. On dit qu'une fonction $f \in C_c^{\infty}(\tilde{G}^{\diamond})$ est spécifique (resp. anti-spécifique) si f est spécifique (resp. anti-spécifique) en les deux coordonnées. L'espace de telles fonctions est noté par $C_{c,-}^{\infty}(\tilde{G}^{\diamond})$ (resp. $C_{c,--}^{\infty}(\tilde{G}^{\diamond})$).

On dit qu'un élément $(\delta', \delta'') \in G^{\diamond}$ est G-régulier si $\iota(\delta', \delta'')$ est semi-simple régulier. L'ensemble des éléments G-réguliers est noté $G^{\diamond}_{G-\mathrm{reg}}$, et son image réciproque $\tilde{G}^{\diamond}_{G-\mathrm{reg}}$.

Nous utiliserons systématiquement l'application

$$\begin{aligned} \tau : &\tilde{G}^{\diamond} \to \tilde{G}^{\diamond} \\ &(\tilde{x}', \tilde{x}'') \mapsto (\tilde{x}', -\tilde{x}''), \end{aligned}$$

où $\tilde{x}'' \mapsto -\tilde{x}''$ est l'opération définie par 2.4.6. On a $\tau^2 = \mathrm{id}$.

Conservons les conventions de [71] pour les mesures et les intégrales orbitales. Identifions donc une intégrale orbitale sur $\tilde{G}$ à une certaine fonction invariante $\phi \in C^{\infty}(\tilde{G}_{\mathrm{reg}})$; la même convention s'applique à $\tilde{G}^{\diamond}$. Dans ce qui suit, nous ne considérons que les fonctions anti-spécifiques.

Définition 6.1.2. On dit qu'une fonction $\phi \in C^{\infty}(\tilde{G}_{\mathrm{reg}})$ est une intégrale orbitale anti-spécifique s'il existe $f \in C_{c,--}^{\infty}(\tilde{G})$ telle que $\phi = J_{\tilde{G}}(\cdot, f)$. L'espace des intégrales orbitales anti-spécifiques est notée $\mathcal{I}_{--}(\tilde{G})$. De même, définissons l'espace $\mathcal{I}_{--}(\tilde{G}^{\diamond})$.

En utilisant la notion de stabilité introduite en §5.2, qui coïncide avec celle de [71], nous définissons les espaces d'intégrales orbitales stables anti-spécifiques :

$$\mathcal{I}_{--}^{\mathrm{st}}(\tilde{G}), \mathcal{I}_{--}^{\mathrm{st}}(\tilde{G}^{\diamond}).$$

On dit qu'une fonction $\phi \in C^{\infty}(\tilde{G}_{\mathrm{reg}})$ est une intégrale κ-orbitale anti-spécifique si $\tau^*\phi$ est une intégrale orbitale stable anti-spécifique. L'espace des intégrales κ-orbitales anti-spécifiques est noté $\mathcal{I}_{\kappa,--}(\tilde{G}^{\diamond})$.

Notre définition des intégrales κ-orbitales coïncide avec celle de Renard d'après [71] §3 p.1226. L'espace $\mathcal{I}_{\kappa,--}(\tilde{G}^{\diamond})$ est une limite inductive d'espaces de Fréchet.

La démonstration du transfert archimédien repose sur trois ingrédients : le transfert de $\tilde{G}$ vers $\tilde{G}^{\diamond}$, le transfert de $\tilde{G}^{\diamond}$ vers le groupe endoscopique H, et la comparaison des facteurs de transfert. La comparaison sera fait dans la sous-section suivante ; les deux théorèmes de transfert se trouvent dans [70] et [71], mais il faut les mettre sous une forme convenable.

Théorème 6.1.3 (cf. [71] 4.7). *On sait définir un facteur de transfert*

$$\Delta_R : G^{\diamond}_{G-reg} \to \mu_2$$

de sorte qu'il existe une application linéaire continue

$$\begin{aligned}\mathrm{Trans} :& \mathcal{I}_{--}(\tilde{G}) \to \mathcal{I}_{\kappa,--}(\tilde{G}^{\diamond})\\ &\phi \mapsto \phi^{\diamond}\end{aligned}$$

définie de la façon suivante : $\phi^{\diamond}$ est déterminée sur le sous-ensemble dense $\tilde{G}^{\diamond}_{G-reg}$ par

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_0 &:= j(\tilde{\delta}', \tilde{\delta}''),\\ \phi^{\diamond}(\tilde{\delta}', \tilde{\delta}'') &= \Delta_R(\delta', \delta'') \sum_{\tilde{\delta} \in \mathcal{O}^{st}(\tilde{\delta}_0)/conj} \langle \kappa, \mathrm{inv}(\delta, \delta_0) \rangle \phi(\tilde{\delta}).\end{aligned}$$

Observons en passant que j identifie $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(\tilde{\delta}')/\mathrm{conj} \times \mathcal{O}^{\mathrm{st}}(\tilde{\delta}'')/\mathrm{conj}$ à $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(\tilde{\delta}_0)/\mathrm{conj}$.
Nous donnerons une expression explicite de Δ_R dans la section suivante.

Démonstration. Dans [71], ce théorème est énoncé pour les revêtements à deux feuillets, le groupe $\mathrm{Im}\,(j)$ au lieu de $\tilde{G}^{\diamond}$ et les intégrales orbitales spécifiques. Notre énoncé s'obtient en trois étapes.

- Le théorème [71] 4.7 est valide si l'on remplace $\mathrm{Im}\,(j)$ par $\tilde{G}^{\diamond}$. Ceci est clair.
- Il reste valide pour les intégrales orbitales anti-spécifiques ; ceci est trivial car les objets spécifiques et anti-spécifiques coïncident pour les revêtements à deux feuillets.
- Finalement, on étend le théorème [71] 4.7 à tout revêtement de $G(F)$. Cela se fait comme dans 5.5.7.

□

Théorème 6.1.4 (cf. [70] 6.7). *Posons $H := \mathrm{SO}(2n'+1) \times \mathrm{SO}(2n''+1)$, alors on peut définir une application linéaire*

$$\mathcal{T} : \mathcal{I}^{st}_{--}(\tilde{G}^{\diamond}) \longrightarrow \mathcal{I}^{st}(H(F))$$

caractérisée par

$$\mathcal{T}(\phi)(\gamma', \gamma'') = \Delta'(\tilde{\delta}')\Delta'(\tilde{\delta}'')\phi(\tilde{\delta}', \tilde{\delta}'')$$

où γ' et $\delta' \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(W')_{reg}$ se correspondent par rapport à la donnée endoscopique $(\widetilde{\mathrm{Sp}}(W'), \mathrm{SO}(2n'+1) \times \{1\})$, γ'' et $\delta'' \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(W'')_{reg}$ se correspondent par rapport à $(\widetilde{\mathrm{Sp}}(W''), \mathrm{SO}(2n''+1) \times \{1\})$, et

$$\Delta' := \frac{\Theta^+_{\psi} - \Theta^-_{\psi}}{|\Theta^+_{\psi} - \Theta^-_{\psi}|}.$$

Démonstration. Cet énoncé est pour l'essentiel celui de Renard. L'énoncé dans [70] ne concerne que le cas $n'' = 0$, mais on l'étend sans difficulté aux produits directs. On procède comme dans la démonstration de 6.1.3 et obtient la version énoncée ci-dessus. □

6.2 Comparaison de facteurs de transfert

Les tores maximaux dans G sont isomorphes à des tores “standards” de la forme

$$\begin{aligned}T^{m,r,s} &:= (\mathbb{C}^{\times})^m \times (\mathbb{S}^1)^r \times (\mathbb{R}^{\times})^s,\\ 2m + r + s &= n.\end{aligned}$$

Cela décrit tous les tores maximaux dans G à conjugaison stable près.

On utilise les coordonnées $z = (z_i)_{i=1}^m$, $w = (w_j)_{j=1}^r$, $a = (a_k)_{k=1}^s$ pour $T^{m,r,s}$. Soient $\hat{z}_i, \hat{w}_j, \hat{a}_k$ les caractères correspondants.

Proposition 6.2.1. *Soit $(\delta', \delta'') \in G^\diamond$ qui est G-régulier. Supposons que le tore maximal $T' \times T''$ contenant (δ', δ'') est de la forme $T^{m',r',s'} \times T^{m'',r'',s''}$. On paramètre (δ', δ'') par ses coordonnées $(z', w', a', z'', w'', a'')$. Alors*

$$\Delta_R(\delta', \delta'') = \prod_{j',j''} \mathrm{sgn}(\mathrm{Re}(w'_{j'}) - \mathrm{Re}(w''_{j''})).$$

Démonstration. C'est essentiellement [71] (4.8) et les discussions qui suivent. □

Corollaire 6.2.2. *Le facteur Δ_R est constant sur une classe de conjugaison stable.*

Proposition 6.2.3. *On a $\Delta_0 = \Delta_R$.*

Démonstration. Tous les deux facteurs Δ_R et Δ_0 satisfont à la descente parabolique 5.4.1. Il suffit donc de les comparer sur tores de la forme $T^{m',r',0} \times T^{m'',r'',0}$. Soient $(K'/K'^{\#}, b', c')$ et $(K''/K''^{\#}, b'', c'')$ les paramètres de $\mathcal{O}(\delta')$ et $\mathcal{O}(\delta'')$, respectivement.

Calculons d'abord le polynôme $P_{b'}(T)(-T)^{-n'}$. On a

$$\begin{aligned} P_{b'}(T)(-T)^{-n'} &= \prod_i \frac{(T - z'_i)(T - z_i'^{-1})(T - \overline{z'_i})(T - \overline{z_i'^{-1}})}{(-T)^2} \cdot \\ &\cdot \prod_j \frac{T^2 - 2\mathrm{Re}(w'_j) + 1}{-T} \\ &= \prod_i ((T + T^{-1}) - (z_i + z_i^{-1}))((T + T^{-1}) - \overline{(z'_i + z_i'^{-1})}) \cdot \\ &\cdot \prod_j (2\mathrm{Re}(w'_j) - (T + T^{-1})). \end{aligned}$$

Les termes dans le produit sur i sont non négatifs si T est remplacé par un élément dans $\mathbb{S}^1$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \det(1 + \delta') &= \prod_i (1 + z'_i)(1 + z_i'^{-1})(1 + \overline{z'_i})(1 + \overline{z_i'^{-1}}) \cdot \\ &\cdot \prod_j (1 + w'_j)(1 + \overline{w'_j}), \end{aligned}$$

qui est un réel positif, d'où

$$\mathrm{sgn}(P_{b'}(w''_{j''})(-w''_{j''})^{-n'} \det(1 + \delta')) = \prod_{j'} \mathrm{sgn}(\mathrm{Re}(w'_{j'}) - \mathrm{Re}(w''_{j''})).$$

On conclut en le comparant avec 6.2.1. □

Conservons maintenant les notations de §5.1.

Théorème 6.2.4. *Soit $f \in C^\infty_{c,--}(\tilde{G})$, alors il existe $f^H \in C^\infty_c(H(F))$ telle que pour tout $\gamma = (\gamma', \gamma'') \in H_{G-reg}(F)$,*

$$J^{st}_H(\gamma, f^H) = \sum_\delta \Delta(\epsilon, \tilde{\delta}) J_{\tilde{G}}(\tilde{\delta}, f)$$

où la somme parcourt les classes de conjugaison des $\delta \in G(F)$ qui correspondent à γ et $\tilde{\delta} \in \tilde{G}$ est une image réciproque quelconque de δ.

De plus, l'application linéaire $\phi \mapsto \phi_H$ de $\mathcal{I}_{--}(\tilde{G})$ dans $\mathcal{I}^{st}(H(F))$ induite par $f \mapsto f^H$ est continue.

Démonstration. Fixons $\tilde{\delta}_0$ tel que δ_0 et γ se correspondent. Prenons $(\tilde{\delta}'_0, \tilde{\delta}''_0) \in \tilde{G}^\diamond$ comme dans §5.3, alors $j(\tilde{\delta}'_0, \tilde{\delta}''_0) = \tilde{\delta}_0$. On peut supposer que les $\tilde{\delta}$ dans la somme parcourent $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(\tilde{\delta}_0)/\mathrm{conj}$. Posons $\phi := J_{\tilde{G}}(\cdot, f) \in \mathcal{I}_{--}(\tilde{G})$. D'après 5.3.5, le terme à droite vaut

$$\Delta'(\tilde{\delta}'_0)\Delta''(\tilde{\delta}''_0)\Delta_0(\delta'_0, \delta''_0) \sum_{\tilde{\delta}} \langle \kappa, \mathrm{inv}(\delta_0, \delta) \rangle \phi(\tilde{\delta}).$$

Or 6.2.3 et 6.1.3 entraînent qu'il est égal à

$$\Delta'(\tilde{\delta}'_0)\Delta''(\tilde{\delta}''_0)\phi^\diamond(\tilde{\delta}'_0, \tilde{\delta}''_0),$$

ou

$$\Delta'(\tilde{\delta}'_0)\Delta'(-\tilde{\delta}''_0) \cdot (\tau^*\phi^\diamond)(\tilde{\delta}'_0, -\tilde{\delta}''_0).$$

Maintenant, δ'_0 correspond à γ' pour la donnée endoscopique $(\widetilde{\mathrm{Sp}}(W'), \mathrm{SO}(2n'+1) \times \{1\})$ et $-\delta''_0$ correspond à γ'' pour $(\widetilde{\mathrm{Sp}}(W''), \mathrm{SO}(2n''+1) \times \{1\})$. D'autre part $\tau^*\phi^\diamond \in \mathcal{I}^{\mathrm{st}}_{--}(\tilde{G}^\diamond)$. En appliquant 6.1.4, on voit que la fonction $\phi_H \in C^\infty(H_{G-\mathrm{reg}}(F))$ définie par

$$\gamma \longmapsto \Delta'(\tilde{\delta}'_0)\Delta'(-\tilde{\delta}''_0) \cdot (\tau^*\phi^\diamond)(\tilde{\delta}'_0, -\tilde{\delta}''_0)$$

appartient à $\mathcal{I}^{\mathrm{st}}(H(F))$. Ceci démontre l'existence de f^H. L'application Trans de 6.1.3 et l'application $\mathcal{T}$ de 6.1.4 sont continues, d'où l'assertion sur la continuité. □

Ce théorème établit le transfert 5.5.2 pour $F = \mathbb{R}$ et pour les fonctions à support compacts.

Remarque 6.2.5. On peut démontrer une variante du théorème ci-dessus où $f \in \mathcal{S}_{--}(\tilde{G})$ et $f^H \in \mathcal{S}(H)$. Il faut adapter nos arguments, ainsi que ceux de [70, 71], aux intégrales orbitales de fonctions de Schwartz. Des résultats de Harish-Chandra et Shelstad permettent de caractériser ces espaces. Par exemple, les conditions les plus subtiles (I_2^{st}), (I_3^κ) dans [71] ne changent pas pour les fonctions de Schwartz, donc les mêmes arguments marchent toujours.

Remarque 6.2.6. C'est aussi possible d'établir le transfert par la descente parabolique et la descente semi-simple, qui sera établie dans la section suivante. Il suffit de reprendre les arguments de [75] et utiliser la caractérisation des intégrales orbitales énoncée dans [71].

6.3 Le cas complexe

Supposons maintenant que $F = \mathbb{C}$. On confond les $\mathbb{C}$-groupes et leurs points complexes. Dans ce cas :

- $\tilde{G} = \mu_{\mathbf{f}} \times G$, et $\Delta(\gamma, (t, \delta)) = t$ pour tout $t \in \mu_{\mathbf{f}}$ et tous $\gamma \in H$, $\delta \in G$ qui se correspondent ;
- on peut identifier $C^\infty_{c,--}(\tilde{G})$ à $C^\infty_c(G)$ via $f \mapsto f(1, \cdot)$;
- la conjugaison se confond avec la conjugaison géométrique ;
- les tores maximaux sont conjugués ;
- les intégrales orbitales stables se confondent avec les intégrales orbitales.

On peut toujours définir les espaces vectoriels topologiques d'intégrales orbitales $\mathcal{I}(G)$ et $\mathcal{I}(H)$.

L'existence de transfert est équivalente à

Théorème 6.3.1. *Soit $f \in C^\infty_c(G)$, alors il existe $f^H \in C^\infty_c(H)$ telle que pour tout $\gamma = (\gamma', \gamma'') \in H_{G-reg}$,*

$$J_H(\gamma, f^H) = J_G(\delta, f)$$

pour tout δ qui correspond à γ.

De plus, l'application linéaire $\phi \mapsto \phi^H$ de $\mathcal{I}(G)$ dans $\mathcal{I}(H)$ induite par $f \mapsto f^H$ est continue.

Esquisse d'une démonstration. La caractérisation des intégrales orbitales se simplifie énormément pour les groupes complexes : il n'y a plus de "conditions de sauts" (eg. les conditions I_2^{st} et I_3^{κ} pour le groupe métaplectique réel). En effet, les singularités éventuelles sont associées aux racines ; localement elles forment des murs de codimension réelle 2. D'après un principe de Harish-Chandra, on peut outrepasser ces murs.

Fixons des tores maximaux $S \subset H$ et $T \subset G$. On sait qu'il existe un isomorphisme $S \xrightarrow{\sim} T$, équivariant par rapport au homomorphisme des groupes de Weyl $W^H \to W^G$. Les classes de conjugaison semi-simples dans G (resp. H) sont paramétrées par T/W^G (resp. S/W^H). Le transfert en découle immédiatement en appliquant la caractérisation des intégrales orbitales mentionnée précédemment. □

Remarque 6.3.2. Comme le cas réel, il y a aussi une variante de ce théorème pour les fonctions de Schwartz.

7 Descente semi-simple du facteur de transfert

Fixons $\mathbf{f}$ tel que $8|\mathbf{f}$. Les revêtements métaplectiques dans cette section désignent les revêtements à $\mathbf{f}$ feuillets.

7.1 Le formalisme de descente

Fixons F un corps local, $(W, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un F-espace symplectique de dimension $2n$, $(n', n'') \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ tel que $n' + n'' = n$. On en déduit les objets suivants.

$$\begin{aligned}
\tilde{G} &:= \widetilde{\mathrm{Sp}}(W), \\
G &:= \mathrm{Sp}(W), \\
H' &:= \mathrm{SO}(2n'+1) \text{ déployé}, \\
H'' &:= \mathrm{SO}(2n''+1) \text{ déployé}, \\
H &:= H' \times H''.
\end{aligned}$$

Fixons $\epsilon = (\epsilon', \epsilon'') \in H(F)_{\mathrm{ss}}$ et $\tilde{\eta} \in \tilde{G}$ tels que $\eta \in G(F)_{\mathrm{ss}}$ et ϵ se correspondent. Pour simplifier la vie, supposons aussi que $\tilde{\eta} = \pm 1$ lorsque $\eta = \pm 1$ (où $-1 \in \tilde{G}$ est celui défini dans 2.4.6). Écrivons les paramètres de leurs classes de conjugaison comme

$$\begin{aligned}
\eta &\in \mathcal{O}(K/K^{\#}, v, (W_K, h_K), (W_{\pm}, \langle\cdot|\cdot\rangle_{\pm})), \\
\epsilon' &\in \mathcal{O}(K'/K'^{\#}, v', (V'_K, h'_K), (V'_{\pm}, q'_{\pm})), \\
\epsilon'' &\in \mathcal{O}(K''/K''^{\#}, v'', (V''_K, h''_K), (V''_{\pm}, q''_{\pm}));
\end{aligned}$$

où h_K est anti-hermitienne et h'_K, h''_K sont hermitiennes.

La correspondance de classes exige que

$$\begin{aligned}
(K/K^{\#}, v) &= (K'/K'^{\#}, v') \oplus (K''/K''^{\#}, -v''), \\
W_K &\simeq V'_{K'} \oplus V''_{K''} \text{ comme } K-\text{modules}, \\
\dim_F W_+ + 1 &= \dim_F V'_+ + \dim_F V''_-, \\
\dim_F W_- + 1 &= \dim_F V'_- + \dim_F V''_+.
\end{aligned}$$

On décompose K en produit de F-algèbres à involution L pour lesquelles $L^{\#}$ sont des corps. Si l'on pose $u := v|_L$ alors $L = F(u)$. Adoptons la convention d'indexer l'ensemble des paires

(L,u) par u. Idem pour K',K''. Alors

$$\begin{aligned}(K/K^{\#},\cdots) &= \bigoplus_u (L/L^{\#},u,(W_u,h_u)) \oplus (W_+,\langle\cdot|\cdot\rangle_+) \oplus (W_-,\langle\cdot|\cdot\rangle_-),\\ (K'/K'^{\#},\cdots) &= \bigoplus_u)(L/L^{\#},u,(V'_u,h'_u)) \oplus (V'_+,q'_+) \oplus (V'_-,q'_-),\\ (K''/K''^{\#},\cdots) &= \bigoplus_u (L/L^{\#},-u,(V''_u,h''_u)) \oplus (V''_+,q''_+) \oplus (V''_-,q''_-);\end{aligned}$$

où

– on permet que pour tout u, au plus l'un de V'_u et V''_u est trivial ;
– les paires (L,u) sont deux à deux inéquivalentes ;
– pour tout u, $W_u \simeq V'_u \oplus V''_u$ comme L-modules.

D'après §3.3,

$$\begin{aligned}G_\eta &= \prod_u U(W_u,h_u) \times \mathrm{Sp}(W_+) \times \mathrm{Sp}(W_-),\\ H'_{\epsilon'} &= \prod_u U(V'_u,h'_u) \times \mathrm{SO}(V'_+,q'_+) \times \mathrm{SO}(V'_-,q'_-),\\ H''_{\epsilon''} &= \prod_u U(V''_u,h''_u) \times \mathrm{SO}(V''_+,q''_+) \times \mathrm{SO}(V''_-,q''_-),\\ H_\epsilon &= H'_{\epsilon'} \times H''_{\epsilon''}.\end{aligned}$$

On note abusivement la restriction de η sur $U(W_u,h_u)$ par u, celle de ϵ' sur $U(V'_u,h'_u)$ par u' et celle de $-\epsilon''$ sur $U(V''_u,h''_u)$ par u''.

Rappelons que $U(W_u,h_u) \simeq \mathrm{GL}_{L^\#}(\frac{1}{2}\dim_{L^\#} W_u)$ si $L \simeq L^\# \times L^\#$. On a des immersions canoniques

$$\begin{aligned}U(W_u,h_u) &\hookrightarrow \mathrm{Sp}(W_u,\langle\cdot|\cdot\rangle_u)\\ U(V'_u,h'_u) &\hookrightarrow \mathrm{SO}(V'_u,(\mathrm{tr}_{L/L^\#})_*h'_u)\\ U(V''_u,h''_u) &\hookrightarrow \mathrm{SO}(V''_u,(\mathrm{tr}_{L/L^\#})_*h''_u)\end{aligned}$$

où $\langle\cdot|\cdot\rangle_u := (\mathrm{tr}_{L/L^\#})_*h_u)$.

Lemme 7.1.1. *Si H_ϵ est quasi-déployé, alors $\mathrm{SO}(V'_+,q'_+)$ et $\mathrm{SO}(V''_+,q''_+)$ sont déployés.*

Démonstration. Si H_ϵ est quasi-déployé, d'après la description des commutants dans §3.3 on déduit que $\mathrm{SO}(V'_+,q'_+)$ et $\mathrm{SO}(V''_+,q''_+)$ sont aussi quasi-déployés. Or un groupe orthogonal impair quasi-déployé est forcément déployé. □

Soient

$$\begin{aligned}X &= ((X_u)_u,X_+,X_-) \in \mathfrak{g}_\eta(F),\\ Y' &= ((Y'_u)_u,Y'_+,Y'_-) \in \mathfrak{h}'_{\epsilon'}(F),\\ Y'' &= ((Y''_u)_u,Y''_+,Y''_-) \in \mathfrak{h}''_{\epsilon''}(F)\\ Y &= (Y',Y'') \in \mathfrak{h}_\epsilon(F).\end{aligned}$$

Hypothèse 7.1.2. On suppose X,Y semi-simples réguliers et assez petits.

Supposons de plus que $\delta := \exp(X)\eta$ et $\gamma := \exp(Y)\epsilon$ se correspondent.

Définition 7.1.3. Soient $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ des algèbres de Lie de produits de restrictions des scalaires de groupes classiques. On dit que deux éléments $Z_i \in \mathfrak{m}_i$ $(i = 1, 2)$ semi-simples assez réguliers sont en correspondance par valeurs propres s'ils admettent des paramètres de la forme

$$Z_i \in \mathcal{O}(K/K^{\#}, a, c_i)$$

pour $c_i \in K^\times$ convenables $(i = 1, 2)$. On note cette relation par

$$Z_1 \xleftrightarrow{\text{VP}} Z_2.$$

Lemme 7.1.4. *Avec ces hypothèses, on a*

$$\forall u,\ X_u \xleftrightarrow{\text{VP}} (Y'_u, Y''_u), ,$$
$$X_+ \xleftrightarrow{\text{VP}} (Y'_+, Y''_-),$$
$$X_- \xleftrightarrow{\text{VP}} (Y'_-, Y''_+).$$

Démonstration. Si X, Y sont assez petits, on peut écarter les valeurs propres provenant de u différents. Cela permet de conclure. □

La correspondance ci-dessus fournit aussi des décompositions orthogonales $W_u = W'_u \oplus W''_u$ pour tout u et $W_\pm = W'_\pm \oplus W''_\pm$ selon les valeurs propres. Les éléments $X_u, X_\pm$ se décomposent ainsi en

$$\forall u,\ X_u = (X'_u, X''_u),$$
$$X_+ = (X'_+, X''_+),$$
$$X_- = (X'_-, X''_-),$$

tels que

$$\forall u,\ X'_u \xleftrightarrow{\text{VP}} Y'_u,\ X''_u \xleftrightarrow{\text{VP}} Y''_u,$$
$$X'_+ \xleftrightarrow{\text{VP}} Y'_+,\ X''_+ \xleftrightarrow{\text{VP}} Y''_-,$$
$$X'_- \xleftrightarrow{\text{VP}} Y'_-,\ X''_- \xleftrightarrow{\text{VP}} Y''_+.$$

Enfin, posons

$$\tilde{\delta} := \exp(X)\tilde{\eta}.$$

Pour tout u, prenons $\tilde{u} \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(W_u)$ au-dessus de u tel que l'image de $((\tilde{u})_u, 1, -1)$ par l'homomorphisme

$$\prod_u \widetilde{\mathrm{Sp}}(W_u) \times \widetilde{\mathrm{Sp}}(W_+) \times \widetilde{\mathrm{Sp}}(W_-) \to \widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$$

est $\tilde{\eta}$. C'est possible grâce à l'hypothèse que $\tilde{\eta} = \pm 1$ lorsque $\eta = \pm 1$. Ensuite, prenons $(\tilde{u}', \tilde{u}'') \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(W'_u) \times \widetilde{\mathrm{Sp}}(W''_u)$ qui s'envoie sur $\tilde{u} \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(W_u)$. Posons $\tilde{\eta}'$ (resp. $\tilde{\eta}''$) l'image de $((\tilde{u}')_u, 1, -1)$ (resp. $((\tilde{u}'')_u, 1, -1)$) par

$$\prod_u \widetilde{\mathrm{Sp}}(W'_u) \times \widetilde{\mathrm{Sp}}(W'_+) \times \widetilde{\mathrm{Sp}}(W'_-) \to \widetilde{\mathrm{Sp}}(W')$$
$$(\text{resp.} \prod_u \widetilde{\mathrm{Sp}}(W''_u) \times \widetilde{\mathrm{Sp}}(W''_+) \times \widetilde{\mathrm{Sp}}(W''_-) \to \widetilde{\mathrm{Sp}}(W'')).$$

Décrivons le comportement du facteur de transfert $\Delta = \Delta_0 \Delta' \Delta''$.

Proposition 7.1.5. *Par rapport à ces décompositions, le facteur* Δ' *satisfait à*

$$\Delta'(\exp(X')\tilde{\eta}') = \prod_u \Delta'(\exp(X'_u)\tilde{u}') \cdot \Delta'(\exp(X'_+))\Delta'(-\exp(X'_-)).$$

De même,

$$\Delta''(\exp(X'')\tilde{\eta}'') = \prod_u \Delta''(\exp(X''_u)\tilde{u}'') \cdot \Delta''(\exp(X''_+))\Delta''(-\exp(X''_-)).$$

Le produit $\Delta'\Delta''$ *ne dépend pas de choix de* $\tilde{\eta}', \tilde{\eta}''$ *et* $\tilde{u}', \tilde{u}''$

Il est sous-entendu que les termes Δ', Δ'' à droite sont pris par rapport à des espaces symplectiques convenables (eg. W'_u, W''_u etc.)

Démonstration. Cela résulte de 4.6.1. □

Autrement dit, $\Delta'\Delta''$ est “additif” par rapport aux sommes directes de paramètres. Le comportement du terme Δ_0 est plus pénible à écrire : il est “bi-additif”.

Proposition 7.1.6. *Le facteur* $\Delta_0(\exp(X')\eta', \exp(X'')\eta'')$ *est produit des termes suivants*

$$\begin{gathered}
\Delta_0(\exp(X'_+), \exp(X''_+)),\\
\Delta_0(-\exp(X'_-), -\exp(X''_-)),\\
\prod_u \Delta_0(\exp(X'_u)u, \exp(X''_u)u),\\
\prod_{u'\neq u''} \Delta_0(\exp(X'_{u'})u', \exp(X''_{u''})u''),\\
\prod_u \Delta_0(\exp(X'_u)u, \exp(X''_+)),\\
\prod_u \Delta_0(\exp(X'_u)u, -\exp(X''_-)),\\
\prod_u \Delta_0(\exp(X'_+), \exp(X''_u)u),\\
\prod_u \Delta_0(-\exp(X'_-), \exp(X''_u)u),\\
\Delta_0(\exp(X'_+), -\exp(X''_-)),\\
\Delta_0(-\exp(X'_-), \exp(X''_+)).
\end{gathered}$$

Démonstration. D'une part, le caractère $\mathrm{sgn}_{K''/K''^{\#}}(\cdot)$ est additif par rapport aux sommes directes des paramètres $K''/K''^{\#}$. D'autre part, si $K''/K''^{\#}$ est fixé, alors

$$P_{a'}(a'')(-a'')^{-n'} \quad \text{et} \quad \det(\delta'+1)$$

sont tous additifs par rapport aux sommes directes de paramètres $(K'/K'^{\#}, a')$. D'où l'assertion. □

On démontrera que seuls les trois premiers termes survivent après descente.

7.2 Le cas non ramifié

Afin d'établir le lemme fondamental, on aura besoin de considérer la version non ramifiée de la descente. Nous conservons la plupart du formalisme précédent et précisons les modifications ci-dessous.

Conservons l'hypothèse 5.5.3 ; en particulier, F est un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle $p > 2$. Fixons un réseau autodual $L \subset W$. Soit $K = \mathrm{Stab}_G(L)$ le sous-groupe hyperspécial de $G(F)$ associé. Cela permet d'identifier K comme un sous-groupe de $\tilde{G}$.

Hypothèse 7.2.1. Supposons que
- η et ϵ sont d'ordres finis premiers à p ;
- δ, γ sont des éléments compacts avec décompositions de Jordan topologiques

$$\begin{gathered}\delta = \exp(X)\eta, \\ \gamma = \exp(Y)\epsilon, \\ X, Y : \text{topologiquement nilpotents ;}\end{gathered}$$

- δ, γ se correspondent ;
- $\eta \in K$, $\eta = \tilde{\eta}$;
- H_ϵ est non ramifié.

Dans ce cas, c'est loisible de supposer que $(V'_\pm, q'_\pm)$, $(V''_\pm, q''_\pm)$, (V'_u, h'_u), (V''_u, h''_u), (W_u, h_u) admettent des réseaux autoduaux ([84] 5.3). La nilpotence topologique de X, Y dans le cas non ramifié remplace la condition précédente que X, Y soient assez petits.

On décompose G_η et H_ϵ comme dans la section précédente. Les éléments u sont d'ordre fini premier à p. En particulier, L est une extension non ramifiée ; lorsque $L \simeq L^\# \times L^\#$, cela signifie que L est une extension non ramifiée.

Lemme 7.2.2. *Avec ces hypothèses, on a*

$$\begin{gathered}\forall u,\ X_u \stackrel{\mathrm{VP}}{\longleftrightarrow} (Y'_u, Y''_u), \\ X_+ \stackrel{\mathrm{VP}}{\longleftrightarrow} (Y'_+, Y''_-), \\ X_- \stackrel{\mathrm{VP}}{\longleftrightarrow} (Y'_-, Y''_+).\end{gathered}$$

Démonstration. Cela résulte de l'unicité de la décomposition de Jordan topologique. □

7.3 Énoncé de résultats

Sauf mention expresse du contraire, F est un corps local de caractéristique nulle. Conservons aussi les formalismes précédents.

Pour simplifier la vie, introduisons des conventions.

Notation 7.3.1. On dit qu'une expression est une *bonne constante* si
- elle ne dépend que de $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(\epsilon)$ et $\mathcal{O}(\tilde{\eta})$;
- elle vaut 1 dans le cas non ramifié.

Soient a, b deux éléments inversibles dans une F-algèbre étale K. On dit que $a \approx b$ si

$$\sup_{\sigma \in \mathrm{Hom}_{F-\mathrm{alg}}(K, \bar{F})} \left| \sigma\left(\frac{a}{b}\right) - 1 \right|_{\bar{F}} \quad \text{est assez petit,}$$

où $|\cdot|_{\bar{F}}$ est l'unique valeur absolue sur $\bar{F}$ qui prolonge $|\cdot|_F$. La borne exacte dépendra du contexte.

Dans le cas non ramifié, on dit que $a \approx b$ si $\frac{a}{b}$ est topologiquement unipotent.

Théorème 7.3.2. *Posons*

$$\Delta^\flat(Y,X) := \Delta(\exp(Y)\epsilon, \exp(X)\tilde{\eta}),$$

alors il existe une bonne constante c telle que

$$\Delta^\flat(Y,X) = c\prod_u \Delta_u((Y'_u, Y''_u), X_u)\cdot \\ \cdot \Delta_+((Y'_+, Y''_-), X_+)\cdot \Delta_-((Y'_-, Y''_+), X_-).$$

Les termes $\Delta_u, \Delta_\pm$ sont définis de la façon suivante. Avec la convention $\bullet \in \{+,-,u\}$, supposons que $X_\bullet \in \mathcal{O}(K/K^\#, a, c)$ et $(K'/K'^\#, a', c') \oplus (K''/K''^\#, a'', c'')$ est la décomposition correspondant à $X_\bullet = (X'_\bullet, X''_\bullet)$. Définissons

$$\begin{aligned}
\Delta_u((Y'_u, Y''_u), X_u) &:= \mathrm{sgn}_{K''/K''^\#}(\gamma_u c''^{-1}\dot{P}_{X_u|L}(a'')), \quad \textit{pour tout } u \\
\Delta_+((Y'_+, Y''_-), X_+) &:= \mathrm{sgn}_{K''/K''^\#}(c''^{-1}\dot{P}_{X_+}(a'')), \\
\Delta_-((Y'_-, Y''_+), X_-) &:= \mathrm{sgn}_{K'/K'^\#}(c'^{-1}\dot{P}_{X_-}(a'));
\end{aligned}$$

où $P_{X_\pm} \in F[T]$ est le polynôme caractéristique de $X_\pm \in \mathrm{End}_F(W_\pm)$ et $P_{X_u|L} \in L[T]$ est celui de $X_u \in \mathrm{End}_L(W_u)$. Pour tout u, la constante $\gamma_u \in L^\times$ satisfait à $\tau(\gamma_u) = (-1)^{\dim_L W_u}\gamma_u$ et $\gamma_u \in \mathfrak{o}_L^\times$ dans le cas non ramifié.

Observons que $P_{X_u|L}$ est bien défini même si $L \simeq L^\# \times L^\#$; de plus, dans ce cas-là $\Delta_u = 1$ car $K'' = K''^\# \otimes_{L^\#} L \simeq K''^\# \times K''^\#$.

Démonstration. Ce théorème s'obtient en multipliant les formules dans 7.5.1, 7.5.2, 7.5.3, 7.6.1 et 7.6.2. □

Corollaire 7.3.3. *Pour tout $\lambda \in F^\times$, on a*

$$\Delta^\flat(Y,X) = \Delta^\flat(\lambda^2 Y, \lambda^2 X).$$

Cela nous permet de prolonger $\Delta^\flat$ en une fonction définie sur toute paire

$$(Y,X) \in (\mathfrak{h}_\epsilon)_{G-\mathrm{reg}}(F) \times (\mathfrak{g}_\eta)_{\mathrm{reg}}(F).$$

Démonstration. Vu le théorème, il suffit de constater que pour tout $\bullet \in \{+,-,u\}$, le facteur $\Delta_\bullet$ vérifie la même propriété, qui est immédiat. □

7.4 Des lemmes techniques

Les lemmes suivants seront les seuls ingrédients non-triviaux dans la démonstration de 7.3.2. On établit d'abord une formule de réciprocité pour $\mathrm{sgn}(\cdot)$. Commençons par une observation élémentaire. Soit z un élément dans une F-algèbre étale, P_z désigne toujours son polynôme minimal sur F.

Lemme 7.4.1. *Fixons un corps L. Soient K une L-algèbre étale et $z \in K^\times$ tels que $K = F[z]$. Soient*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{PGL}(2, L), \; cz + d \neq 0,$$

$$w := \frac{az+b}{cz+d}.$$

Soient $P_z \in L[T]$ *le polynôme caractéristique de* z *et* $P_w \in L[T]$ *celui de* w*. Posons* $m := \deg P_z = \deg P_w = \dim_F K$*, alors*

$$(cT+d)^m P_w\left(\frac{aT+b}{cT+d}\right) = c^m P_w\left(\frac{a}{c}\right) P_z(T),$$
$$(ad-bc)(cz+d)^{m-2}\dot{P}_w(w) = c^m P_w\left(\frac{a}{c}\right)\dot{P}_z(z).$$

Démonstration. Il suffit de démontrer la première formule. Observons que $w \neq \frac{a}{c}$, sinon $ad-bc = 0$. On se ramène au cas où K est un corps. Le polynôme à gauche s'annule en z et a degré m, donc il est égal à $P_z(T)$ multiplié par une constante non nulle. On calcule son coefficient de T^m et on arrive aisément au terme $c^m P_w(\frac{a}{c})$. □

Lemme 7.4.2. *Supposons qu'il y a une décomposition orthogonale* $W = W' \oplus W''$*,* $n' := \frac{1}{2}\dim W'$*,* $n'' := \frac{1}{2}\dim W''$*. Soit* $X \in \mathfrak{sp}(W)$ *semi-simple régulier tel que* $X = (X', X'')$ *où* $X' \in \mathfrak{sp}(W')$ *et* $X'' \in \mathfrak{sp}(W'')$*. Supposons que* $X \in \mathcal{O}(K/K^\#, a, c)$ *et*

$$(K/K^\#, a, c) = (K'/K'^\#, a', c') \oplus (K''/K''^\#, a'', c'')$$

par rapport à la décomposition $X = (X', X'')$*. Alors*

$$\mathrm{sgn}_{K'/K'^\#}(P_{X''}(a')) \cdot \mathrm{sgn}_{K''/K''^\#}(P_{X'}(a'')) = (-1,-1)_F^{n'n''}(\det X', \det X'')_F.$$

Démonstration. Appliquons 4.3.4 à $X \in \mathfrak{sp}(W)$, $X' \in \mathfrak{sp}(W')$ et $X'' \in \mathfrak{sp}(W'')$. On voit que

$$\gamma_\psi(q[X]) = \gamma_\psi((-1)^{n-1})\gamma_\psi(\det X) \cdot \mathrm{sgn}_{K/K^\#}(c^{-1}\dot{P}_X(a)), \tag{I.13}$$

$$\gamma_\psi(q[X']) = \gamma_\psi((-1)^{n'-1})\gamma_\psi(\det X') \cdot \mathrm{sgn}_{K'/K'^\#}(c'^{-1}\dot{P}_{X'}(a')), \tag{I.14}$$

$$\gamma_\psi(q[X'']) = \gamma_\psi((-1)^{n''-1})\gamma_\psi(\det X'') \cdot \mathrm{sgn}_{K''/K''^\#}(c''^{-1}\dot{P}_{X''}(a'')). \tag{I.15}$$

On a aussi $P_X = P_{X'}P_{X''}$ et $q[X] = q[X'] \oplus q[X'']$. En prenant (I.13) ÷ ((I.14) × (I.15)), on obtient

$$\mathrm{sgn}_{K'/K'^\#}(P_{X''}(a')) \cdot \mathrm{sgn}_{K''/K''^\#}(P_{X'}(a'')) = \frac{\gamma_\psi(\det X)\gamma_\psi(1)}{\gamma_\psi(\det X')\gamma_\psi(\det X'')} \cdot \frac{\gamma_\psi((-1)^{n-1})}{\gamma_\psi(1)\gamma_\psi(-1)^{n'-1})\gamma_\psi((-1)^{n''-1}))}. \tag{I.16}$$

En discutant les parités de n', n'' et en rappelant que $\gamma_\psi(-1) = \gamma_\psi(1)^{-1}$, on déduit

$$\frac{\gamma_\psi((-1)^{n-1})}{\gamma_\psi(1)\gamma_\psi((-1)^{n'-1})\gamma_\psi((-1)^{n''-1})} = \begin{cases} \gamma_\psi(1)^{-4}, & \text{si } n', n'' \text{ sont impairs;} \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On utilise le fait suivant ([89], §25 prop. 3 et §28 prop. 4) : pour tout $a, b \in F^\times$, on a

$$\frac{\gamma_\psi(ab)\gamma_\psi(1)}{\gamma_\psi(a)\gamma_\psi(b)} = (a,b)_F.$$

D'une part, en prenant $a = b = -1$, il en résulte que $\gamma_\psi(1)^4 = (-1,-1)_F = ((-1)^{n'n''}, -1)_F$ si n', n'' sont impairs ; en tout cas :

$$\frac{\gamma_\psi((-1)^{n-1})}{\gamma_\psi(1)\gamma_\psi((-1)^{n'-1})\gamma_\psi((-1)^{n''-1})} = (-1,-1)_F^{n'n''}.$$

D'autre part, en prenant $a = \det X'$ et $b = \det X''$, il en résulte que

$$\frac{\gamma_\psi(\det X)\gamma_\psi(1)}{\gamma_\psi(\det X')\gamma_\psi(\det X'')} = (\det X', \det X'')_F.$$

Cela achève la démonstration. □

On en déduit une version au niveau du groupe à l'aide de la transformation de Cayley.

Lemme 7.4.3. *Soit* $\delta \in \mathrm{Sp}(W)_{reg}$ *tel que* $\delta = (\delta', \delta'')$ *où* $W = W' \oplus W''$, $\delta' \in \mathrm{Sp}(W')$ *et* $\delta'' \in \mathrm{Sp}(W'')$. *Supposons que* $\delta \in \mathcal{O}(K/K^\#, a, c)$ *et*

$$(K/K^\#, a, c) = (K'/K'^\#, a', c') \oplus (K''/K''^\#, a'', c'')$$

par rapport à la décomposition $\delta = (\delta', \delta'')$. *Alors*

$$\text{(I.17)} \quad \mathrm{sgn}_{K''/K''^\#}(P_{a'}(a'')(-a'')^{-n'} \det(\delta' - 1)) \cdot \mathrm{sgn}_{K'/K'^\#}(P_{a''}(a')(-a')^{-n''} \det(\delta'' - 1)) = (-1,-1)_F^{n'n''} \left(\det \frac{\delta'+1}{\delta'-1}, \det \frac{\delta''+1}{\delta''-1} \right)_F .$$

Démonstration. Posons $z' = a' + \frac{1}{a'} \in K'^\#$, $z'' = a'' + \frac{1}{a''} \in K''^\#$; posons d'autre part $b' = \frac{z'+2}{z'-2}$, et idem pour b''. Alors 7.4.1 affirme que

$$P_{z'}(T) P_{b'}(1) = (T-2)^{n'} P_{b'} \left(\frac{T+2}{T-2} \right),$$

et idem pour z'' et b'', ce qui entraîne

$$\text{(I.18)} \quad P_{z'}(z'') P_{b'}(1) = (z''-2)^{n'} P_{b'}(b''),$$

$$\text{(I.19)} \quad P_{z''}(z') P_{b''}(1) = (z'-2)^{n''} P_{b''}(b').$$

On a $\left(\frac{a'+1}{a'-1}\right)^2 = b'$ (idem pour a'') ; on déduit du fait $\tau(\frac{a''+1}{a''-1}) = -\frac{a''+1}{a''-1}$ (idem pour a') que $P_{\frac{a''+1}{a''-1}}(T) = P_{b''}(T^2)$, d'où

$$P_{b''}(b') = P_{\frac{a''+1}{a''-1}} \left(\frac{a'+1}{a'-1} \right),$$

et idem si l'on échange a' et a''. Observons aussi que $P_{z'}(z'') = P_{a'}(a'')(a'')^{-n'}$ et $P_{z''}(z') = P_{a''}(a')(a')^{-n''}$. Assemblons toutes ces égalités dans (I.18), (I.19) et prenons $\mathrm{sgn}_{K''/K''^\#}(\cdot)$, $\mathrm{sgn}_{K'/K'^\#}(\cdot)$. Pour (I.18), cela donne

$$\mathrm{sgn}_{K''/K''^\#}(P_{a'}(a'')(a'')^{-n'} P_{\frac{a'+1}{a'-1}}(1)) = \mathrm{sgn}_{K''/K''^\#} \left((z''-2)^{n''} P_{\frac{a'+1}{a'-1}} \left(\frac{a''+1}{a''-1} \right) \right).$$

Or $z'' - 2 = -(1-a'')(1-\frac{1}{a''}) \in (-1) N_{K''/K''^\#}(K''^\times)$ et $P_{\frac{a'+1}{a'-1}}(1) = (-2)^{2n'} \det(\delta'-1)^{-1}$, d'où

$$\mathrm{sgn}_{K''/K''^\#}(P_{a'}(a'')(-a'')^{-n'} \det(\delta'-1)) = \mathrm{sgn}_{K''/K''^\#} \left(P_{\frac{a'+1}{a'-1}} \left(\frac{a''+1}{a''-1} \right) \right).$$

Appliquons le même argument à (I.19) et multiplions les formules qui en résultent. Une application de 7.4.2 donne le résultat cherché. □

Considérons maintenant une situation différente. On aura besoin de deux lemmes concernant les classes de conjugaison semi-simples de groupes orthogonaux pairs.

Lemme 7.4.4. *Soit* (V, q) *un* F*-espace quadratique de dimension paire. Soit* $K/K^\#$ *une* F*-algèbre étale à involution. Soit* $t \in F^\times$. *S'il existe* $a, c \in K^\#$ *tels que* $\tau(a) = -a$, $\tau(c) = c$ *et* $\mathcal{O}(K/K^\#, a, c)$ *existe dans* $\mathrm{SO}(V, q)$, *alors*

$$\mathrm{sgn}_{K/K^\#}(t) = (t, (-1)^{\frac{1}{2}\dim_F V} \det q)_F.$$

Démonstration. Supposons que $\mathcal{O}(K/K^{\#}, a, c)$ existe dans $\mathrm{SO}(V, q)$, alors

$$\begin{aligned}(V,q) &\simeq (K, (\mathrm{tr}_{K/F})_*(cN_{K/K^{\#}}(\cdot))),\\ (V,tq) &\simeq (K, (\mathrm{tr}_{K/F})_*(tcN_{K/K^{\#}}(\cdot))),\end{aligned}$$

où $N_{K/K^{\#}}$ est la (K, τ_K)-forme hermitienne $w \mapsto N_{K/K^{\#}}(w)$.

On a $\gamma_\psi(tq)/\gamma_\psi(q) = \mathrm{sgn}_{K/K^{\#}}(t)$ d'après 4.3.1. D'autre part la formule de γ_ψ en termes du déterminant et de l'invariant de Hasse $s(\cdot)$ ([56] 1.3.4) entraîne

$$\frac{\gamma_\psi(tq)}{\gamma_\psi(q)} = s(tq) \cdot s(q)$$

car $\dim_F V$ est paire. Posons $m = \frac{1}{2}\dim_F V$. Prenons une diagonalisation $q \simeq \langle d_1, \ldots, d_{2m}\rangle$ quelconque. Alors

$$\begin{aligned} s(tq)s(q) &= \prod_{i<j}((ta_i, ta_j)_F(a_i, a_j)_F)\\ &= \prod_{i<j}((t,t)_F(t,a_j)_F(a_i,t)_F)\\ &= (t,t)_F^m(t, \det q)_F, \quad \text{car } \binom{2m}{2} \equiv m \mod 2\\ &= (t,-1)_F^m(t,\det q)_F, \quad \text{car } (t,t)_F = (t,-1)_F\\ &= (t, (-1)^m \det q)_F,\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Lemme 7.4.5. *Soit (V, q) un F-espace quadratique de dimension paire. Si $Y \in \mathfrak{so}(V, q)$ est inversible, alors $\det Y \in \det q \cdot F^{\times 2}$.*

Démonstration. Fixons une base de V de sorte que $q = \langle a_1, \ldots, a_{2m}\rangle$ et regardons Y comme une matrice. Soit Q la matrice diagonale $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_{2m})$, alors $Y \in \mathfrak{so}(V, q)$ équivaut à ce que YQ soit une matrice anti-symétrique. Notons $\mathrm{Pf}(YQ) \in F^\times$ son pfaffien, alors

$$\det Y = \det YQ \cdot (\det Q)^{-1} = \mathrm{Pf}(YQ)^2 \cdot (\det Q)^{-1}.$$

Or $\det Q = a_1 \cdots a_{2m} = \det q$, d'où l'assertion. □

Établissons maintenant la réciprocité du facteur Δ_0.

Corollaire 7.4.6. *Sous les hypothèses de 7.4.3, on a*

$$\Delta_0(\delta', \delta'') = \Delta_0(-\delta'', -\delta'),$$

où $\Delta_0(-\delta'', -\delta')$ est défini par rapport au groupe endoscopique transposé $H'' \times H'$.

Démonstration. D'après 7.4.3, on a

$$\begin{aligned}\Delta_0(\delta', \delta'')\Delta_0(-\delta'', -\delta') = \mathrm{sgn}_{K''/K''^{\#}}\left(\det \frac{\delta'+1}{\delta'-1}\right) \mathrm{sgn}_{K'/K'^{\#}}((-1)^{n''})\\ \cdot (-1,-1)_F^{n'n''}\left(\det\frac{\delta'+1}{\delta'-1}, \det\frac{\delta''+1}{\delta''-1}\right)_F.\end{aligned}$$

La classe de conjugaison contenant $\frac{\delta'+1}{\delta'-1} \in \mathfrak{sp}(W')$ est paramétrée par $(K'/K'^{\#}, \frac{a'+1}{a'-1}, c')$; prenons q' la F-forme quadratique sur K' définie par $(\mathrm{tr}_{K'^{\#}/F})_*(c' N_{K'/K'^{\#}}(\cdot))$. Il existe $c'_0 \in K'^{\#\times}$ et $Y' \in \mathfrak{so}(K', q')$ tels que $\mathcal{O}(Y')$ est paramétré par $(K'/K'^{\#}, \frac{a'+1}{a'-1}, c'_0)$. Appliquons la même construction à a'' pour obtenir une F-forme quadratique q'' sur K''. Par 7.4.4, on a alors

$$\mathrm{sgn}_{K''/K''^{\#}}\left(\det \frac{\delta'+1}{\delta'-1}\right) = \left(\det \frac{\delta'+1}{\delta'-1}, (-1)^{n''} \det q''\right)_F,$$
$$\mathrm{sgn}_{K'/K'^{\#}}((-1)^{n''}) = ((-1)^{n''}, (-1)^{n'} \det q')_F.$$

Par 7.4.5, appliqué à $Y' \in \mathfrak{so}(K', q')$ et $Y'' \in \mathfrak{so}(K'', q'')$, on a

$$\mathrm{sgn}_{K''/K''^{\#}}\left(\det \frac{\delta'+1}{\delta'-1}\right) = \left(\det \frac{\delta'+1}{\delta'-1}, (-1)^{n''} \det \frac{\delta''-1}{\delta''+1}\right)_F,$$
$$\mathrm{sgn}_{K'/K'^{\#}}((-1)^{n''}) = \left((-1)^{n''}, (-1)^{n'} \det \frac{\delta'+1}{\delta'-1}\right)_F.$$

On en déduit que $\Delta_0(\delta', \delta'')\Delta_0(-\delta'', -\delta') = (-1,-1)_F^{n'n''}((-1)^{n'}, (-1)^{n''})_F = 1$. Cela achève la démonstration. □

7.5 Descente des termes Δ', Δ''

Proposition 7.5.1. *Supposons que $X_+ \in \mathcal{O}(K/K^{\#}, a, c)$, soient $X_+ = (X'_+, X''_+)$ et*

$$(K/K^{\#}, a, c) = (K'/K'^{\#}, a', c') \oplus (K''/K''^{\#}, a'', c'')$$

la décomposition de paramètres correspondante. Il existe alors une bonne constante c_+ telle que

$$\Delta'(\exp(X'_+))\Delta''(\exp(X''_+)) = c_+ \mathrm{sgn}_{K''/K''^{\#}}(c''^{-1}\dot{P}_{X''_+}(a'')).$$

Proposition 7.5.2. *Supposons que $X_- \in \mathcal{O}(K/K^{\#}, a, c)$, $X_- = (X'_-, X''_-)$ et $(K/K^{\#}, a, c) = (K'/K'^{\#}, a', c') \oplus (K''/K''^{\#}, a'', c'')$ la décomposition de paramètres correspondante.*

Il existe alors une bonne constante c_- telle que

$$\Delta'(-\exp(X'_-))\Delta''(-\exp(X''_-)) = c_- \mathrm{sgn}_{K'/K'^{\#}}(c'^{-1}\dot{P}_{X'_+}(a')).$$

Les assertions 7.5.1, 7.5.2 sont équivalentes. En effet, d'après 4.2.1,

$$\Delta'(\exp(X'_+))\Delta''(\exp(X''_+)) = \Delta'(-\exp(X''_+))\Delta''(-\exp(X'_+))$$
$$\Delta'(-\exp(X'_-))\Delta''(-\exp(X''_-)) = \Delta'(\exp(X''_-))\Delta''(\exp(X'_-)).$$

Par conséquent, il suffit d'établir 7.5.1.

Démonstration de 7.5.1. On a $\Delta'(\exp(X'_+)) = 1$ par 4.2.1, 4.1.6 et la lissité de Θ_ψ ; dans le cas non ramifié, on utilise 4.4.2. D'après 4.5.2, il existe une bonne constante c telle que

$$\Delta'(\exp(X'_+))\Delta''(\exp(X''_+)) = c \cdot \gamma_\psi(q[X''_+]).$$

Vu 4.3.4, on a

$$\gamma_\psi(q[X''_+]) = \gamma_\psi((-1)^{n''-1})\gamma_\psi(\det X''_+) \cdot \mathrm{sgn}_{K''/K''^{\#}}(c''^{-1}\dot{P}_{X''_+}(a'')).$$

Le terme $\gamma_\psi((-1)^{n''-1})$ étant une bonne constante, il suffit de montrer que $\gamma_\psi(\det X''_+)$ l'est aussi. Rappelons que $X''_+ \overset{\mathrm{VP}}{\longleftrightarrow} Y''_-$ et $Y''_- \in \mathfrak{so}(V''_-, q''_-)$, V''_- est de dimension paire. D'où $\gamma_\psi(\det X''_+) = \gamma_\psi(\det q''_-)$ par 7.4.5, qui est une bonne constante car $\det q''_- \in \mathfrak{o}_F^\times$ dans le cas non ramifié. □

Proposition 7.5.3. *Fixons la donnée u et posons $L = F[u]$. Supposons que $X_u \in \mathcal{O}(K/K^{\#}, a, c)$, soient $X_u = (X'_u, X''_u)$ et $(K/K^{\#}, a, c) = (K'/K'^{\#}, a', c') \oplus (K''/K''^{\#}, a'', c'')$ la décomposition de paramètres correspondante.*

Il existe alors une bonne constante c_u et une constante $\alpha_u \in L^\times$, $\alpha_u \in \mathfrak{o}_L^\times$ dans le cas non ramifié, $\tau(\alpha_u) = (-1)^{\dim_L W''_u}\alpha_u$, telles que

$$\Delta'(\exp(X'_u)\tilde{u}')\Delta''(\exp(X''_u)\tilde{u}'') = c_u \mathrm{sgn}_{K''/K''^{\#}}(\alpha_u c''^{-1}\dot{P}_{X''_u|L}(a'')).$$

Démonstration. D'après 5.3.3,

$$\Delta'(\exp(X'_u)\tilde{u}')\Delta''(\exp(X''_u)\tilde{u}'') = \Delta'(\exp(X_u)\tilde{u})\gamma_\psi(q[C_{\exp(X''_u)u''}]).$$

Puisque $\det(u^2-1) \neq 0$, le terme $\Delta'(\exp(X_u)\tilde{u}) = \Delta'(\tilde{u})$ est une bonne constante d'après 4.2.1 ; dans le cas non ramifié, il faut aussi 4.4.2. Il reste à traiter $\gamma_\psi(q[C_{\exp(X''_u)u''}])$.

On a $K'' = K''^{\#} \otimes_L^{\#} L$. Si $L \simeq L^{\#} \times L^{\#}$, alors la forme $q[C_{\exp(X''_u)u''}]$ est hyperbolique d'après 3.2.4, donc $\gamma_\psi(q[C_{\exp(X''_u)u''}]) = 1$. D'autre part $\mathrm{sgn}_{K''/K''^{\#}}(\cdot) = 1$ dans ce cas-là et la proposition est prouvée. Supposons désormais que L est un corps. Fixons un plongement $L \hookrightarrow \bar{F}$; la formule finale sera indépendante du plongement.

Posons

$$\begin{aligned} m'' &:= \dim_L W''_u, \\ A'' &:= \exp(a''), \\ C'' &:= \frac{uA''-1}{uA''+1}. \end{aligned}$$

On voit que $A'' \approx 1$ et $C'' \approx \frac{u-1}{u+1} \neq 0$. Grâce à 4.3.4,

$$\begin{aligned} \gamma_\psi(q[C_{\exp(X''_u)u''}]) = \gamma_\psi((-1)^{[L:F]m''-1})\gamma_\psi(N_{K''/F}(2C''))\cdot \\ \cdot\, \mathrm{sgn}_{K''/K''^{\#}}(c''^{-1}\dot{P}_{2C''}(2C'')). \end{aligned} \tag{I.20}$$

Le terme $\gamma_\psi((-1)^{[L:F]m''-1})$ est une bonne constante, le terme $\gamma_\psi(N_{K''/F}(2C''))$ est égal à

$$\gamma_\psi\left(N_{K''/F}\left(2\cdot\frac{u-1}{u+1}\right)\right) = \gamma_\psi(\det_F(2(u+1)(u-1)^{-1}|W''_u)),$$

ce qui est aussi une bonne constante. Il reste donc à traiter le terme $\mathrm{sgn}_{K''/K''^{\#}}(\cdots)$.

Enfin, $\mathrm{sgn}_{K''/K''^{\#}}(c''^{-1}\dot{P}_{2C''}(2C'')) = \mathrm{sgn}_{K''/K''^{\#}}(2c''^{-1}\dot{P}_{C''}(C''))$. Posons

$$\Sigma_{L/F} := \mathrm{Hom}_{F-\mathrm{alg}}(L, \bar{F})$$

et posons $\sigma_0 \in \Sigma_{L/F}$ l'unique élément fixant u.

Observons que

$$P_{C''} = \prod_{\sigma \in \Sigma_{L/F}} P^\sigma_{C''|L}$$

où la notation $P_{\bullet|L}$ signifie le polynôme caractéristique de $\bullet$ sur L, l'action de $\Sigma_{L/F}$ sur $L[T]$ provient de l'action sur les coefficients. On a aussi $\deg P_{C''|L} = m''$. Il en résulte que

$$\begin{aligned} \dot{P}_{C''}(C'') &= \dot{P}_{C''|L}(C'') \cdot \prod_{\substack{\sigma\in\Sigma_{L/F},\\ \sigma\neq\sigma_0}} P^\sigma_{C''|L}(C'') \\ &= k_u \dot{P}_{C''|L}(C''), \end{aligned} \tag{I.21}$$

où $k_u \in L^\times$ est une constante ; $k_u \in \mathfrak{o}_L^\times$ dans le cas non ramifié.

D'après 7.4.1, on a

$$2u(uA'' + 1)^{m''-2}\dot{P}_{C''|L}(C'') = u^{m''}P_{C''|L}(1)\dot{P}_{A''|L}(A''),$$

d'où

$$\begin{aligned}\dot{P}_{C''|L}(C'') &= \frac{1}{2}u^{m''-1}(uA''+1)^{2-m''}P_{C''|L}(1)\dot{P}_{A''|L}(A'')\\ &\approx \frac{1}{2}u^{m''-1}(u+1)^{2-m''}\det_L(1-(u-1)(u+1)^{-1}|W''_u)\dot{P}_{A''|L}(A'')\\ &\approx h_u\dot{P}_{a''|L}(a''),\end{aligned} \tag{I.22}$$

où $h_u \in L^\times$ est une constante ; $h_u \in \mathfrak{o}_L^\times$ dans le cas non ramifié.

En combinant (I.20),(I.21),(I.22), on voit qu'il existe une bonne constante c_u et une constante $\alpha_u \in L^\times$, $\alpha_u \in \mathfrak{o}_L^\times$ dans le cas non ramifié, telles que

$$\gamma_\psi(q[C_{\exp(X''_u)u''}]) = c_u \cdot \mathrm{sgn}_{K''/K''^\#}(\alpha_u c''^{-1}\dot{P}_{a''|L}(a'')).$$

Pour que le terme dans $\mathrm{sgn}_{K''/K''^\#}$ appartienne à $K''^\#$, il faut que $\tau(\alpha_u) \in (-1)^{m''}\alpha_u$. Cela achève la démonstration.

□

7.6 Descente du terme Δ_0

Nous considérons d'abord les trois premiers termes des dix termes dans 7.1.6.

Proposition 7.6.1. *Soit* $\bullet \in \{+,-,u\}$. *Supposons que*

$$\begin{aligned}X'_\bullet &\in \mathcal{O}(K'/K'^\#, a', c'),\\ X''_\bullet &\in \mathcal{O}(K''/K''^\#, a'', c'');\end{aligned}$$

alors il existe des bonnes constantes $d_\bullet$ *telles que*

1. $\Delta_0(\exp(X'_+), \exp(X''_+)) = d_+ \cdot \mathrm{sgn}_{K''/K''^\#}(P_{X'_+}(a''))$,
2. $\Delta_0(-\exp(X'_-), -\exp(X''_-)) = d_- \cdot \mathrm{sgn}_{K'/K'^\#}(P_{X''_-}(a'))$,
3. $\Delta_0(\exp(X'_u)u, \exp(X''_u)u) = d_u \cdot \mathrm{sgn}(\beta_u P_{X'_u|L}(a''))$, *où* $P_{X'_u|L}$ *est le polynôme caractéristique de* X'_u *sur* L, *et* $\beta_u \in L^\times$ *est une constante,* $\tau(\beta_u) = (-1)^{\dim_L W'_u}\beta_u$; $\beta_u \in \mathfrak{o}_L^\times$ *dans le cas non ramifié.*

Dans les démonstrations ci-dessous, nous donnerons des formes explicites pour d_+, d_-, d_u et β_u. Vu 7.4.6, il suffit d'établir le cas $\bullet = +$ et $\bullet = u$.

Démonstration pour $\bullet = +$. Posons

$$\begin{aligned}m' &:= \frac{1}{2}\dim_F W'_+,\\ m'' &:= \frac{1}{2}\dim_F W''_+,\\ A' &:= \exp(a'),\\ A'' &:= \exp(a'').\end{aligned}$$

Vu la définition de Δ_0, on a

$$\begin{aligned}\Delta_0(\exp(X'_+), \exp(X''_+)) &= \mathrm{sgn}_{K''/K''\#}(P_{A'}(A'')(-A'')^{-m'}2^{2m'}) \\ &= \mathrm{sgn}_{K''/K''\#}(-1)^{m'}\mathrm{sgn}_{K''/K''\#}(P_{a'}(a'')),\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait $P_{A'}(A'') \approx P_{a'}(a'')$.

Montrons que $\mathrm{sgn}_{K''/K''\#}(-1)$ est une bonne constante. Il y a une correspondance $X''_+ \xleftrightarrow{\mathrm{VP}} Y''_- \in \mathfrak{so}(V''_-, q''_-)$. D'après 7.4.4,

$$\mathrm{sgn}_{K''/K''\#}(-1) = (-1, (-1)^{m''}\det q''_-)_F.$$

Prenons $d_+ = ((-1)^{m'}, (-1)^{m''}\det q''_-)_F$, c'est une bonne constante. □

Démonstration pour $\bullet = u$. La démonstration est analogue à celle de Δ', Δ''. Si $L = F[u] \simeq L^\# \times L^\#$, alors les deux côtés valent 1 et on peut prendre $d_u = 1$, β_u quelconque. Supposons désormais que L est un corps et fixons un plongement $L \hookrightarrow \bar{F}$.

Posons

$$\begin{aligned} m' &:= \dim_L W'_u, \\ m'' &:= \dim_L W''_u, \\ A' &:= \exp(a'), \\ A'' &:= \exp(a''), \\ \Sigma_{L/K} &:= \mathrm{Hom}_{F-\mathrm{alg}}(L, \bar{F}). \end{aligned}$$

Regardons L comme un sous-corps de $\bar{F}$. Notons $\sigma_0 \in \Sigma_{L/K}$ l'unique élément fixant u, alors

$$P_{\exp(X'_u)u} = P_{A'u} = \prod_{\sigma \in \Sigma_{L/K}} P^\sigma_{A'u|L},$$

où $P_{A'u|L}$ est le polynôme caractéristique de $A'u$ sur L, on a $\deg P_{A'u|L} = m'$.

Si $\sigma \in \Sigma_{L/F}, \sigma \neq \sigma_0$, alors

$$P^\sigma_{A'u|L}(uA'') \approx (u - \sigma(u))^{m'} \neq 0$$

D'autre part

$$\begin{aligned}P^{\sigma_0}_{A'u|L}(uA'') = P_{A'u|L}(uA'') &\approx u^{m'}P_{A'|L}(A'') \\ &\approx u^{m'}P_{a'|L}(a'').\end{aligned}$$

Posons

$$\delta(u) := \prod_{\substack{\sigma \in \Sigma_{L/F} \\ \sigma \neq \sigma_0}} (u - \sigma(u)) \in L^\times.$$

On vérifie que

$$\beta_u := ((-u)^{-[L:F]}u\delta(u))^{m'} \in L^\times$$

satisfait à $\tau(\beta_u) = (-1)^{m'}\beta_u$; il en est de même pour $P_{X'_u|L}(a'')$. On a aussi $\beta_u \in \mathfrak{o}_L^\times$ dans le cas non ramifié. D'où

$$\begin{aligned}\Delta_0(\exp(X'_u)u, \exp(X''_u)u) &= \mathrm{sgn}_{K''/K''\#}(\beta_u P_{X'_u|L}(a'')\det_F(u + 1|W'_u)) \\ &= \mathrm{sgn}_{K''/K''\#}(\beta_u P_{X'_u|L}(a''))\mathrm{sgn}_{K''/K''\#}(N_{L/F}(u + 1)).\end{aligned}$$

Soit q''_u la F-forme quadratique sur K'' définie par $(\mathrm{tr}_{L/F})_*(h''_u)$. Il y a une correspondance $X''_u \xleftrightarrow{\mathrm{VP}} Y''_u \in \mathfrak{u}(V''_u, h''_u)$, donc

$$\mathrm{sgn}_{K''/K''^\#}(N_{L/F}(u+1)) = (N_{L/F}(u+1), (-1)^{m''[L^\#:F]} \det q''_u)_F$$

d'après 7.4.4 ; notons-le d_u. C'est une bonne constante et on arrive à

$$\Delta_0(\exp(X'_u)u, \exp(X''_u)u) = d_u \cdot \mathrm{sgn}_{K''/K''^\#}(\beta_u P_{X'_u|L}(a'')).$$

Remarquons que les définitions de d_u, β_u ont aussi un sens dans le cas $L = L^\# \times L^\#$. □

Traitons maintenant les sept autres termes dans 7.1.6.

Proposition 7.6.2. *Il existe des bonnes constantes $c_{u',u''}$ (pour tous $u' \neq u''$), $c_{u,+}$, $c_{u,-}$, $c_{+,u}$, $c_{-,u}$, $c_{+,-}$, $c_{-,+}$ telles que*

$$\begin{gathered}
\Delta_0(\exp(X'_{u'})u', \exp(X''_{u''})u'') = c_{u',u''},\\
\Delta_0(\exp(X'_u)u, \exp(X''_+)) = c_{u,+},\\
\Delta_0(\exp(X'_u)u, -\exp(X''_-)) = c_{u,-},\\
\Delta_0(\exp(X'_+), \exp(X''_u)u) = c_{+,u},\\
\Delta_0(-\exp(X'_-), \exp(X''_u)u) = c_{-,u},\\
\Delta_0(\exp(X'_+), -\exp(X''_-)) = c_{+,-},\\
\Delta_0(-\exp(X'_-), \exp(X''_+)) = c_{-,+}.
\end{gathered}$$

Démonstration. Pour tout $\bullet \in \{u', u'', +, -\}$, on suppose que $X'_\bullet \in \mathcal{O}(K'/K'^\#, a', c')$, $X''_\bullet \in \mathcal{O}(K''/K''^\#, a'', c'')$. Vu 7.4.6, il suffit d'établir les cas (u', u''), $(u, +)$, , $(+, u)$ et $(+, -)$.

Le cas $(\mathbf{u'}, \mathbf{u''})$. Posons

$$\begin{aligned}
m' &:= \frac{1}{2} \dim_F W'_{u'},\\
m'' &:= \frac{1}{2} \dim_F W''_{u''},\\
L'' &:= F[u''].
\end{aligned}$$

Alors

$$P_{\exp(a')u'}(\exp(a'')u'')(-\exp(a'')u'')^{-m'} \approx P_{u'}(u'')(-u')^{-m'},$$

où $P_{u'}$ est le polynôme caractéristique de $u' \in \mathrm{End}_F(W'_{u'})$. On vérifie que $P_{u'}(u'')(-u'')^{-m'} \in L^{\#\times}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\Delta_0(\exp(X'_{u'})u', \exp(X''_{u''})u'') = \mathrm{sgn}_{K''/K''^\#}&(P_{u'}(u'')(-u'')^{-m'})\cdot\\
&\cdot \mathrm{sgn}_{K''/K''^\#}(\det_F(u'+1|W'_{u'})).
\end{aligned}$$

Soit $q'' := (\mathrm{tr}_{L''/L''^\#})_*(h''_{u''})$. Il y a une correspondance $X''_{u''} \xleftrightarrow{\mathrm{VP}} Y''_{u''} \in \mathfrak{so}(V''_{u''}, q'')$. On déduit par 7.4.4 que

$$\begin{aligned}
\mathrm{sgn}_{K''/K''^\#}(P_{u'}(u'')(-u'')^{-m'}) &= (P_{u'}(u'')(-u'')^{-m'}, (-1)^{\frac{m''}{[L''^\#:F]}} \det q'')_{L''^\#}\\
&=: c_1.
\end{aligned}$$

Toujours par 7.4.4, on a aussi

$$\begin{aligned}\mathrm{sgn}_{K''/K''\#}(\det_F(u'+1|W'_{u'})) &= (\det_F(u'+1|W'_{u'}), (-1)^{m''}\det((\mathrm{tr}_{\,L''\#/F})_* q''))_F \\ &= (N_{L'/F}(u'+1), (-1)^{m''}\det((\mathrm{tr}_{\,L''\#/F})_* q''))_F \\ &=: c_2.\end{aligned}$$

Prenons $c_{u',u''} := c_1c_2$, c'est une bonne constante car c_1 et c_2 le sont.

Le cas $(\mathbf{u}, +)$. Posons $m' := \frac{1}{2}\dim_F W'_u$, $m'' := \frac{1}{2}\dim_F W''_+$. On a $P_{\exp(a')u}(\exp(a'')) \approx P_u(1) \in F^\times$. D'où

$$\begin{aligned}\Delta_0(\exp(X'_u)u, X''_+) &= \mathrm{sgn}_{K''/K''\#}(P_u(1)(-1)^{-m'})\mathrm{sgn}_{K''/K''\#}(\det_F(u+1|W'_u)) \\ &= \mathrm{sgn}_{K''/K''\#}(P_u(1)(-1)^{-m'})\mathrm{sgn}_{K''/K''\#}(N_{L/F}(u+1)) \\ &= \mathrm{sgn}_{K''/K''\#}(\det_F(1-u|W'_u)(-1)^{-m'})\mathrm{sgn}_{K''/K''\#}(N_{L/F}(u+1)).\end{aligned}$$

Il y a une correspondance $X''_+ \xleftrightarrow{\mathrm{VP}} Y''_- \in \mathfrak{so}(V''_-, q''_-)$. On déduit par 7.4.4 que

$$\begin{aligned}\mathrm{sgn}_{K''/K''\#}(\det_F(1-u|W'_u)(-1)^{-m'}) &= (\det_F(1-u|W'_u)(-1)^{-m'}, (-1)^{m''}\det q''_-)_F \\ &=: c_1,\end{aligned}$$

qui est une bonne constante.

De même, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{sgn}_{K''/K''\#}(N_{L/F}(u+1)) &= (N_{L/F}(u+1), (-1)^{m''}\det q''_-)_F \\ &=: c_2,\end{aligned}$$

c'est aussi une bonne constante. Prenons $c_{u,+} := c_1c_2$.

Le cas $(+, \mathbf{u})$. Posons

$$\begin{aligned}m' &:= \frac{1}{2}\dim_F W'_+, \\ m'' &:= \frac{1}{2}\dim_F W''_u, \\ L &:= F[u].\end{aligned}$$

Comme dans le cas $(u, +)$, on arrive à

$$\begin{aligned}\Delta_0(\exp(X'_+), \exp(X''_u)u) &= \mathrm{sgn}_{K''/K''\#}(P_1(u)(-u)^{-m'}2^{2m'}) \\ &= \mathrm{sgn}_{K''/K''\#}(P_1(u)(-u)^{-m'}),\end{aligned}$$

où $P_1(T) = (T-1)^{2m'}$ est le polynôme caractéristique de $1 \in \mathrm{End}_F(W'_+)$.

Soit $q'' := (\mathrm{tr}_{\,L''/L''\#})_*(h''_{u''})$. Comme dans le cas (u', u''), on conclut par 7.4.4 que

$$\mathrm{sgn}_{K''/K''\#}(P_1(u)(-u)^{-m'}) = ((u-1)^{2m'}(-u)^{-m'}, (-1)^{\frac{m''}{[L:F]}}\det q'')_{L\#}.$$

Prenons-le comme la bonne constante $c_{+,u}$.

Le cas $(+,-)$. Posons $m' := \frac{1}{2}\dim_F W'_+$. Alors

$$\begin{aligned}\Delta_0(\exp(X'_+), -\exp(X''_-)) &= \mathrm{sgn}_{K''/K''^\#}(P_1(-1)2^{2m'}) \\ &= \mathrm{sgn}_{K''/K''^\#}((-2)\cdot 2)^{2m'} = 1.\end{aligned}$$

Prenons donc $c_{+,-} = 1$. □

7.7 Comparaison avec les facteurs de transfert des groupes classiques

Supposons F non archimédien. Les facteurs de transfert pour les algèbres de Lie des groupes classiques quasi-déployés sont décrits dans [82], Chapitre X. Comme dans [82], la correspondance de points est la correspondance par valeurs propres.

Relions maintenant 7.3.2 et les facteurs de transfert pour les groupes classiques.

Théorème 7.7.1. *Supposons que H_ϵ est quasi-déployé. Les facteurs dans 7.3.2 satisfont à :*

- *pour tout u, $\Delta_u((Y'_u, Y''_u), X_u)$ est le facteur de transfert pour le groupe endoscopique $U(V'_u, h'_u) \times U(V''_u, h''_u)$ de $U(W_u, h_u)$;*
- *$\Delta_+((Y'_+, Y''_-), X_+)$ est le facteur de transfert pour le groupe endoscopique $\mathrm{Sp}(W'_+) \times \mathrm{SO}(V''_-, q''_-)$ de $\mathrm{Sp}(W_+)$ évalué en $((X'_+, Y''_-), X_+)$;*
- *$\Delta_-((Y'_-, Y''_+), X_-)$ est le facteur de transfert pour le groupe endoscopique $\mathrm{SO}(V'_-, q'_-) \times \mathrm{Sp}(W''_-)$ de $\mathrm{Sp}(W_-)$ évalué en $((Y'_-, X''_-), X_-)$.*

De plus, ce sont les facteurs de transfert normalisés au sens de [84] §4.7 dans le cas non ramifié.

Démonstration. Prenons garde (cf. 3.3.6) que notre paramétrage de classes de conjugaison est différent que celui de [82] (cf. 3.3.6). Il faut aussi les observations ci-dessous.

- Il s'agira de groupes classiques sur les corps $L := F[u]$. Cela ne gène pas car le formalisme de l'endoscopie est compatible avec la restriction des scalaires.
- Nos formes (W_u, h_u) sont anti-hermitiennes, pourtant celles de [82] sont hermitiennes ; cela n'affecte pas le groupe unitaire, mais cela change le choix de paramètres ($\tau(c) = -c$ au lieu de $\tau(c) = c$) et la description de formes dans [82] X.3.
- Afin d'étendre les formules pour le facteur de transfert de [82] aux groupes classiques non quasi-déployés, on utilise [52] (4.2) (il faut l'adapter à l'algèbre de Lie). Soit M un groupe unitaire ou orthogonal sur F, fixons une forme intérieure quasi-déployée M^* et un torseur intérieur $\psi : M \times_F \bar{F} \xrightarrow{\sim} M^* \times_F \bar{F}$. Il faut calculer un invariant défini comme dans [52] (3.4), avec des notations évidentes :

  $$\mathrm{inv}\left(\frac{Y, X}{Y', X'}\right).$$

  Pour des tels groupes, on peut choisir (M^*, ψ) dont la classe de cohomologie provient de $H^1(F, M)$ au lieu de $H^1(F, M_{\mathrm{ad}})$. Cela permet d'éviter les constructions de doublements de [52]. Un calcul explicite analogue à celui dans [82] X permet de conclure.
- Les cas où $\mathrm{SO}(V'_-, q'_-)$ ou $\mathrm{SO}(V''_-, q''_-)$ est isomorphe à $\mathbb{G}_\mathrm{m}$ sont exclus dans [82] car ils rendent l'endoscopie non elliptique ; pour la même raison, on ne considère pas le cas $L \simeq L^\# \times L^\#$ (qui revient à l'endoscopie pour GL.) Or les formules de Waldspurger restent valables dans ces cas-là : elles valent la constante 1, et il en est de même pour nos formules.
- A cause de notre définition d'intégrales orbitales, nous avons supprimé le facteur Δ_{IV} dans le facteur de transfert de [82].

Après des modifications, l'identification de $\Delta_\pm$ résultent immédiatement. Quant à Δ_u, il suffit de considérer le cas où $L = F[u]$ est un corps et $U(W_u, h_u)$ est quasi-déployé. Posons $d := \dim_L W_u$, on peut choisir $\gamma \in L^\times$ et une base de $\{e_j : 1 \leq j \leq d\}$ de W_u, de sorte que

$$\tau(\gamma) = (-1)^d \gamma,$$
$$h_u(e_j, e_k) = \begin{cases} 0, & \text{si } j+k \neq d+1, \\ 2\gamma(-1)^{j+1}, & \text{si } j+k = d+1. \end{cases}$$

On peut prendre $\gamma \in \mathfrak{o}_L^\times$ dans le cas non ramifié.

Supposons que $X_u \in \mathcal{O}(K/K^\#, a, c)$, $X_u = (X'_u, X''_u)$ et $(K/K^\#, a, c) = (K'/K'^\#, a', c') \oplus (K''/K''^\#, a'', c'')$ la décomposition de paramètres correspondante. Alors le facteur de transfert pour le groupe endoscopique $U(V'_u, h'_u) \times U(V''_u, h''_u)$ de $U(W_u, h_u)$ est, à une constante multiplicative près,

$$\operatorname{sgn}_{K''/K''^\#}(\gamma c''^{-1} \dot{P}_{X_u}(a'')).$$

D'autre part, il existe $\gamma_u \in L^\times$, $\gamma_u \in \mathfrak{o}_L^\times$ dans le cas non ramifié tel que $\tau(\gamma_u) = (-1)^d \gamma_u$ et $\Delta_u((Y'_u, Y''_u), X_u)$ est égal à

$$(\text{bonne constante}) \cdot \operatorname{sgn}_{K''/K''^\#}(\gamma_u c''^{-1} \dot{P}_{X_u}(a'')).$$

Il suffit de montrer que $\operatorname{sgn}_{K''/K''^\#}(\frac{\gamma}{\gamma_u})$ est une bonne constante. Cela résulte de 7.4.4 car $X''_u \xleftrightarrow{\mathrm{VP}} Y''_u$ et $U(V''_u, h''_u) \subset \mathrm{SO}(V''_u, (\operatorname{tr}_{L/L^\#})_* h''_u)$.

Quant à la normalisation, voir la remarque à la fin de [82] X. □

8 Transfert : le cas non archimédien

Dans cette section, F est toujours un corps local non archimédien de caractéristique nulle, $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ désigne le revêtement métaplectique à huit feuillets $\widetilde{\mathrm{Sp}}^{(8)}(W)$ de $\mathrm{Sp}(W)$.

8.1 Voisinages d'un élément semi-simple

Soit M un F-groupe réductif connexe ou un revêtement d'un tel groupe vérifiant 5.5.1. Dans le cas d'un revêtement $\mathbf{p} : M \to \underline{M}(F)$, si $\eta \in M_{\mathrm{ss}}$, posons $M^\eta := \mathbf{p}^{-1}(\underline{M}^{p(\eta)}(F))$ et $M_\eta := \mathbf{p}^{-1}(\underline{M}_{p(\eta)}(F))$. Dans le cas d'un groupe réductif, on confond systématiquement M et $M(F)$.

Pour tout $\eta \in M_{\mathrm{ss}}$ et tout ouvert M^η-invariant $\mathfrak{U}' \subset \mathfrak{m}_\eta$ contenant 0, il existe un ouvert M^η-invariant $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}'$ tel que

1. $\exp : \mathfrak{U} \to M_\eta$ est défini et est un homéomorphisme sur son image, qui est ouvert dans M_η ;
2. l'application $(X, x) \mapsto x^{-1} \exp(X) \eta x$ de $\mathfrak{U} \times M$ sur M est partout submersive, son image $\mathfrak{U}^\natural$ est un ouvert M^η-invariant de M ;
3. si $x \in M$ et s'il existe $X \in \mathfrak{U}$ tel que $x^{-1} \exp(X) \eta x \in \exp(\mathfrak{U})\eta$, alors $x \in M^\eta$.

De plus, tout ouvert M-invariant dans M contenant η contient un ouvert de la forme $\mathfrak{U}^\natural$. Lorsque M est un F-groupe réductif et $\mathfrak{U}'$ est invariant par conjugaison géométrique, on peut supposer de plus que

– $\mathfrak{U}$ est invariant par conjugaison géométrique sous M^η ;
– si $x \in M(\bar{F})$ et s'il existe $X \in \mathfrak{U}$ tel que $x^{-1} \exp(X) \eta x \in \exp(\mathfrak{U})\eta$, alors $x \in M^\eta(\bar{F})$.

Posons $\mathfrak{U}_{\mathrm{reg}} := \mathfrak{U} \cap \mathfrak{m}_{\eta,\mathrm{reg}}$.

Proposition 8.1.1 (Descente d'intégrales orbitales). *Soit $\mathfrak{U}$ un ouvert comme ci-dessus. Supposons $\mathfrak{U}$ suffisamment petit.*

– *Soit $f^\natural \in C_c^\infty(\mathfrak{U}^\natural)$, alors il existe $f \in C_c^\infty(\mathfrak{U})$ tel que*

$$J_{M_\eta}(X, f) = J_M(\exp(X)\eta, f^\natural)$$

pour tout $X \in \mathfrak{U}_{reg}$.

– *Inversement, soit $f \in C_c^\infty(\mathfrak{U})$ tel que $X \mapsto J_{M_\eta}(X, f)$ est invariant par $M^\eta(F)$, alors il existe $f^\natural \in C_c^\infty(\mathfrak{U}^\natural)$ qui satisfait à l'égalité ci-dessus.*

Supposons que M est un F-groupe réductif connexe et l'ouvert $\mathfrak{U}$ est invariant par conjugaison géométrique sous M^η, alors les énoncés précédents restent vrais pour l'égalité

$$J^{st}_{M_\eta}(X, f) = J^{st}_M(\exp(X)\eta, f^\natural),$$

et la condition sur f pour l'existence de $f^\natural$ est que $X \mapsto J_{M_\eta}(X, f)$ soit invariant par conjugaison géométrique par M^η.

Ces propriétés sont bien connues, voir par exemple [84] 2.3.

8.2 Un triplet endoscopique non standard

Rappelons la définition d'un triplet endoscopique non standard (G_1, G_2, j_*) dans [84] 1.7. Ici G_1, G_2 sont des groupes semi-simples connexes et simplement connexes, quasi-déployés sur F. Fixons des tores maximaux $T_i \subset G_i$ qui font partie d'une paire de Borel définie sur F. Posons $X_{i,*} := X_*(T_i)$, $X_i^* := X^*(T_i)$ et posons $X_{i,*,\mathbb{Q}} := X_{i,*} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, $X^*_{i,\mathbb{Q}} := X_i^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Notons $\Sigma_i \subset X_i^*$ les racines et $\check{\Sigma}_i \subset X_i^*$ les coracines. La donnée j_* est un isomorphisme

$$j_* : X_{1,*,\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} X_{2,*,\mathbb{Q}}.$$

Notons $j^* : X^*_{2,\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} X^*_{1,\mathbb{Q}}$ l'isomorphisme transposé. Ces données sont soumises aux conditions suivantes :

– il existe des bijections $\check{\tau} : \check{\Sigma}_1 \to \check{\Sigma}_2$, $\tau : \Sigma_2 \to \Sigma_1$ et des applications $\check{b} : \check{\Sigma}_1 \to \mathbb{Q}_{>0}$, $b : \Sigma_2 \to \mathbb{Q}_{>0}$ telles que $j_*(\check{\alpha}_1) = \check{b}(\check{\alpha}_1)\check{\tau}(\check{\alpha}_1)$ et $j^*(\alpha_2) = b(\alpha_2)\tau(\alpha_2)$ pour tous $\check{\alpha}_1 \in \check{\Sigma}_1$, $\alpha_2 \in \Sigma_2$. De plus, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} \Sigma_1 \arrow[d] & \Sigma_2 \arrow[l, "\tau"'] \arrow[d] \\ \check{\Sigma}_1 \arrow[r, "\check{\tau}"] & \check{\Sigma}_2 \end{tikzcd}$$

où $\Sigma_i \to \check{\Sigma}_i$ $(i = 1, 2)$ sont les bijections naturelles de données radicielles.

– j_* et j^* sont équivariants pour les actions de Γ_F.

Observons que la définition est symétrique en G_1 et G_2.

L'application $\check{\tau}$ induit un isomorphisme de groupes de Weyl $W^{G_1} \xrightarrow{\sim} W^{G_2}$. On vérifie que ces données donnent naissance à un F-isomorphisme naturel

$$\mathfrak{t}_1/W^{G_1} \to \mathfrak{t}_2/W^{G_2},$$

ce qui permet de définir la correspondance de classes de conjugaison semi-simples dans les algèbres de Lie pour l'endoscopie non standard. Soient $X_i \in \mathfrak{t}_{i,\mathrm{reg}}(F)$ qui se correspondent et notons T_i le commutant de X_i dans G_i $(i = 1, 2)$, comme pour l'endoscopie standard, il y a aussi une correspondance de mesures de Haar sur $T_1(F)$ et $T_2(F)$.

Théorème 8.2.1 (Transfert non standard, [84] 1.8)**.** *Soit* (G_1, G_2, j_*) *un triplet endoscopique non standard. Fixons des mesures de Haar sur* $G_1(F), G_2(F)$*. Si* $X_i \in \mathfrak{g}_{i,reg}$ $(i = 1, 2)$ *se correspondent, alors pour tout* $f_2 \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_2(F))$ *il existe* $f_1 \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_1(F))$ *telle que*

$$J^{st}_{G_1}(X_1, f_1) = J^{st}_{G_2}(X_2, f_2),$$

où les intégrales orbitales sont définies par rapport à des mesures compatibles sur les commutants. On dit que f_1 *est un transfert de* f_2*.*

On a aussi une version non standard du lemme fondamental.

Définition 8.2.2. On dit qu'un triplet (G_1, G_2, j_*) est non ramifié si
- G_1, G_2 sont non ramifiés,
- les fonctions $b, \check{b}$ prennent valeurs dans $\mathbb{Q}_{>0} \cap \mathbb{Z}_p^\times$.

Théorème 8.2.3 (Lemme fondamental non standard, [84] 4.10)**.** *Supposons que* (G_1, G_2, j_*) *est un triplet endoscopique non standard non ramifié. Soient* $\mathfrak{k}_1 \subset \mathfrak{g}_1(F)$ *et* $\mathfrak{k}_2 \subset \mathfrak{g}_2(F)$ *des réseaux hyperspéciaux. Alors* $\mathbb{1}_{\mathfrak{k}_1}$ *est un transfert de* $\mathbb{1}_{\mathfrak{k}_2}$ *si l'on utilise des mesures non ramifiées sur* $G_1(F)$ *et* $G_2(F)$*.*

Remarque 8.2.4. Les intégrales orbitales dans [84] ne sont pas normalisées. Cependant on voit aisément qu'il existe une constante $c \in F^\times$ telle que $D_{G_1}(X_1) = cD_{G_2}(X_2)$ si X_1 et X_2 se correspondent ; de plus, $c \in \mathfrak{o}_F^\times$ si (G_1, G_2, j_*) est non ramifié. Donc notre formulation est équivalente à celle de [84].

Le transfert et le lemme fondamental sont énoncés pour les groupes simplement connexes. En pratique, on utilise une variante de ce théorème dans laquelle G_2 (ou G_1) est remplacé par un quotient.

Lemme 8.2.5. *Soit* $\sigma : G_2 \to \underline{G_2}$ *une* F*-isogénie. Il existe une constante* $c > 0$ *dépendant de mesures de Haar sur* $G_2(F), \underline{G_2}(F)$*, telle que pour tous* $X_2 \in \mathfrak{g}_{2,reg}(F)$*,* $f_2 \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_2)(F)$*, on a*

$$J^{st}_{G_2}(X_2, f_2) = cJ^{st}_{\underline{G_2}}(\underline{X_2}, \underline{f_2})$$

où $\underline{X_2} := \sigma_*(X_2)$*,* $\underline{f_2} = (\sigma^*)^{-1}(f_2)$*.*

Démonstration. Les intégrales orbitales stables $J^{\mathrm{st}}_{\underline{G_2}}(\underline{X_2}, \underline{f_2})$ et $J^{\mathrm{st}}_{G_2}(X_2, f_2)$ sont prises sur le même espace $((G_2)_{X_2} \backslash G_2)(F) = (\overline{(\underline{G_2})_{\underline{X_2}} \backslash \underline{G_2})(F)}$, l'identification respectant les mesures. □

Proposition 8.2.6. *Soient* (G_1, G_2, j_*) *un triplet endoscopique non standard et* $\sigma : G_2 \to \underline{G_2}$ *une* F*-isogénie. Identifions* $\mathfrak{g}_2, \underline{\mathfrak{g}}_2$ *et* $C_c^\infty(\mathfrak{g}_2), C_c^\infty(\underline{\mathfrak{g}}_2)$ *à l'aide de* σ*, alors l'assertion de 8.2.1 reste valable pour* G_1 *et* $\underline{G}_2$*.*

Supposons (G_1, G_2, j_*) *non ramifié. Soient* $\mathfrak{k}_1 \subset \mathfrak{g}_1(F)$*,* $\mathfrak{k}_2 \subset \mathfrak{g}_2(F)$ *et* $\underline{\mathfrak{k}}_2 \subset \underline{\mathfrak{g}}_2(F)$ *des réseaux hyperspéciaux, qui correspondent aux modèles* $\mathbf{G}_1$*,* $\mathbf{G}_2$ *et* $\underline{\mathbf{G}}_2$ *définis sur* $\mathfrak{o}_F$*. Si* σ *provient d'une* $\mathfrak{o}_F$*-isogénie* $\mathbf{G}_2 \to \underline{\mathbf{G}}_2$*, alors l'assertion de 8.2.3 reste valable pour* G_1 *et* $\underline{G}_2$ *si l'on utilise des mesures non ramifiées.*

Démonstration. La première assertion résulte de 8.2.1 et 8.2.5. Pour la deuxième, 8.2.3 et 8.2.5 fournit une constante $c > 0$ telle que

$$J_{G_1}(X_1, \mathbb{1}_{\mathfrak{k}_2}) = c \cdot J_{\underline{G}_2}(\underline{X}_2, \mathbb{1}_{\underline{\mathfrak{k}}_2}) \tag{I.23}$$

si $X_1 \in \mathfrak{g}_{1,\mathrm{reg}}(F)$ et $X_2 \in \mathfrak{g}_{2,\mathrm{reg}}(F)$ qui se correspondent et si l'on pose $\underline{X}_2 = \sigma_*(X_2)$.

On peut prendre $X_1 \in \mathfrak{k}_1$, $X_2 \in \mathfrak{k}_2$ de réductions régulières, alors $\underline{X}_2 \in \underline{\mathfrak{k}}_2$ l'est aussi. Un résultat de Kottwitz adapté aux algèbres de Lie ([47] 7.3) montre que les deux intégrales orbitales stables dans (I.23) valent 1 avec les mesures non ramifiées. D'où $c = 1$, ce qu'il fallait démontrer. □

Nous ne considérons qu'une seule famille de triplets endoscopiques non standards. Prenons $G_1 = \mathrm{Sp}(2n)$, $G_2 = \mathrm{Spin}(2n+1)$. Identifions $X_{1,*}$ à $\mathbb{Z}^n$ avec la base standard $\{e_1, \ldots, e_n\}$. La base duale pour X_1^* est notée par $\{f_1, \ldots, f_n\}$. Identifions $X_{2,*}$ au groupe des $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ tels que $x_1 + \ldots + x_n \in 2\mathbb{Z}$. Alors

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \{\pm f_i \pm f_j : 1 \leq i \neq j \leq n\} \cup \{\pm 2f_i : 1 \leq i \leq n\}, \\
\check{\Sigma}_1 &= \{\pm e_i \pm e_j : 1 \leq i \neq j \leq n\} \cup \{\pm e_i : 1 \leq i \leq n\}, \\
\Sigma_2 &= \{\pm f_i \pm f_j : 1 \leq i \neq j \leq n\} \cup \{\pm f_i : 1 \leq i \leq n\}, \\
\check{\Sigma}_2 &= \{\pm e_i \pm e_j : 1 \leq i \neq j \leq n\} \cup \{\pm 2e_i : 1 \leq i \leq n\}.
\end{aligned}$$

On a $X_{2,*} \subset X_{1,*}$, $X_{2,*,\mathbb{Q}} = X_{1,*,\mathbb{Q}}$ et $j_* = \mathrm{id}$. Prenons des bijections

$$\begin{aligned}
\tau :& \Sigma_2 \to \Sigma_1 \\
& \pm f_i \pm f_j \mapsto \pm f_i \pm f_j, \\
& \pm f_i \mapsto \pm 2f_i; \\
\check{\tau} :& \check{\Sigma}_1 \to \check{\Sigma}_2 \\
& \pm e_i \pm e_j \mapsto \pm e_i \pm e_j, \\
& \pm e_i \mapsto \pm 2e_i.
\end{aligned}$$

Définissons $b : \Sigma_2 \to \mathbb{Q}_{>0}$ par $b(\pm f_i \pm f_j) = 1$, $b(\pm f_i) = \frac{1}{2}$; définissons $\check{b} : \check{\Sigma}_1 \to \mathbb{Q}_{>0}$ par $\check{b}(\pm e_i \pm e_j) = 1$, $\check{b}(\pm e_i) = \frac{1}{2}$. Ces données fournissent un triplet endoscopique non standard (G_1, G_2, j_*). La correspondance de classes de conjugaison est la suivante : $X \in \mathfrak{sp}(2n)_{\mathrm{reg}}(F)$ et $Y \in \mathfrak{spin}(2n+1)_{\mathrm{reg}}(F) = \mathfrak{so}(2n+1)_{\mathrm{reg}}(F)$ se correspondent si et seulement si $X \xleftrightarrow{\mathrm{VP}} Y$ (la notation dans 7.1.3).

Remarquons que ce triplet est non ramifié lorsque $p > 2$. Les groupes $\mathrm{Sp}(2n)$, $\mathrm{Spin}(2n+1)$ et $\mathrm{SO}(2n+1)$ sont tous définis sur $\mathbb{Z}$ et $\mathrm{Spin}(2n+1) \to \mathrm{SO}(2n+1)$ est une isogénie sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$. Cela permet d'appliquer 8.2.6 dans le cas non ramifié.

8.3 Démonstration du transfert

Soient $\epsilon = (\epsilon', \epsilon'') \in H(F)_{\mathrm{ss}}$. On commence par établir le transfert local en ϵ.

Lemme 8.3.1. *Supposons H_ϵ quasi-déployé. Il existe un voisinage $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{h}_\epsilon(F)$ vérifiant les propriétés du paragraphe 8.1 tel que si $f \in C^\infty_{c,--}(\tilde{G})$, alors il existe $f_\epsilon^H \in C_c^\infty(\mathfrak{U}^\natural)$ telle que*

$$J_{H,\tilde{G}}(\gamma, f) = J_H^{st}(\gamma, f_\epsilon^H)$$

pour tout $\gamma \in \mathfrak{U}^\natural \cap H_{G-reg}(F)$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{U} \in \mathfrak{h}_\epsilon(F)$ un voisinage vérifiant les propriétés du paragraphe 8.1. Montrons d'abord qu'il existe $g_\epsilon^H \in C_c^\infty(\mathfrak{U})$ telle que

$$J_{H,\tilde{G}}(\exp(Y)\epsilon, f) = J^{\mathrm{st}}_{H_\epsilon}(Y, g_\epsilon^H) \tag{I.24}$$

pour tout $Y \in \mathfrak{U}$ tel que $\exp(Y)\epsilon \in \mathfrak{U}^\natural \cap H_{G-\mathrm{reg}}(F)$.

Soient $\eta_1, \ldots, \eta_m$ des représentants des classes de conjugaison semi-simples qui correspondent à ϵ. Quitte à rétrécir $\mathfrak{U}$, on peut supposer qu'il existe des voisinages $\mathfrak{V}_i \subset \mathfrak{g}_{\eta_i}$ vérifiant les propriétés du paragraphe 8.1, tels que l'ensemble des éléments correspondant à des éléments dans $\mathfrak{U}^\natural$ est inclus dans $\mathfrak{V}_1^\natural \sqcup \cdots \sqcup \mathfrak{V}_m^\natural$. Alors

$$J_{H,\tilde{G}}(\gamma, f) = \sum_{i=1}^m J^{(i)}_{H,\tilde{G}}(\gamma, f)$$

pour tout $\gamma \in \mathfrak{U}^\natural \cap H_{G-\mathrm{reg}}(F)$ et tout $f \in C^\infty_{c,--}(\tilde{G})$, où $J^{(i)}_{H,\tilde{G}}(\gamma, f)$ est défini de la même façon que (I.12) sauf que la somme est restreinte aux $\delta \in \mathfrak{V}_i$. Écrivons $\gamma = \exp(Y)\epsilon$. On se ramène à démontrer que pour tout $1 \leq i \leq m$, il existe $g^{H,(i)}_\epsilon \in C^\infty_c(\mathfrak{U})$ tel que

$$J^{(i)}_{H,\tilde{G}}(\gamma, f) = J^{\mathrm{st}}_{H_\epsilon}(Y, g^{H,(i)}_\epsilon).$$

Fixons un $1 \leq i \leq m$. Conservons le formalisme de §7.1 et paramétrons $\mathcal{O}(\epsilon)$ et $\mathcal{O}(\eta_i)$ par

$$\begin{aligned}
\eta_i &\in \mathcal{O}(\bigoplus_u (L/L^\#, u, (W_u, h_u)) \oplus (W_+, \langle\cdot|\cdot\rangle_+) \oplus (W_-, \langle\cdot|\cdot\rangle_-)),\\
\epsilon' &\in \mathcal{O}(\bigoplus_u (L/L^\#, u, (V'_u, h'_u)) \oplus (V'_+, q'_+) \oplus (V'_-, q'_-)),\\
\epsilon'' &\in \mathcal{O}(\bigoplus_u (L/L^\#, -u, (V''_u, h''_u)) \oplus (V''_+, q''_+) \oplus (V''_-, q''_-)).
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
G_{\eta_i} &= \prod_u U(W_u, h_u) \times \mathrm{Sp}(W_+) \times \mathrm{Sp}(W_-),\\
H'_{\epsilon'} &= \prod_u U(V'_u, h'_u) \times \mathrm{SO}(V'_+, q'_+) \times \mathrm{SO}(V'_-, q'_-),\\
H''_{\epsilon''} &= \prod_u U(V''_u, h''_u) \times \mathrm{SO}(V''_+, q''_+) \times \mathrm{SO}(V''_-, q''_-),\\
H_\epsilon &= H'_{\epsilon'} \times H''_{\epsilon''}.
\end{aligned}$$

Prenons des images réciproques $\tilde{\eta}_i \in \mathbf{p}^{-1}(\tilde{\eta}_i)$ telles que $\tilde{\eta}_i = \pm 1$ lorsque $\eta_i = \pm 1$. Par la descente des intégrales orbitales 8.1.1, il existe une fonction $f^\flat_i \in C^\infty_c(\mathfrak{V}_i)$ telle que

$$J^{(i)}_{H,\tilde{G}}(\gamma, f) = \sum_X \Delta(\exp(Y)\epsilon, \exp(X)\tilde{\eta}_i) J_{G_{\eta_i}}(X, f^\flat_i), \tag{I.25}$$

où X parcourt les représentants des classes de conjugaison dans $\mathfrak{g}_{\eta_i}(F)$ telles que $\exp(X)\eta_i$ corresponde à γ, ou ce qui revient au même, $X \xleftrightarrow{\mathrm{VP}} Y$.

Effectuons les décompositions dans §7.1

$$\begin{aligned}
X &= ((X_u)_u, X_+, X_+),\\
Y &= ((Y_u)_u, Y_+, Y_-),\\
X_\bullet &= (X'_\bullet, X''_\bullet) \in \mathfrak{u}(W_u, h_u),\\
Y_u &= (Y'_u, Y''_u) \in \mathfrak{u}(V'_u, h'_u) \times \mathfrak{u}(V''_u, h''_u),\\
Y_\pm &= (Y'_\pm, Y''_\mp) \in \mathfrak{so}(V'_\pm, q'_\pm) \times \mathfrak{so}(V''_\mp, q''_\mp)
\end{aligned}$$

où $\bullet \in \{u, +, -\}$ comme d'habitude.

Il suffit de considérer le cas $f^\flat_i = (\prod_u f_u) \cdot f_+ \cdot f_-$ dont $f_u \in C^\infty_c(\mathfrak{u}(W_u, h_u))$, $f_\pm \in C^\infty_c(\mathfrak{sp}(W_\pm))$. D'après la descente du facteur de transfert 7.3.2, quitte à rétrécir $\mathfrak{U}$ le côté à droite de (I.25) s'exprime comme le produit $(\prod_u J_u) \cdot J_+ \cdot J_-$, où

$$\begin{aligned}
J_u = J_u(Y_u) &:= \sum_{X_u} \Delta_u(Y_u, X_u) J_{U(W_u,h_u)}(X_u, f_u),\\
J_+ = J_+(Y_+) &:= \sum_{X_+} \Delta_+(Y_+, X_+) J_{\mathrm{Sp}(W_+)}(X_+, f_+),\\
J_- = J_-(Y_-) &:= \sum_{X_-} \Delta_-(Y_-, X_-) J_{\mathrm{Sp}(W_-)}(X_-, f_-),
\end{aligned}$$

où les éléments $X_\bullet$ parcourent les représentants de classes de conjugaison telles que $X_\bullet \overset{\mathrm{VP}}{\longleftrightarrow} Y_\bullet$.

On se ramène à démontrer que $Y_\bullet \mapsto J_\bullet(Y_\bullet)$ est une intégrale orbitale stable. Pour J_u, cela découle de 7.7.1 et du transfert sur l'algèbre de Lie ([84] 1.6) pour l'endoscopie des groupes unitaires. Pour J_+, fixons un X_+ dans la somme. Le transfert pour le groupe endoscopique $\mathrm{Sp}(W'_+) \times \mathrm{SO}(V''_-, q''_-)$ de $\mathrm{Sp}(W_+)$ fournit une fonction

$$g_+ \in C_c^\infty(\mathfrak{sp}(W'_+) \times \mathfrak{so}(V''_-, q''_-))$$

telle que

$$J_+(Y_+) = J^{\mathrm{st}}_{\mathrm{Sp}(W'_+)\times \mathrm{SO}(V''_-,q''_-)}((X'_+, Y''_-), g_+).$$

En décomposant $g_+ = \sum g'_+ \cdot g''_+$ où $g'_+ \in C_c^\infty(\mathfrak{sp}(W'_+))$, $g''_+ \in C_c^\infty(\mathfrak{so}(V''_-, q''_-))$ et en appliquant le transfert non standard 8.2.1, 8.2.6 au triplet $(\mathrm{Sp}(W'_+), \mathrm{Spin}(V'_+, q'_+), \ldots)$ et à l'isogénie $\mathrm{Spin}(V'_+, q'_+) \to \mathrm{SO}(V'_+, q'_+)$, on déduit que $Y_+ \mapsto J_+(Y_+)$ est une intégrale orbitale stable. Le même argument montre que $Y_- \mapsto J_-(Y_-)$ l'est aussi. Cela établit (I.25).

Déduisons maintenant ce lemme de (I.24) en remontant les intégrales orbitales. En effet, $Y \mapsto J^{\mathrm{st}}_{H_\epsilon}(Y, g^H_\epsilon)$ est invariante par conjugaison géométrique par H^ϵ car $J_{H,\tilde{G}}(\cdot, f)$ l'est. D'après 8.1.1, il existe $f^H_\epsilon \in C_c^\infty(\mathfrak{U}^\natural)$ tel que $J^{\mathrm{st}}_{H_\epsilon}(Y, g^H_\epsilon) = J^{\mathrm{st}}_H(\exp(Y)\epsilon, f^H_\epsilon)$. Cela achève la démonstration. □

Pour démontrer 5.5.2, nous ferons usage d'une caractérisation locale des intégrales orbitales stables due à Langlands et Shelstad. Adoptons la convention de [52] concernant les mesures de Haar.

Théorème 8.3.2 ([50] 2.2A). *Soit M un F-groupe réductif quasi-déployé. Soit J une fonction sur $M_{reg}(F)$. Supposons que :*
- *J est stablement invariante ;*
- *il existe un ouvert compact $C \subset M(F)$ tel que J est à support dans $\bigcup_{m\in M(F)} mCm^{-1} \cap M_{reg}(F)$; on dit que J est à support compact modulo conjugaison ;*
- *pour tout $\epsilon \in M(F)_{ss}$, il existe un ouvert $\mathfrak{W}$ contenant ϵ et $f_\epsilon \in C_c^\infty(M(F))$ tels que*

$$J(\gamma) = J^{st}_M(\gamma, f_\epsilon)$$

pour tout $\gamma \in \mathfrak{W} \cap M_{reg}(F)$; on dit que J est une intégrale orbitale stable locale en ϵ.

Alors il existe $f \in C_c^\infty(M(F))$ tel que $J(\gamma) = J^{st}_M(\gamma, f)$ pour tout $\gamma \in M_{reg}(F)$.

Démonstration de 5.5.2. On veut appliquer le théorème de caractérisation à $J_{H,\tilde{G}}(\cdot, f)$ sur $H(F)$. A priori, cette fonction stablement invariante est définie sur $H_{G-\mathrm{reg}}(F)$. Or le transfert local 8.3.1 appliqué aux éléments réguliers permet de la prolonger sur $H_{\mathrm{reg}}(F)$. Comme dans l'endoscopie pour les groupes réductifs, on montre que $J_{H,\tilde{G}}$ est à support compact modulo conjugaison. Soit $\epsilon \in H(F)_{\mathrm{ss}}$. Pour étudier le comportement local en ϵ, on peut supposer H_ϵ quasi-déployé d'après les arguments dans [50] 1.3. Maintenant 8.3.1 montre que $J_{H,\tilde{G}}$ est une intégrale orbitale stable locale en ϵ. Cela permet de conclure. □

8.4 Démonstration du lemme fondamental pour les unités

Nous nous plaçons dans le cas non ramifié 5.5.3. Notons p la caractéristique résiduelle de F. Fixons $G = \mathrm{Sp}(W)$ et $H = H_{n',n''}$ un groupe endoscopique de $\tilde{G}$. Fixons un réseau autodual $L \subset W$ et posons $K = \mathrm{Stab}_G(L)$. Identifions K à un sous-groupe compact ouvert de $\tilde{G}$ à l'aide du modèle latticiel.

Conservons les notations de 5.5.5. Cette section est consacrée à la démonstration de l'égalité

$$J_{H,\tilde{G}}(\gamma, f_K) = J^{\mathrm{st}}_H(\gamma, \mathbb{1}_{K_H}) \tag{I.26}$$

pour tout $\gamma \in H_{G-\mathrm{reg}}(F)$, où on utilise les mesures non ramifiées sur $\tilde{G}, H(F)$ et des mesures compatibles sur les commutants.

Comme le transfert, ce lemme fondamental sera démontré par la méthode de descente. Pour ce faire, effectuons des réductions.

Lemme 8.4.1. *Si γ n'est pas un élément compact, alors $J_{H,\tilde{G}}(\gamma, f_K) = J^{st}_H(\gamma, \mathbb{1}_{K_H}) = 0$.*

Démonstration. La compacité ne dépend que de la classe de conjugaison géométrique ([84] 5.2). Supposons que γ n'est pas compact, on a alors $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(\gamma) \cap K_H = \emptyset$, d'où $J^{\mathrm{st}}_H(\gamma, \mathbb{1}_{K_H}) = 0$. D'autre part, si $\delta \in G(F)$ qui correspond à γ n'est pas compact, alors $\mathcal{O}(\delta) \cap K = \emptyset$, d'où $J_{\tilde{G}}(\delta, f_K) = 0$. Or la correspondance de classes de conjugaison semi-simples de §5.1 préserve la compacité. On en déduit que $J_{H,\tilde{G}}(\gamma, f_K) = 0$. □

Supposons dès maintenant que $\gamma = (\gamma', \gamma'')$ est compact, alors on a la décomposition de Jordan topologique

$$\gamma = \exp(Y)\epsilon, \tag{I.27}$$
$$\epsilon = (\epsilon', \epsilon''), \tag{I.28}$$
$$Y = (Y', Y''), \tag{I.29}$$

telle que ϵ est d'ordre fini premier à p.

Lemme 8.4.2. *Avec les hypothèses ci-dessus, il existe $\gamma_1 \in H_{G-reg}(F)$ tel que*

– γ, γ_1 sont stablement conjugués ;

– soit $\gamma_1 = \exp(Y_1)\epsilon_1$ la décomposition de Jordan topologique, alors H_{ϵ_1} est quasi-déployé.

De plus, supposons H_ϵ quasi-déployé, alors ϵ est stablement conjugué à un élément de K_H si et seulement si H_ϵ est non ramifié.

Les mêmes assertions restent valides pour un élément compact $\delta \in G_{reg}(F)$ et sa décomposition de Jordan topologique.

Démonstration. Voir [84], 5.13 (2) et 5.3 (v). □

Lemme 8.4.3. *Supposons que $\gamma \in H_{G-reg}(F)$ est compact avec $\epsilon \in K_H$, alors il existe $\delta \in G(F)$ qui correspond à γ avec la décomposition de Jordan topologique $\delta = \exp(X)\eta$ telle que $\eta \in K$.*

Démonstration. Cf. [84] 5.7 (ii). □

Traitons maintenant la descente d'une intégrale orbitale sur $\tilde{G}$.

Lemme 8.4.4. *Soit $\eta \in K$ d'ordre fini premier à p, alors G_η est non ramifié et $K_\eta := K \cap G_\eta(F)$ est encore un sous-groupe hyperspécial de $G_\eta(F)$. Notons $\mathfrak{k}_\eta \subset \mathfrak{g}_\eta(F)$ le sous-réseau hyperspécial associé. Pour tout $X \in \mathfrak{g}_\eta(F)$, on a*

$$\begin{aligned} J_{\tilde{G}}(\exp(X)\eta, f_K) &= J_{G_\eta}(X, \mathbb{1}_{\mathfrak{k}_\eta}) \\ &= J_{G_\eta}(\exp(X), \mathbb{1}_{K_\eta}), \end{aligned}$$

si l'on utilise les mesures non ramifiées.

Démonstration. D'après [84] 5.3 (iii), G_η est non ramifié et $K_\eta := K \cap G_\eta(F)$ est un sous-groupe hyperspécial de $G_\eta(F)$.

Posons $T^\flat := (G_\eta)_X$. Les arguments dans [84] 5.11 montrent que

$$\text{(I.30)} \qquad \int_{G_{\exp(X)\eta}(F)\backslash G(F)} f_K(\tilde{x}^{-1}\exp(X_j)\eta\tilde{x})\,\mathrm{d}\dot{x} =$$
$$\sum_{\dot{x}\in T^\flat(F)\backslash G_\eta(F)/K_\eta} \mathrm{mes}(T^\flat(F)\backslash T^\flat(F)xK_\eta) f_K(\tilde{x}^{-1}\exp(X)\eta\tilde{x}),$$

où $\tilde{x}$ est une image réciproque quelconque de x. Montrons que

$$\text{(I.31)} \qquad \forall \tilde{x} \in \mathbf{p}^{-1}(G_\eta(F)), \quad f_K(\tilde{x}^{-1}\exp(X)\eta\tilde{x}) = \mathbb{1}_K(x^{-1}\exp(X)\eta x).$$

En effet, si $x^{-1}\exp(X)\eta x \notin K$, alors les deux côtés valent 0. S'il appartient à K, le côté à droite vaut 1. Supposons donc $\tilde{x}^{-1}\exp(X)\eta\tilde{x} \in \boldsymbol{\varepsilon}K$ où $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathrm{Ker}\,(\mathbf{p})$. En prenant la limite des (p^{n_k})-ièmes puissances avec $n_k \to +\infty$ une suite convenable, on obtient $\tilde{x}^{-1}\eta\tilde{x} \in \boldsymbol{\varepsilon}K$. Or $\tilde{x}$ centralise η, d'où $\boldsymbol{\varepsilon} = 1$.

Maintenant on peut reprendre les arguments dans [84] 5.11 et on arrive à

$$J_{\tilde{G}}(\exp(X)\eta, f_K) = J_{G_\eta}(X, \mathbb{1}_{\mathfrak{k}_\eta}).$$

□

Démonstration de 5.5.5. Vu les résultats précédents, on peut supposer que γ est compact avec les décompositions (I.27)-(I.29) et que H_ϵ est quasi-déployé. Soit $\delta \in G(F)$ qui correspond à γ, alors δ est compact avec la décomposition de Jordan topologique $\delta = \exp(X)\eta$. S'il n'existe pas δ comme ci-dessus satisfaisant à $\eta \in K$, alors $J_{H,\tilde{G}}(\gamma, f_K) = 0$, et H_ϵ n'est pas non ramifié d'après 8.4.3. Dans ce cas-là $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(\gamma)$ ne coupe aucun sous-groupe hyperspécial de $H(F)$ ([84] 5.3 (v)), d'où $J^{\mathrm{st}}_H(\gamma, \mathbb{1}_{K_H}) = 0$ et 5.5.5 est vérifié.

Supposons donc $\eta \in K$, alors G_η est non ramifié et $K_\eta := K \cap G_\eta(F)$ est encore un sous-groupe hyperspécial de $G_\eta(F)$ par 8.4.4.

Prenons un ensemble de représentants $\{\delta_j\}_{j\in J}$ de $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(\delta)/\mathrm{conj}$. Soit J_0 l'ensemble des $j \in J$ tel que $\mathcal{O}(\delta_j) \cap K \neq \emptyset$. D'après [84] 5.11, on peut prendre les δ_j ($j \in J_0$) avec décompositions de Jordan topologiques de la forme

$$\delta_j = \exp(X_j)\eta,$$

où $\{X_j\}_{j\in J_0}$ forment un ensemble de représentants des classes de conjugaison dans $\mathfrak{g}_\eta$ coupant $\mathfrak{k}_\eta$ dans $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(X)$. On a

$$\text{(I.32)} \qquad J_{H,\tilde{G}}(\gamma, f_K) = \sum_{j\in J_0} \Delta(\exp(X_j)\eta, \exp(Y)\epsilon) J_{\tilde{G}}(\exp(X_j)\eta, f_K).$$

Notons comme précédemment $\mathfrak{k}_\eta \subset \mathfrak{g}_\eta(F)$ le sous-réseau hyperspécial associé à K_η. Grâce à 8.4.4, pour tout $j \in J_0$ on a

$$J_{\tilde{G}}(\exp(X_j)\eta, f_K) = J_{G_\eta}(X_j, \mathbb{1}_{\mathfrak{k}_\eta}).$$

Prenons des paramètres pour $\mathcal{O}(\eta)$ et $\mathcal{O}(\epsilon)$ comme dans la preuve de 8.3.1. On a

$$G_\eta = \prod_u U(W_u, h_u) \times \mathrm{Sp}(W_+) \times \mathrm{Sp}(W_-),$$
$$H'_{\epsilon'} = \prod_u U(V'_u, h'_u) \times \mathrm{SO}(V'_+, q'_+) \times \mathrm{SO}(V'_-, q'_-),$$
$$H''_{\epsilon''} = \prod_u U(V''_u, h''_u) \times \mathrm{SO}(V''_+, q''_+) \times \mathrm{SO}(V''_-, q''_-),$$
$$H_\epsilon = H'_{\epsilon'} \times H''_{\epsilon''}.$$

Introduisons aussi les objets $X_\pm$, X_u, $Y_\pm$, Y_u, etc... dans §7.1. Les mêmes arguments qu'en 8.3.1 permettent d'exprimer $J_{H,\tilde{G}}(\gamma, f_K)$ comme un produit $(\prod_u J_u)J_+J_-$ avec

$$\begin{aligned}
J_u = J_u(Y_u) &:= \sum_{X_u} \Delta_u(Y_u, X_u) J_{U(W_u,h_u)}(X_u, f_u),\\
J_+ = J_+(Y_+) &:= \sum_{X_+} \Delta_+(Y_+, X_+) J_{\mathrm{Sp}(W_+)}(X_+, f_+),\\
J_- = J_-(Y_-) &:= \sum_{X_-} \Delta_-(Y_-, X_-) J_{\mathrm{Sp}(W_-)}(X_-, f_-).
\end{aligned}$$

Ces expressions sont, pour l'essentiel, composées des intégrales endoscopiques pour les groupes classiques et des intégrales orbitales stables auxquels le transfert non standard s'applique (cf. la démonstration de 8.3.1).

Supposons que H_ϵ n'est pas non ramifié. On a vu que $J_H^{\mathrm{st}}(\gamma, \mathbb{1}_{K_H}) = 0$ dans ce cas. D'autre part, un résultat de Kottwitz ([47] 7.5) adapté aux algèbres de Lie montre qu'au moins l'un des J_u, J_+, J_- s'annule, d'où $J_{H,\tilde{G}}(\gamma, f_K) = 0$ et 5.5.5 est vérifié.

Supposons désormais H_ϵ non ramifié. C'est loisible de supposer $\epsilon \in K_H$ et dans ce cas $K_{H,\epsilon} := K_H \cap H_\epsilon(F)$ est un sous-groupe hyperspécial de $H_\epsilon(F)$ ([84] 5.3 (iii),(v)). Notons $\mathfrak{k}_\epsilon \subset \mathfrak{h}_\epsilon(F)$ le sous-réseau hyperspécial associé. On le décompose en des réseaux hyperspéciaux :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{k}_{H,\epsilon} &= \bigoplus_u \mathfrak{k}_{H,u} \oplus \mathfrak{k}_{H,+} \oplus \mathfrak{k}_{H,-},\\
\mathfrak{k}_{H,u} &\subset \mathfrak{u}(V_u', h_u') \oplus \mathfrak{u}(V_u'', h_u''),\\
\mathfrak{k}_{H,\pm} &\subset \mathfrak{so}(V_\pm', q_\pm') \oplus \mathfrak{so}(V_\mp', q_\mp').
\end{aligned}$$

Alors la descente des intégrales orbitales stables ([84] 5.11) donne

$$\begin{aligned}
J_H^{\mathrm{st}}(\gamma, \mathbb{1}_{K_H}) &= J_{H_\epsilon}(Y, \mathbb{1}_{\mathfrak{k}_H})\\
&= \prod_u J_{H,u} \cdot J_{H,+} \cdot J_{H,-},
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
J_{H,u} &:= J^{\mathrm{st}}_{U(V_u',h_u')\times U(V_u'',h_u'')}(Y_u, \mathbb{1}_{\mathfrak{k}_{H,u}}),\\
J_{H,+} &:= J^{\mathrm{st}}_{\mathrm{SO}(V_+',q_+')\times \mathrm{SO}(V_-'',q_-'')}(Y_+, \mathbb{1}_{\mathfrak{k}_{H,+}}),\\
J_{H,-} &:= J^{\mathrm{st}}_{\mathrm{SO}(V_-',q_-')\times \mathrm{SO}(V_+'',q_+'')}(Y_-, \mathbb{1}_{\mathfrak{k}_{H,-}}).
\end{aligned}$$

Comme les hypothèses dans §7.2 sont satisfaites, les facteurs de transfert $\Delta_\bullet$ ($\bullet \in \{u, +, -\}$) sont normalisés au sens de [84] §4.7 d'après 7.7.1. Les arguments qui restent sont analogues à ceux pour 8.3.1, sauf que l'on utilise le lemme fondamental sur les algèbres de Lie pour les groupes classiques et le lemme fondamental non standard sous la forme de 8.2.6. Le bilan est que $J_u = J_{H,u}$, $J_+ = J_{H,+}$ et $J_{H,-}$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Chapitre II

Le lemme fondamental pondéré pour le groupe métaplectique

1 Introduction

Cet article s'inscrit dans un programme consistant à stabiliser la formule des traces d'Arthur-Selberg pour le groupe métaplectique de Weil, qui est un revêtement non algébrique $\mathbf{p}$: $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W) \to \mathrm{Sp}(W)$ du groupe symplectique d'un espace symplectique $(W, \langle|\rangle)$. Le formalisme de l'endoscopie elliptique est déjà adapté à ce revêtement dans [Chapitre I], et les conjectures à la Langlands-Shelstad, à savoir le transfert et le lemme fondamental pour les unités, sont aussi prouvées. Néanmoins, pour stabiliser toute la formule des traces, Arthur [20] a aussi besoin d'une généralisation sophistiquée du lemme fondamental en presque toute place non archimédienne, dite le lemme fondamental pondéré. L'objectif de cet article est de formuler puis prouver une variante du lemme fondamental pondéré pour les groupes métaplectiques. La preuve est conditionnelle lorsque $\dim W > 2$: on admet le lemme fondamental pondéré non standard sur les algèbres de Lie 5.3.1.

Fixons un corps local F de caractéristique nulle et un caractère unitaire non trivial $\psi : F \to \mathbb{C}^\times$. Soient $G = \mathrm{Sp}(W)$ et $\mathbf{p} : \tilde{G} = \widetilde{\mathrm{Sp}}(W) \to G(F)$ le revêtement métaplectique déterminé par ψ. Tout d'abord, il faut étudier les sous-groupes de Lévi de $\tilde{G}$, ou plus précisément les fibres de $\mathbf{p}$ au-dessus des sous-groupes de Lévi de G. Dans [Chapitre I], on a choisi de travailler avec les revêtements métaplectiques tels que $\mathrm{Ker}\,(\mathbf{p}) = \mu_8 := \{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{C}^\times : \boldsymbol{\varepsilon}^8 = 1\}$. Grâce à ce choix, les Lévi ont une forme très simple comme suit : $\tilde{M} = \prod_{i \in I} \mathrm{GL}(n_i) \times \widetilde{\mathrm{Sp}}(W^\flat)$, et cela introduit une structure de récurrence pour l'étude des groupes métaplectiques. De tels revêtements $\mathbf{p} : \tilde{M} \to M(F)$ s'appellent les groupes de type métaplectique. On définit les données endoscopiques elliptiques de $\tilde{M}$ par composantes, de la façon évidente : en la composante $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W^\flat)$, on l'a déjà défini en [Chapitre I] ; en les composantes $\mathrm{GL}(n_i)$ elles sont tautologiques. Ensuite, on peut définir les données endoscopiques pour $\tilde{G}$ comme les données endoscopiques elliptiques d'un Lévi, pour l'essentiel (voir 3.1.8), comme dans le cas de groupes réductifs.

En fait, on définira les données endoscopiques de $\tilde{G}$ en termes du groupe dual $\widehat{\tilde{G}} := \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ muni de l'action galoisienne triviale, où $2n = \dim_F W$, à l'instar de Langlands-Shelstad [52]. Or le rôle du centre $Z_{\widehat{\tilde{G}}}$, qui fournit des symétries de données endoscopiques dans le cas de groupes réductifs, est remplacé par $Z^0_{\widehat{\tilde{G}}} := \{1\}$. On conserve ce symbole non trivial pour $\{1\}$ afin de signaler l'analogie et d'indiquer la généralisation aux groupes de type métaplectique : si

$\tilde{M} = \prod_{i \in I} \mathrm{GL}(n_i) \times \widetilde{\mathrm{Sp}}(W^\flat)$, $2m = \dim_F W^\flat$, alors on pose

$$\begin{aligned} \widehat{\widetilde{M}} &:= \prod_{i \in I} \mathrm{GL}(n_i, \mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(2m, \mathbb{C}), \\ Z^0_{\widehat{\widetilde{M}}} &= \prod_{i \in I} \mathbb{C}^\times \times \{1\}. \end{aligned}$$

Maintenant, supposons que F est non archimédien de caractéristique résiduelle p suffisamment grande par rapport à G, et que ψ est de conducteur $\mathfrak{o}_F$. Pour $\tilde{G}$, $\tilde{M}$ comme ci-dessus, fixons une donnée endoscopique elliptique s_0 pour $\tilde{M}$, qui donne un groupe endoscopique $M^!$ et une correspondance de classes de conjugaison géométriques semi-simples. On sait aussi définir le facteur de transfert Δ dans ce cadre. Soit K un sous-groupe hyperspécial de $G(F)$ associé à un réseau autodual dans $(W, \langle|\rangle)$ en bonne position relativement à M, alors Δ et K sont adaptés au sens de [Chapitre I, 5.15]. On sait définir les intégrales orbitales pondérées non ramifiées $r^{\tilde{G}}_{\tilde{M},K}(\cdot)$ en les éléments réguliers de $\tilde{G}$. L'intégrale orbitale pondérée endoscopique est définie de façon habituelle

$$r^{\tilde{G}}_{M^!,K}(\gamma) := \sum_{\delta \in M(F)/\mathrm{conj}} \Delta(\gamma, \tilde{\delta}) r^{\tilde{G}}_{\tilde{M},K}(\tilde{\delta}), \qquad \gamma \in M^!_{G-\mathrm{reg}}(F).$$

Suivant Arthur, on définit un ensemble fini $\mathcal{E}_{M^!}(\tilde{G})$ qui indexe des données endoscopiques elliptiques pour $\tilde{G}$ "couvrant" s_0, avec des multiplicités. Soit $s \in \mathcal{E}_{M^!}(\tilde{G})$, on note le groupe endoscopique par $G[s]$. On récapitule la situation par le diagramme

$$\begin{tikzcd} G[s] \arrow[r, dashed, dash, "\text{endo.ell.}", "s"'] & \tilde{G} \\ M^! \arrow[u, hook, "\text{Lévi}"] \arrow[r, dashed, dash, "\text{endo.ell.}", "s_0"'] & \tilde{M} \arrow[u, hook, "\text{Lévi}"'] \end{tikzcd}$$

où les plongements de sous-groupes de Lévi sont uniques à conjugaison près.

C'est une partie du lemme fondamental pondéré pour les groupes réductifs connexes, prouvé par Chaudouard et Laumon [29, 30] en étendant la méthode de Ngô, que l'on peut définir les "fonctions stabilisées" $s^{G[s]}_{M^!} : M^!_{G[s]-\mathrm{reg}}(F) \to \mathbb{C}^\times$, qui généralisent les intégrales orbitales stables de la fonction caractéristique d'un hyperspécial. En reprenant le formalisme d'Arthur [20], le lemme fondamental pondéré métaplectique 4.2.1 est l'égalité

$$r^{\tilde{G}}_{M^!,K}(\gamma) = \sum_{s \in \mathcal{E}_{M^!}(\tilde{G})} i_{M^!}(\tilde{G}, G[s]) s^{G[s]}_{M^!}(\gamma[s]),$$

où

- $i_{M^!}(\tilde{G}, G[s])$ sont des coefficients définis dans (II.4) ;
- $\gamma[s] := \gamma \cdot z[s]$, où $z[s]$ est un élément d'ordre deux et central dans $M^!(F)$ défini dans 3.3.3.

L'apparition de la "torsion" $\gamma \mapsto \gamma[s]$ est plus curieuse. On peut penser qu'elle reflète la différence entre la correspondance de classes par "Lévi d'un groupe endoscopique" et celle par "groupe endoscopique d'un Lévi" (voir 3.3.4). D'ailleurs, la démonstration ne marche pas sans cette torsion car elle rend des commutants corrects dans la procédure de descente.

Méthodologie L'idée de base est la méthode de descente de Harish-Chandra : on prouve l'égalité cherchée pour γ au voisinage d'un élément semi-simple $\epsilon \in M^!(F)$ tel que $M^!_\epsilon$ est quasi-déployé. La méthode est modelée sur la démonstration du lemme fondamental pondéré tordu par Waldspurger [85]. Ainsi, on transforme $r^{\tilde{G}}_{M^!,K}(\gamma)$ en une combinaison linéaire des intégrales orbitales pondérées endoscopiques sur les algèbres de Lie. L'autre côté est transformé en une combinaison linéaire des fonctions stabilisées sur les algèbres de Lie. On compare les deux à l'aide de

- le lemme fondamental pondéré sur les algèbres de Lie, ce qui est prouvé par Chaudouard et Laumon [29, 30] dans le cas de caractéristique positive, auquel le cas de caractéristique nulle se réduit d'après [86].
- le lemme fondamental pondéré non standard, qui reste conjectural à l'heure où cet article est écrit ; or on s'attend à ce que la méthode de Chaudouard et Laumon s'y applique également.

Deux autres ingrédients sont aussi cruciaux : l'identification des commutants et la descente du facteur de transfert. Heureusement les résultats dans [Chapitre I] sont encore applicables. Enfin, on se ramène à une comparaison des coefficients. Cela fait l'objet du yoga du §8.2, dont la preuve s'inspire de celle d'Arthur [19].

Remarquons en passant que notre résultat n'est pas conditionnel si $\dim W = 2$: le lemme fondamental pondéré non standard qui y intervient peut être vérifié à la main.

Organisation de cet article Après un court rappel de conventions et notations dans le §2, nous définirons les données endoscopiques dans le §3. Les cas qui nous occupent sont (1) $\tilde{G}$ un groupe métaplectique et s une donnée endoscopique quelconque pour $\tilde{G}$; (2) $\tilde{M}$ de type métaplectique et s_0 une donnée endoscopique elliptique pour $\tilde{M}$. On peut aussi considérer le cas le plus général ; on peut même déduire le transfert et le lemme fondamental non pondéré pour les données endoscopiques non elliptiques. Comme ceux-là ne sont pas les propos de cet article, tous sont laissés au lecteur.

Signalons aussi que le corps F et le caractère ψ n'interviennent pas dans les définitions de données endoscopiques et d'ellipticité. Ces notions ont donc un sens pour tout F local de caractéristique nulle ou un corps de nombres. Les facteurs de transfert peuvent être définis pour tout F local de caractéristique nulle.

Dans le §4, nous commençons à supposer que F est non archimédien de caractéristique résiduelle suffisamment grande par rapport à G et ψ est de conducteur $\mathfrak{o}_F$. Le lemme fondamental pondéré y est énoncé. Là encore, c'est possible de le généraliser au cas de groupes de type métaplectique. Dans le §5, nous rappellerons les définitions de l'endoscopie et le lemme fondamental pondéré (standard et non standard) sur les algèbres de Lie. Il y aura aussi des calculs du coefficient qui apparaissent dans le lemme fondamental pondéré non standard.

Dans le §6, nous étudierons la situation après la descente. Il faut identifier des commutants connexes à certains groupes endoscopiques, à l'opération 6.1.1 près qui remplace les facteurs SO impairs par Sp. On l'a traité dans [Chapitre I], mais ici la situation se complique à cause d'une construction d'Arthur.

L'argument dans [85] est repris dans le §7. Grâce à la descente et aux divers lemmes fondamentaux pondérés sur les algèbres de Lie, les deux côtés de l'égalité du lemme fondamental pondéré sont transformés en des combinaisons linéraires des fonctions stabilisées sur les algèbres de Lie. On en introduira un ensemble d'indices $E^\natural$. Dans le §8, il sera démontré que les coefficients pour les deux côtés coïncident comme fonctions définies sur $E^\natural$, d'où le lemme fondamental pondéré.

2 Notations et conventions

Les groupes métaplectiques Soient F un corps local de caractéristique nulle et $\psi : F \to \mathbb{C}^\times$ un caractère unitaire non trivial. Nous conservons les notations de [Chapitre I]. En particulier, soit $(W, \langle|\rangle)$ un F-espace symplectique de dimension $2n$, notons $G := \mathrm{Sp}(W)$ le groupe symplectique et $\mathbf{p} : \tilde{G} = \widetilde{\mathrm{Sp}}(W) \to G(F)$ le revêtement métaplectique à huit feuillets, i.e. $\mathrm{Ker}\,(\mathbf{p}) = \mu_8 = \{\varepsilon \in \mathbb{C}^\times : \varepsilon^8 = 1\}$. Si $M \subset G$ est un sous-groupe de Lévi, nous noterons $\tilde{M} := \mathbf{p}^{-1}(M(F))$ et $\mathbf{p} : \tilde{M} \to M(F)$ le revêtement ainsi induit. Toute construction des objets dits métaplectiques dans cet article dépendra du choix ψ.

Soit $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, le symbole $\mathrm{SO}(2n+1)$ désigne toujours le groupe orthogonal spécial impair déployé.

Groupes réductifs Soient S un schéma et M un S-schéma en groupes raisonnable (voir [1, Exposé $\mathrm{VI_B}$ §3]), on note M^0 sa composante neutre. Soient F un corps et M un F-groupe réductif connexe. Les normalisateurs (resp. commutants, commutants connexes) dans M sont notés $N_M(\cdot)$ (resp. $Z_M(\cdot)$, $Z_M(\cdot)^0$). Le centre (resp. centre connexe) de M est noté Z_M (resp. Z_M^0). Si $m \in M(F)$, on écrit aussi $M^m := Z_M(m)$ et $M_m := Z_M(m)^0$. La classe de conjugaison de m dans $M(F)$ est notée $\mathcal{O}^M(m)$. L'ensemble des classes de conjugaison géométriques semi-simples dans M rencontrant $M(F)$ est noté $\mathscr{C}^{\text{géo}}_{\text{ss}}(M(F))$.

Soit T un F-tore, notons $X_*(T) := \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_\mathrm{m}, T)$; il est en dualité avec $X^*(T)$. Lorsqu'il y en a besoin d'indiquer le corps de base, on les notera $X_*(T)_F$ et $X^*(T)_F$.. Notons $X^*(M) := \mathrm{Hom}(M, \mathbb{G}_\mathrm{m})$ et $\mathfrak{a}_M := \mathrm{Hom}(X^*(M), \mathbb{R})$. Il y en a une autre interprétation : notons A_M le plus grand F-tore déployé dans Z_M, alors la restriction $X^*(M) \to X^*(A_M)$ induit un isomorphisme $X_*(A_M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_M$.

Soient G un F-groupe réductif connexe et M un sous-groupe de Lévi. L'ensemble des sous-groupes de Lévi de G contenant M est désigné par $\mathcal{L}^G(M)$. On désigne par $\mathcal{P}^G(M)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G ayant M comme composante de Lévi. On pose $W^G(M) := N_G(M)(F)/M(F)$.

On a la restriction $X^*(G) \to X^*(M)$ ainsi que l'inclusion $A_G \hookrightarrow A_M$. Ces deux applications induisent une suite exacte courte $W^G(M)$-équivariante, scindée canoniquement

$$0 \to \mathfrak{a}_G \to \mathfrak{a}_M \leftrightarrows \mathfrak{a}_M^G \to 0.$$

Le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de G est noté $\pi : G_{\mathrm{SC}} \to G$; on note $M_{\mathrm{sc}} := \pi^{-1}(M)$.

Soit E une F-algèbre commutative de dimension finie. Soit G un E-groupe. Par abus de notation, on omet la restriction des scalaires relativement à E/F et on regarde G comme un F-groupe.

Corps locaux, la décomposition de Jordan topologique Soit F un corps local, le groupe de Galois absolu est noté Γ_F et le groupe de Weil absolu est noté W_F. Si F est non archimédien, le sous-groupe d'inertie de W_F est noté I_F ; on note $\mathfrak{o}_F$ l'anneau des entiers de F et $\mathfrak{p}_F$ son idéal maximal.

Supposons F non archimédien de caractéristique résiduelle p. Soit G un F-groupe réductif connexe. On dira que p est suffisamment grand par rapport à G si la minoration [84, 4.4 (H1)] est satisfaite et $p > 2$. Dans ce cas-là, on peut définir les éléments topologiquement unipotents (resp. nilpotents) dans $G(F)$ (resp. dans $\mathfrak{g}(F)$). L'exponentielle définit un homéomorphisme de l'espace des éléments topologiquement nilpotents sur celui des éléments topologiquement unipotents (voir [84, 4.3 et appendice B]).

Un élément $x \in G(F)$ est dit compact si le sous-groupe engendré par x est d'adhérence compacte. Un tel élément $x \in G(F)$ admet une unique décomposition de Jordan $x = x_{\mathrm{tu}} x_{p'} = x_{p'} x_{\mathrm{tu}}$, où $x_{p'}$ est d'ordre fini premier à p et x_{tu} est topologiquement unipotent. Il existe un unique $X \in \mathfrak{g}(F)$, qui est topologiquement nilpotent, tel que $\exp(X) = x_{\mathrm{tu}}$. De plus, x_{tu} et $x_{p'}$ appartiennent à l'adhérence du sous-groupe engendré par x.

L-groupes Pour les groupes algébriques complexes, on confond systématiquement le schéma en groupe et la variété formée de ses $\mathbb{C}$-points. Une donnée de L-groupe pour un F-groupe réductif connexe M signifie les données suivantes

- un torseur intérieur $\phi : M \times_F \bar{F} \xrightarrow{\sim} M^* \times_F \bar{F}$, où M^* est un F-groupe réductif quasi-déployé ;
- une paire de Borel (T^*, B^*) de M^* définie sur F ;
- un $\mathbb{C}$-groupe réductif $\hat{M}$ muni d'une paire de Borel $(\hat{T}, \hat{B})$;
- une action ρ de Γ_F sur $\hat{M}$ qui laisse $(\hat{T}, \hat{B})$ invariante.
- un isomorphisme Γ_F-équivariant entre les données radicielles basées $\Psi(M^*, T^*, B^*)^\vee \xrightarrow{\sim} \Psi(\hat{M}, \hat{T}, \hat{B})$, où $\Psi(\cdots)^\vee$ désigne le dual.

C'est possible de rigidifier certains de ces choix en fixant des F-épinglages ; nous ne le faisons pas dans cet article. Il existe toujours une donnée de L-groupe pour M, ce que l'on fixe. On introduit ainsi le L-groupe ${}^{\mathrm{L}}M := \hat{M} \rtimes W_F$.

Supposons maintenant que M est un sous-groupe de Lévi de G. Fixons $P_0 \in \mathcal{P}^G(M)$. On dira que les données de L-groupes pour G et M sont compatibles si elles vérifient les conditions suivantes :

- le torseur intérieur $\phi : G \to G^*$ se restreint en celui pour M, disons $\phi|_M : M \to M^*$, tel que $P_0^* := \phi(P_0)$ est défini sur F ;
- notons $(T^*, (B^M)^*)$ la paire de Borel pour M^*, la paire de Borel pour G^* est (T^*, B^*) où B^* est l'unique sous-groupe de Borel tel que $(B^M)^* \subset B^* \subset P_0^*$;
- $\hat{M} \subset \hat{G}$, les actions galoisiennes étant compatibles ;
- notons $(\hat{T}, \hat{B}^M)$ la paire de Borel pour $\hat{M}$, la paire de Borel pour $\hat{G}$ est de la forme $(\hat{T}, \hat{B})$;
- à P_0^* est associé l'ensemble de ses racines simples $\Delta_{P_0^*}$ qui correspond par dualité à l'ensemble $\Delta_{\hat{P}_0}$, où $\hat{P}_0 \in \mathcal{P}^{\hat{G}}(\hat{M})$, tel que $\hat{B}^M \subset \hat{B} \subset \hat{P}_0$;
- les isomorphismes $\Psi(M^*, T^*, (B^M)^*)^\vee \xrightarrow{\sim} \Psi(\hat{M}, \hat{T}, \hat{B}^M)$ et $\Psi(G^*, T^*, B^*)^\vee \xrightarrow{\sim} \Psi(\hat{G}, \hat{T}, \hat{B})$ sont compatibles.

De tels choix sont possibles. Ces choix induisent une inclusion canonique ${}^{\mathrm{L}}M \hookrightarrow {}^{\mathrm{L}}G$. Cela permet aussi de définir une application injective $\mathcal{L}^G(M) \to \mathcal{L}^{\hat{G}}(\hat{M})$. Son image consiste des $\hat{L} \in \mathcal{L}^{\hat{G}}(\hat{M})$ tels qu'il existe $\hat{P} \in \mathcal{P}^{\hat{G}}(\hat{L})$ tels que $\hat{L}$ et $\hat{P}$ sont tous Γ_F-stables. Cf. [19, §1].

3 Endoscopie métaplectique

Le corps local F et le caractère $\psi : F \to \mathbb{C}^\times$ sont fixés dans cette section.

3.1 Données endoscopiques

Soit $(W, \langle | \rangle)$ un F-espace symplectique de dimension $2n$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Posons $G := \mathrm{Sp}(W)$. Un sous-groupe de Lévi M correspond à des sous-espaces de W

$$(\ell^i, \ell_i)_{i \in I}, W^\flat$$

où

- I est un ensemble fini ;

– pour tout i, $(\ell^i \oplus \ell_i, \langle|\rangle)$ est un F-espace symplectique dont ℓ^i et ℓ_i sont des lagrangiens ;
– $(W^\flat, \langle|\rangle)$ est un F-espace symplectique ;
– on a une somme directe orthogonale $W = \bigoplus_{i\in I}(\ell^i \oplus \ell_i) \oplus W^\flat$.

Posons $n_i := \dim \ell_i$, alors

$$M = \prod_{i\in I} \mathrm{GL}(n_i) \times \mathrm{Sp}(W^\flat).$$

Les sous-groupes de Lévi de G sont ainsi paramétrés, à conjugaison par $G(F)$ près, par les données $(I, (n_i)_{i\in I})$ où
– I est un ensemble fini,
– $(n_i)_{i\in I} \in \mathbb{Z}^I_{\geq 1}$ à permutation près,

telles que $m := n - \sum_{i\in I} n_i \geq 0$.

Fixons un sous-groupe de Lévi M associé à la suite de sous-espaces comme précédemment. Soit $\mathbf{p} : \tilde{G} \to G(F)$ le revêtement métaplectique, alors (voir [Chapitre I, §5.4]) $\mathbf{p} : \tilde{M} \to M(F)$ est canoniquement isomorphe au revêtement

$$\tilde{M} = \prod_{i\in I} \mathrm{GL}(n_i) \times \widetilde{\mathrm{Sp}}(W^\flat) \xrightarrow{(\mathrm{id},\mathbf{p})} \prod_{i\in I} \mathrm{GL}(n_i) \times \mathrm{Sp}(W^\flat), \tag{II.1}$$

où la restriction de $\mathbf{p}$ à la composante $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W^\flat)$ est encore notée par $\mathbf{p}$. Remarquons que, tandis que le choix des espaces symplectiques $(W^\flat, \langle|\rangle)$, $(W, \langle|\rangle)$ n'affecte pas les groupes à isomorphisme près pourvu qu'ils aient les bonnes dimensions, il affecte les plongements $M \hookrightarrow G$ et $\tilde{M} \hookrightarrow \tilde{G}$. Par ailleurs, selon [Chapitre I], les candidats de sous-groupes hyperspéciaux et de facteurs de transfert dépendent aussi de la forme symplectique. S'il n'y a pas de telles dépendances à craindre, on écrira $G = \mathrm{Sp}(2n)$ et $\tilde{G} = \widetilde{\mathrm{Sp}}(2n)$, idem pour $M, \tilde{M}$.

Définition 3.1.1. Les revêtements $\mathbf{p} : \tilde{M} \to M(F)$ de la forme (II.1) sont dits de type métaplectique. Par abus de notation, on dit aussi que $\tilde{M}$ est un groupe de type métaplectique. Ici c'est sous-entendu que l'on a choisi $(W^\flat, \langle|\rangle)$.

Si $\mathbf{p} : \tilde{L} \to L(F)$ est de type métaplectique et $M \subset L$ est un sous-groupe de Lévi, alors la restriction $\mathbf{p} : \widetilde{M} \to M(F)$ est aussi de type métaplectique de façon évidente. On dit aussi que $\tilde{M}$ est un sous-groupe de Lévi de $\tilde{L}$. Les notions de distributions spécifiques et de fonctions anti-spécifiques (cf. [Chapitre I, §2.1]) s'adaptent à ce cadre sans difficulté.

Rappelons que le dual de Langlands de $\mathrm{GL}(n)$ est le groupe complexe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ et celui de $\mathrm{SO}(2n+1)$ est $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$, tous munis de l'action galoisienne triviale. La définition ci-dessous reflète l'analogie entre $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ et $\mathrm{SO}(2n+1)$.

Définition 3.1.2. Soit $\tilde{M} = \prod_{i\in I} \mathrm{GL}(n_i) \times \widetilde{\mathrm{Sp}}(W^\flat)$ un groupe de type métaplectique avec $\dim W^\flat = 2m$. Posons

$$\widehat{\widetilde{M}} := \prod_{i\in I} \mathrm{GL}(n_i, \mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(2m, \mathbb{C}),$$

$$Z^0_{\widehat{\widetilde{M}}} = \prod_{i\in I} \mathbb{C}^\times \times \{1\},$$

où on identifie $\mathbb{C}^\times$ au centre de $\mathrm{GL}(n_i, \mathbb{C})$ pour chaque $i \in I$. Il y a une bijection naturelle entre les classes de conjugaison des sous-groupes de Lévi de $\widehat{\widetilde{M}}$ et celles de M. Munissons $\widehat{\widetilde{M}}$ de l'action triviale de Γ_F.

Donnons une définition *ad hoc* des données endoscopiques de $\tilde{M}$; une interprétation plus naturelle sera donnée dans 3.1.8.

Définition 3.1.3. Avec les notations précédentes, une donnée endoscopique de $\tilde{M}$ est une classe dans

$$\mathcal{E}(\tilde{M}) := Z^0_{\widehat{\widetilde{M}}} \backslash \{s \in \widehat{\widetilde{M}} : s \text{ est semi-simple}\}/\mathrm{conj}.$$

Écrivons $s = ((s_i)_{i\in I}, s^\flat)$. Chaque s_i détermine une donnée endoscopique de $\mathrm{GL}(n_i)$, à laquelle est associé le groupe endoscopique $M_i^!$. Supposons que les valeurs propres de $s^\flat$ sont

$$\underbrace{a_1^{\pm 1}}_{k_1 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{a_r^{\pm 1}}_{k_r \text{ fois}}, \underbrace{+1}_{2m' \text{ fois}}, \underbrace{-1}_{2m'' \text{ fois}}$$

où $a_1, \ldots, a_r \neq \pm 1$ et $a_i \neq a_j^{\pm 1}$ si $i \neq j$. Définissons le groupe endoscopique associé comme

$$M^! := \prod_{i\in I} M_i^! \times \prod_{j=1}^{r} \mathrm{GL}(k_j) \times \mathrm{SO}(2m'+1) \times \mathrm{SO}(2m''+1).$$

Remarque 3.1.4. Si $\tilde{M} = \prod_{i\in I} \mathrm{GL}(n_i) \times \mu_8$, i.e. s'il n'y a pas de revêtement, alors la définition ci-dessus se réduit à l'endoscopie pour le groupe réductif connexe $M = \prod_{i\in I} \mathrm{GL}(n_i)$. En général, on se ramène aussitôt à l'étude de l'endoscopie pour GL et de l'endoscopie pour $\widetilde{\mathrm{Sp}}$.

Définition 3.1.5. On dit que $s \in \mathcal{E}(\tilde{M})$ est elliptique si $Z_{\widehat{\widetilde{M}}}(s)$ (bien défini à conjugaison près) n'appartient à aucun sous-groupe de Lévi propre de $\widehat{\widetilde{M}}$. L'ensemble des données endoscopiques elliptiques pour $\tilde{M}$ est noté $\mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(\tilde{M})$.

Le résultat suivant est immédiat.

Proposition 3.1.6. *Soient $\tilde{M} = \prod_{i\in I} \mathrm{GL}(n_i) \times \widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ et $s = ((s_i)_{i\in I}, s^\flat) \in \mathcal{E}(\tilde{M})$, alors s est elliptique si et seulement si s_i est central dans $\mathrm{GL}(n_i, \mathbb{C})$ pour chaque $i \in I$ et $(s^\flat)^2 = 1$. Dans ce cas-là, on a*

$$M^! = \prod_{i\in I} \mathrm{GL}(n_i) \times \mathrm{SO}(2m'+1) \times \mathrm{SO}(2m''+1), \quad m' + m'' = m. \tag{II.2}$$

Par conséquent, $\mathcal{E}_{ell}(\tilde{M})$ est en bijection avec $\{(m', m'') \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0} : m' + m'' = m\}$: la multiplicité de 1 (resp. -1) dans les valeurs propres de $s^\flat$ est égale à $2m'$ (resp. $2m''$).

Remarque 3.1.7. Pour le cas $\tilde{M} = \widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$, on se ramène au formalisme posé dans [Chapitre I].

Proposition 3.1.8. *Soient $\tilde{L}$ un groupe de type métaplectique et $s \in \mathcal{E}(\tilde{L})$. Alors il existe un sous-groupe de Lévi $\tilde{M}$ et $s_M \in \widehat{\widetilde{M}}$ tels que*

- *s_M détermine une donnée endoscopique elliptique pour $\tilde{M}$ dont le groupe endoscopique $M^!$ est isomorphe à $L^!$;*
- *via l'inclusion $\widehat{\widetilde{M}} \hookrightarrow \widehat{\widetilde{L}}$, s_M détermine la donnée endoscopique s pour $\tilde{L}$.*

Le Lévi $\tilde{M}$ est unique à conjugaison près. La donnée endoscopique elliptique pour $\tilde{M}$ déterminée par s_M est unique. On en déduit une application surjective

$$\mathcal{E}(\tilde{L}) \to \bigsqcup_{M/\mathrm{conj}} \mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(\tilde{M}). \tag{II.3}$$

Démonstration. On se ramène aussitôt aux cas $L = \mathrm{GL}(n)$ ou $L = \mathrm{Sp}(2n)$. Il suffit de traiter le deuxième cas. Soit $s \in \mathcal{E}(\tilde{L})$; on en prend un représentant dans $\hat{\tilde{L}}$, noté encore par s. Il existe un Lévi de $\hat{\tilde{L}}$, noté $\widehat{\tilde{M}}$, tel que l'on peut écrire

$$\widehat{\tilde{M}} = \prod_{i \in I} \mathrm{GL}(n_i, \mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(2m, \mathbb{C}),$$
$$s = ((s_i)_{i \in I}, s^\flat) \in \widehat{\tilde{M}},$$

où

- les valeurs propres de $s^\flat \in \mathrm{Sp}(2m, \mathbb{C})$ sont ± 1 ;
- $s_i \in \mathbb{C}^\times = Z_{\mathrm{GL}(n_i, \mathbb{C})}$ et $s_i \neq \pm 1$ pour tout i ;
- $s_i \neq s_j^{\pm 1}$ si $i \neq j$.

Alors $\widehat{\tilde{M}}$ est unique à conjugaison près. On prend $\tilde{M}$ un Lévi de $\tilde{L}$ dual de $\widehat{\tilde{M}}$ et on prend $s_M := s$. La donnée endoscopique pour $\tilde{M}$ déterminée par s_M est elliptique et $M^! = L^!$ d'après 3.1.6. Un tel élément dans $\mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(\tilde{M})$ est déterminé par la multiplicité de $+1$ (resp. -1) dans les valeurs propres de la composante en $\mathrm{Sp}(2m, \mathbb{C})$ de s_M. Or c'est égal à la multiplicité de 1 (resp. -1) dans les valeurs propres de s, d'où l'unicité.

Montrons la surjectivité de (II.3). Fixons une donnée endoscopique dans $\mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(\tilde{M})$ déterminée par un élément $s_M \in \widehat{\tilde{M}}$. On peut prendre $s = s_M t$ où $t \in Z^0_{\widehat{\tilde{M}}}$ est en position générale de sorte que s vérifie les conditions précédentes relativement à $\tilde{M}$. La surjectivité s'ensuit. $\square$

Remarquons que $\widehat{\tilde{M}}$ admet la description comme le commutant dans $\hat{\tilde{L}}$ du centre connexe de $Z_{\hat{\tilde{L}}}(s)$. La théorie que nous élaborerons ne dépend que de l'image de s sous (II.3), pour l'essentiel.

Soient $\tilde{L}, \tilde{M}, M^!$ comme ci-dessus. Comme dans l'endoscopie de groupes réductifs connexes, on a

$$\mathfrak{a}_L \hookrightarrow \mathfrak{a}_M \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_{M^!} = \mathfrak{a}_{L^!}.$$

Une donnée endoscopique pour $\tilde{L}$ est elliptique si et seulement si $\mathfrak{a}_{L^!} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_L$ via ces applications. Parallèlement, on a des inclusions

$$Z^0_{\hat{\tilde{L}}} \hookrightarrow Z^0_{\widehat{\tilde{M}}} \hookrightarrow Z^{\Gamma_F}_{\widehat{M^!}} = Z^{\Gamma_F}_{\widehat{L^!}}.$$

3.2 Correspondance des classes géométriques semi-simples

Fixons $\tilde{L}$ un groupe de type métaplectique. Soient $s \in \mathcal{E}(\tilde{L})$ et $L^!$ le groupe endoscopique associé. Notre but est de définir une application

$$\mu : \mathscr{C}^{\text{géo}}_{\mathrm{ss}}(L^!(F)) \to \mathscr{C}^{\text{géo}}_{\mathrm{ss}}(L(F)).$$

D'après 3.1.8, il existe un sous-groupe de Lévi $\tilde{M}$ tel que s induit une donnée endoscopique elliptique de $\tilde{M}$ et $M^! = L^!$. On sait définir une application $\mathscr{C}^{\text{géo}}_{\mathrm{ss}}(M^!(F)) \to \mathscr{C}^{\text{géo}}_{\mathrm{ss}}(M(F))$; en effet, selon (II.2), l'endoscopie est tautologique en les composantes GL et c'est la situation considérée dans [Chapitre I] en la composante Sp, pour laquelle une application μ des classes géométriques semi-simples est déjà définie. Rappelons-la brièvement.

Supposons momentanément que $\tilde{M} := \widetilde{\mathrm{Sp}}(W^\flat)$, le groupe endoscopique elliptique de $\tilde{M}$ associé à la paire (m', m'') est $M^! = \mathrm{SO}(2m'+1) \times \mathrm{SO}(2m''+1)$. Soit $\gamma = (\gamma', \gamma'') \in M^!(F)$ semi-simple ayant valeurs propres

$$\underbrace{a'_1, \ldots, a'_{n'}, 1, (a'_{n'})^{-1}, \ldots, (a'_1)^{-1}}_{\text{provenant de } \gamma'}, \underbrace{a''_1, \ldots, a''_{n''}, 1, (a''_{n''})^{-1}, \ldots, (a''_1)^{-1}}_{\text{provenant de } \gamma''}.$$

On dit que $\delta \in M(F)$ correspond à γ s'il est semi-simple avec valeurs propres

$$a'_1, \dots, a'_{n'}, (a'_{n'})^{-1}, \dots, (a'_1)^{-1}, -a''_1, \dots, -a''_{n''}, -(a''_{n''})^{-1}, \dots, -(a''_1)^{-1}.$$

On en déduit une application $\mathscr{C}^{\text{géo}}_{\text{ss}}(M^!(F)) \to \mathscr{C}^{\text{géo}}_{\text{ss}}(M(F))$. Le cas où $\tilde{M}$ est de type métaplectique s'ensuit.

Composons $\mathscr{C}^{\text{géo}}_{\text{ss}}(M^!(F)) \to \mathscr{C}^{\text{géo}}_{\text{ss}}(M(F))$ avec l'application canonique $\mathscr{C}^{\text{géo}}_{\text{ss}}(M(F)) \to \mathscr{C}^{\text{géo}}_{\text{ss}}(L(F))$, on obtient μ. On récapitule la situation par le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{L} \\ M^! \arrow[r, dashed, dash, "\text{endo.ell.}"] & \tilde{M} \arrow[u, hook, "\text{Lévi}"'] \end{tikzcd}$$

On dit que $\gamma \in L^!(F)_{\text{ss}}$ et $\delta \in L(F)_{\text{ss}}$ se correspondent si leurs classes géométriques se correspondent via μ.

Proposition 3.2.1. *Supposons que $\delta \in L(F)_{ss}$ et $\gamma \in L^!(F)_{ss}$ se correspondent. Si δ est régulier, alors δ et γ sont tous fortement réguliers et on a*

$$L^!_\gamma \simeq L_\delta.$$

Démonstration. Dans L, régulier implique fortement régulier et on se ramène au cas où $L^!$ est un groupe endoscopique elliptique pour $\tilde{L}$. On se ramène ensuite au cas L métaplectique qui est traité dans [Chapitre I]. □

Remarque 3.2.2. Jusqu'à maintenant, nos définitions ont peu à faire avec le corps F et le revêtement n'y intervient pas. Donc on peut aussi définir les données endoscopiques, la notion d'ellipticité et la correspondance ci-dessus dans le cas où F est un corps global. Nous ne l'utiliserons pas dans cet article.

Supposons maintenant $\tilde{M}$ de type métaplectique, $s \in \mathcal{E}_{\text{ell}}(\tilde{M})$ et $M^!$ est le groupe endoscopique elliptique associé. Nous allons définir le facteur de transfert. Écrivons

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= \prod_{i \in I} \mathrm{GL}(n_i) \times \widetilde{\mathrm{Sp}}(W^\flat), \\ M^! &= \prod_{i \in I} \mathrm{GL}(n_i) \times \mathrm{SO}(2m'+1) \times \mathrm{SO}(2m''+1). \end{aligned}$$

Soient $\gamma \in M^!(F)_{\text{M-reg}}$, $\delta \in M(F)_{\text{reg}}$ qui se correspondent. On isole les composantes dans $\mathrm{GL}(n_i)$ en les écrivant comme $\gamma = ((\gamma_i)_{i\in I}, \gamma', \gamma'')$ et $\delta = ((\delta_i)_{i\in I}, \delta^\flat)$. Alors $\gamma^\flat := (\gamma', \gamma'')$ et $\delta^\flat$ sont réguliers et ils se correspondent pour l'endoscopie elliptique associée à la paire (m', m''). On applique la théorie de [Chapitre I].

Définition 3.2.3. Soient δ, γ comme ci-dessus. Soit $\tilde{\delta} = ((\delta_i)_{i\in I}, \tilde{\delta}^\flat) \in \mathbf{p}^{-1}(\delta)$, on définit le facteur de transfert par

$$\Delta(\gamma, \tilde{\delta}) = \Delta_{M^!, \tilde{M}}(\gamma, \tilde{\delta}) := \Delta(\gamma^\flat, \tilde{\delta}^\flat).$$

Si $\delta \in M(F)$ et $\gamma \in M^!(F)$ ne se correspondent pas, on pose $\Delta(\gamma, \tilde{\delta}) = 0$ pour tout $\tilde{\delta}^\flat) \in \mathbf{p}^{-1}(\delta)$.

Ce facteur vérifie toutes les propriétés énumérées dans [Chapitre I, §1]. En particulier, il ne dépend que de la classe de conjugaison géométrique de γ et la classe de conjugaison de $\tilde{\delta}$; on a aussi $\Delta(\gamma, \varepsilon\tilde{\delta}) = \varepsilon\Delta(\gamma, \tilde{\delta})$ pour tout $\varepsilon \in \mu_8$.

On dit que $\gamma \in M^!(F)_{\mathrm{ss}}$ est L-régulier s'il correspond à un élément $\delta \in M(F)$ qui est régulier dans $L(F)$. On note la sous-variété ouverte des éléments L-réguliers par $M^!_{L-\mathrm{reg}}$, c'est inclus dans $M^!_{M-\mathrm{reg}}$.

Remarque 3.2.4. On peut étendre 3.2.3 au cas des données endoscopiques non elliptiques d'un groupe métaplectique. Soit $\gamma \in M^!_{L-\mathrm{reg}}(F)$. Notons $\Xi^M[\gamma]$ l'ensemble des classes de conjugaison dans $M(F)$ qui correspondent à γ, et $\Xi^L[\gamma]$ la variante pour L au lieu de M. C'est bien connu (eg. [85, 5.4 (4)]) que l'application naturelle $\Xi^M[\gamma] \to \Xi^L[\gamma]$ est bijective. Pour tout $\tilde{\delta} \in \tilde{G}$ tel que δ correspondant à γ, on peut choisir un conjugué $\delta_M \in M(F)$; alors $\tilde{\delta}$ est conjugué à un élément $\tilde{\delta}_M \in \tilde{M}$. Posons

$$\Delta(\gamma, \tilde{\delta}) := \Delta(\gamma, \tilde{\delta}_M)$$

en utilisant le cas elliptique 3.2.3. Montrons qu'il est bien défini. Soient $\tilde{\delta}^1_M$, $\tilde{\delta}^2_M$ deux choix comme ci-dessus. Il existe alors $x, y \in L(F)$ tels que $x\tilde{\delta}x^{-1} = \tilde{\delta}^1_M$, $y\tilde{\delta}y^{-1} = \tilde{\delta}^2_M$. On sait aussi qu'il existe $m \in M(F)$ tel que $m\delta^1_M m^{-1} = \delta^2_M$. Donc l'action adjointe par $m^{-1}yx^{-1}$ préserve δ^1_M. Rappelons que deux éléments dans un groupe de type métaplectique commutent si et seulement si leurs images par le revêtement commutent. Il en résulte que $m^{-1}yx^{-1}$ centralise $\tilde{\delta}^1_M$, d'où $m\tilde{\delta}^1_M m^{-1} = \tilde{\delta}^2_M$ et

$$\Delta(\gamma, \tilde{\delta}^1_M) = \Delta(\gamma, \tilde{\delta}^2_M).$$

3.3 L'ensemble $\mathcal{E}_{M^!}(\tilde{G})$

Prenons désormais $\tilde{G} = \widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ et $\tilde{M}$ un sous-groupe de Lévi de la forme $\tilde{M} = \prod_{i \in I} \mathrm{GL}(n_i) \times \widetilde{\mathrm{Sp}}(W^\flat)$. Supposons choisis $P_0 \in \mathcal{P}(M)$, des paires de Borel (T, B^M) et (T, B) définies sur F pour M et G, respectivement, telles que $B^M \subset B \subset P_0$ (cf. §2). En particulier, M est un Lévi standard de G pour ces choix.

Fixons toujours $s_0 \in \mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(\tilde{M})$ et le groupe endoscopique elliptique associé $M^!$. On prend un représentant dans $\widehat{\tilde{M}}$ de la classe s_0 et on le note abusivement par le même symbole s_0. Écrivons $s_0 = ((s_{0,i})_{i \in I}, s_0^\flat)$ selon la décomposition $\widehat{\tilde{M}} = \prod_{i \in I} \mathrm{GL}(n_i, \mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(2m, \mathbb{C})$.

Définition 3.3.1. Posons

$$\mathcal{E}_{M^!}(\tilde{G}) := \{s \in s_0 Z^0_{\widehat{\tilde{M}}} / Z^0_{\widehat{\tilde{G}}} : (\text{la classe de } s) \in \mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(\tilde{G})\}.$$

C'est sous-entendu que cet ensemble dépend de s_0, non seulement du groupe $M^!$.

Lemme 3.3.2. *On a* $|\mathcal{E}_{M^!}(\tilde{G})| = 2^{|I|}$.

Démonstration. La donnée endoscopique étant elliptique, on a $s_{0,i} \in \mathbb{C}^\times$ pour tout $i \in I$. On peut prendre un représentant de s_0 tel que $s_{0,i} = 1$ pour tout $i \in I$. Alors

$$\mathcal{E}_{M^!}(\tilde{G}) = \{((s_i)_{i \in I}, s_0^\flat) \in \widehat{\tilde{M}} : s_i = \pm 1\}$$

d'après 3.1.6, d'où l'assertion. ☐

Soit $s \in \mathcal{E}_{M^!}(\tilde{G})$, il fournit un groupe endoscopique elliptique pour $\tilde{G}$, noté $G[s]$ dans ce contexte. Écrivons $s = ((s_i)_i, s_0^\flat)$ avec $s_i = \pm 1$ comme dans la preuve de 3.3.2 et posons

$$\begin{aligned} I' &:= \{i \in I : s_i = +1\}, \\ I'' &:= \{i \in I : s_i = -1\}, \\ n' &:= m' + \sum_{i \in I'} n_i, \\ n'' &:= m'' + \sum_{i \in I''} n_i. \end{aligned}$$

Alors $n' + n'' = n$ et s est la donnée endoscopique elliptique de $\tilde{G}$ associée à la paire (n', n''). Donc on a $G[s] = \mathrm{SO}(2n'+1) \times \mathrm{SO}(2n''+1)$. D'autre part, on peut plonger $M^!$ dans $G[s]$ de la façon suivante : $\prod_{i \in I'} \mathrm{GL}(n_i) \times \mathrm{SO}(2m'+1)$ (resp. $\prod_{i \in I''} \mathrm{GL}(n_i) \times \mathrm{SO}(2m''+1)$) se plonge dans $\mathrm{SO}(2n'+1)$ (resp. $\mathrm{SO}(2n''+1)$) comme un sous-groupe de Lévi. Ce plongement est unique à conjugaison près par $G[s](F)$. On récapitule la situation par le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} G[s] \arrow[r, dashed, dash, "\text{endo.ell.}"] & \tilde{G} \\ M^! \arrow[u, hook, "\text{Lévi}"] \arrow[r, dashed, dash, "\text{endo.ell.}"] & \tilde{M} \arrow[u, hook, "\text{Lévi}"'] \end{tikzcd}$$

Dans cette situation, le Lévi M de G correspond à la paire $(G[s], M^!)$ au sens de [Chapitre I, §5.4]. On peut regarder $M^!$ de deux manières : un groupe endoscopique elliptique du Lévi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$, ou un Lévi du groupe endoscopique elliptique $G[s]$ de $\tilde{G}$. Au contraire du cas des groupes réductifs, il y une différence comme suit.

Définition 3.3.3. Soit $s \in \mathcal{E}_{M^!}(\tilde{G})$. Posons $z[s] := ((z_i)_{i \in I}, 1) \in Z_{M^!}(F)$ où $z_i = +1$ (resp. -1) si $i \in I'$ (resp. si $i \in I''$). C'est contenu dans tout sous-groupe hyperspécial de $M^!(F)$. Soit $\gamma \in M^!(F)$, posons $\gamma[s] := z[s]\gamma$. Signalons aussi que l'on peut translater une classe de conjugaison dans $M^!(F)$ par l'élément central $z[s]$.

Cette définition se généralise immédiatement au cas $\tilde{G}$ de type métaplectique et $s \in \mathcal{E}_{M^!}(\tilde{G})$: les facteurs GL supplémentaires de $\tilde{G}$ n'y interviennent pas.

Plus généralement, soit $s \in s_0 Z^0_{\widehat{\tilde{M}}}/Z^0_{\widehat{\tilde{G}}}$. Alors il existe un sous-groupe de Lévi $\tilde{L}$ de $\tilde{G}$ contenant $\tilde{M}$, tel que $s \in \mathcal{E}_{M^!}(\tilde{L})$. On définit $z[s] \in Z_{M^!}(F)$ et l'application $\gamma \mapsto \gamma[s] = z[s]\gamma$ sur $M^!(F)$ par référence à $\tilde{L}$.

Proposition 3.3.4. *Notons $\mu_1 : \mathscr{C}^{\text{géo}}_{ss}(M^!(F)) \to \mathscr{C}^{\text{géo}}_{ss}(G(F))$ le composé de $\mathscr{C}_{ss}(M^!(F)) \to \mathscr{C}_{ss}(G[s](F))$ (induit par l'inclusion) avec $\mu : \mathscr{C}_{ss}(G[s](F)) \to \mathscr{C}_{ss}(G(F))$ (induit par l'endoscopie déterminée par s). Alors*

$$\mu_1(\mathcal{O}) = \mu(z[s] \cdot \mathcal{O})$$

pour tout $\mathcal{O} \in \mathscr{C}^{\text{géo}}_{ss}(M^!(F))$.

Démonstration. C'est clair d'après la définition de μ. $\square$

Notons qu'il y a une inclusion canonique $W^{G[s]}(M^!) \hookrightarrow W^G(M)$. En effet, notons $\mathfrak{S}^{\pm}(I)$ le produit semi-direct $\mathfrak{S}(I) \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I$, où $\mathfrak{S}(I)$ est le groupe symétrique opérant sur I. Alors $W^G(M)$ s'identifie à $\mathfrak{S}^{\pm}(I)$, tandis que $W^{G[s]}(M^!)$ s'identifie à $\mathfrak{S}^{\pm}(I') \times \mathfrak{S}^{\pm}(I'')$.

Le résultat suivant est alors immédiat.

Proposition 3.3.5. *L'isomorphisme $\mathfrak{a}_{M^!} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_M$ est équivariante par rapport à $W^{G[s]}(M^!) \hookrightarrow W^G(M)$.*

Proposition 3.3.6. *Désignons par* $\Delta_{M^!,\tilde{M}}$ *et* $\Delta_{G[s],\tilde{G}}$ *les facteurs de transfert associés aux données* s_0 *et* s*, respectivement. Soient* $\gamma \in M^!(F)_{G-\mathrm{reg}}$ *et* $\delta \in M(F)_{G-\mathrm{reg}}$ *qui se correspondent. Pour tout* $\tilde{\delta} \in \mathbf{p}^{-1}(\delta)$*, on a*

$$\Delta_{M^!,\tilde{M}}(\gamma, \tilde{\delta}) = \Delta_{G[s],\tilde{G}}(\gamma[s], \tilde{\delta}).$$

Démonstration. Adoptons la notation dans 3.2.3. D'après la descente parabolique de $\Delta_{G[s],\tilde{G}}$ [Chapitre I, 5.18], appliquée en $(\gamma[s], \tilde{\delta})$, on a

$$\Delta_{G[s],\tilde{G}}(\gamma[s], \tilde{\delta}) = \Delta_{\mathrm{SO}(2m'+1)\times\mathrm{SO}(2m''+1),\widetilde{\mathrm{Sp}}(W^\flat)}(\gamma^\flat, \tilde{\delta}^\flat).$$

Or c'est exactement la définition de $\Delta_{M^!,\tilde{M}}(\gamma, \tilde{\delta})$. □

Remarque 3.3.7. Cette propriété et 3.3.4 permettent d'étendre le transfert (vrai pour tout corps local F de caractéristique nulle) et le lemme fondamental non pondéré aux données endoscopiques non elliptiques de $\tilde{G}$; le facteur de transfert étant celui défini dans 3.2.4. En effet, on le réduit de façon usuelle au transfert (resp. au lemme fondamental) elliptique suivi par une descente parabolique des intégrales orbitales. Les détails sont laissés au lecteur.

4 Intégrales orbitales pondérées endoscopiques et les fonctions stabilisées

Dans cette section, F est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Posons toujours $\tilde{G} := \widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$. Supposons que

– $\psi|_{\mathfrak{o}_F} = 1$, $\psi|_{\mathfrak{p}_F^{-1}}$ non trivial ;

– p est suffisamment grand par rapport à G.

Fixons aussi un Lévi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$ associé à la donnée de sous-espaces $((\ell_i, \ell^i)_{i\in I}, W^\flat)$, posons $n_i := \dim \ell_i$ pour tout $i \in I$, alors M est de la forme

$$\tilde{M} = \prod_{i\in I} \mathrm{GL}(n_i) \times \widetilde{\mathrm{Sp}}(W^\flat).$$

Posons $2m = \dim_F W^\flat$.

4.1 Intégrales orbitales pondérées non ramifiées anti-spécifiques

Fixons un réseau autodual $\mathfrak{L} \subset W$ par rapport à $\langle|\rangle$ et posons $K := \mathrm{Stab}_{G(F)}(\mathfrak{L}) \subset G(F)$, c'est un sous-groupe hyperspécial de $G(F)$. Supposons que $\mathfrak{L}$ est en bonne position relativement à $((\ell_i, \ell^i)_{i\in I}, W^\flat)$, c'est-à-dire

$$\mathfrak{L} = \bigoplus_{i\in I} \big((\ell_i \cap \mathfrak{L}) \oplus (\ell^i \cap \mathfrak{L})\big) \oplus (W^\flat \cap \mathfrak{L}).$$

Cela entraîne que $K^M := K \cap M(F)$ est aussi hyperspécial dans $M(F)$. Écrivons $K^M = \prod_{i\in I} K_i^M \times K^\flat$. Le modèle latticiel de la représentation de Weil induit un scindage $K^\flat \hookrightarrow \widetilde{\mathrm{Sp}}(W^\flat)$, d'où le scindage $K^M \hookrightarrow \tilde{M}$. Idem, $K \hookrightarrow \widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$. Bien entendu, il faut une compatibilité.

Proposition 4.1.1. *Le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] & \tilde{G} \\ K^M \arrow[u] \arrow[r] & \tilde{M} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Démonstration. On se ramène aussitôt au cas $M = \mathrm{GL}(n)$. D'après [Chapitre I, 2.13], on a la compatibilité cherchée sur un F-tore maximal déployé dans M. D'autre part la compatibilité sur des sous-groupes unipotents est automatique. On en déduit la compatibilité sur la grosse cellule de M par la décomposition de Bruhat, et le cas général en résulte par densité. $\square$

Prenons la mesure de Haar sur $G(F)$ de sorte que $\mathrm{mes}(K) = 1$; cette mesure ne dépend pas du choix de K. Le scindage du revêtement $\mathbf{p}$ au-dessus de K permet de définir la fonction $f_K \in C^\infty_{c,-}(\tilde{G})$ telle que

$$f_K(\tilde{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^{-1}, & \text{si } \tilde{x} \in \boldsymbol{\varepsilon} K, \boldsymbol{\varepsilon} \in \mu_8; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Fixons $s_0 \in \mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(\tilde{M})$, auquel est associé le groupe endoscopique

$$M^! = \prod_{i \in I} \mathrm{GL}(n_i) \times \mathrm{SO}(2m' + 1) \times \mathrm{SO}(2m'' + 1).$$

tel que $m' + m'' = m$.

On sait définir la fonction poids d'Arthur $v_M : M(F)\backslash G(F)/K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ (voir [12]). Elle dépend du choix de K et de la mesure de Haar sur $\mathfrak{a}_M$ induite du choix d'une forme quadratique définie positive sur $\mathfrak{a}_M$, invariante par $W^G(M)$, ce que l'on fixe dorénavant.

Soit $\delta \in G_{\mathrm{reg}}(F)$. On normalise la mesure de Haar pour le tore $T(F) := G_\delta(F)$ comme suit. D'après [26, 4.4], il existe un $\mathfrak{o}_F$-schéma en groupes canonique $\mathfrak{T}$, qui est lisse et de fibre générique T. Alors $\mathfrak{T}^0(\mathfrak{o}_F)$ s'identifie à un sous-groupe ouvert de $T(F)$. Prenons la mesure de Haar sur $T(F)$ telle que $\mathrm{mes}(\mathfrak{T}^0(\mathfrak{o}_F)) = 1$. La même convention s'applique aux commutants des éléments fortement réguliers dans n'importe quel F-groupe réductif connexe. Puisque la construction ne dépend que du tore T, c'est compatible avec la correspondance des mesures utilisée pour l'endoscopie [85, 2.8], ainsi que sa variante métaplectique [Chapitre I, §5.5].

Définition 4.1.2. Soit $\tilde{\delta} \in \tilde{G}_{\mathrm{reg}}$. Fixons la mesure de Haar sur $G_\delta(F)$ comme ci-dessus et posons

$$r^{\tilde{G}}_{\tilde{M},K}(\tilde{\delta}) := |D^G(\delta)|^{\frac{1}{2}} \int_{G_\delta(F)\backslash G(F)} f_K(x^{-1}\tilde{\delta}x) v_M(x) \,\mathrm{d}x,$$

où $D^G(\delta) := \det(1 - \mathrm{Ad}\,(\delta)|\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\delta)$.

Définition 4.1.3. Soit $\gamma \in M^!_{G-\mathrm{reg}}(F)$. L'intégrale pondérée endoscopique non ramifiée en γ est définie comme

$$r^{\tilde{G}}_{M^!,K}(\gamma) := \sum_{\delta \in M(F)/\mathrm{conj}} \Delta(\gamma, \tilde{\delta}) r^{\tilde{G}}_{\tilde{M},K}(\tilde{\delta}),$$

où $\tilde{\delta} \in \mathbf{p}^{-1}(\delta)$ est quelconque ; le produit $\Delta(\gamma, \tilde{\delta}) r^{\tilde{G}}_{\tilde{M},K}(\tilde{\delta})$ ne dépend que de γ et δ. C'est une somme finie, en fait la somme porte sur les classes de conjugaison dans $\mu(\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(\gamma))$.

Rappelons brièvement les fonctions stabilisées définies par Arthur. Pour l'instant, soient L un F-groupe réductif connexe non ramifié et R un sous-groupe de Lévi de L. Supposons aussi fixée une forme quadratique définie positive sur $\mathfrak{a}_R$, invariante par $W^L(R)$. Imposons les mêmes choix de mesures de Haar sur $L(F)$ et sur les F-tores que précédemment.

On dit que $\gamma \in R(F)_{\mathrm{ss}}$ est L-régulier s'il est régulier comme un élément dans $L(F)_{\mathrm{ss}}$. La sous-variété ouverte des éléments L-réguliers est notée $R_{L-\mathrm{reg}}$. On définit (voir [20, 5.1]) la fonction stabilisée

$$s^L_R : R_{L-\mathrm{reg}}(F) \to \mathbb{C}.$$

Si $\gamma_1, \gamma_2 \in R_{L-\mathrm{reg}}(F)$ sont stablement conjugués, on a $s^L_R(\gamma_1) = s^L_R(\gamma_2)$. Ces fonctions ne dépendent que de la mesure sur $\mathfrak{a}_R$ induite par le choix de la forme quadratique.

4.2 Énoncé du lemme fondamental pondéré

Conservons les mêmes notations. On a l'inclusion $Z^0_{\widehat{\widetilde{M}}} \hookrightarrow Z_{\widehat{M^!}}$. Soit $s \in \mathcal{E}_{M^!}(\tilde{G})$. On a aussi $Z^0_{\widehat{\widetilde{G}}} \hookrightarrow Z_{\widehat{G[s]}}$. Ces inclusions ont des conoyaux finis, donc c'est loisible de poser

$$i_{M^!}(\tilde{G}, G[s]) := \frac{[Z_{\widehat{M^!}} : Z^0_{\widehat{\widetilde{M}}}]}{[Z_{\widehat{G[s]}} : Z^0_{\widehat{\widetilde{G}}}]}. \tag{II.4}$$

Prenons les formes quadratiques positives définies invariantes sur $\mathfrak{a}_{M^!}$ et sur $\mathfrak{a}_M$ qui se correspondent par l'identification $\mathfrak{a}_{M^!} \simeq \mathfrak{a}_M$, qui est équivariante pour $W^{G[s]}(M^!) \hookrightarrow W^G(M)$. Soit $\gamma \in M^!_{G-\mathrm{reg}}(F)$, alors $\gamma[s]$ est aussi $G[s]$-régulier. Ainsi, $\gamma \mapsto s^{G[s]}_{M^!}(\gamma[s])$ est bien défini et il ne dépend que de la classe de conjugaison stable de γ. Le principal résultat de cet article s'énonce comme suit.

Théorème 4.2.1 (Cf. [20, 5.1])**.** *Supposons vérifié le lemme fondamental pondéré non standard sur les algèbres de Lie 5.3.1. Pour tout $\gamma \in M^!_{G-reg}(F)$, on a*

$$r^{\tilde{G}}_{M^!,K}(\gamma) = \sum_{s \in \mathcal{E}_{M^!}(\tilde{G})} i_{M^!}(\tilde{G}, G[s]) \cdot s^{G[s]}_{M^!}(\gamma[s]).$$

Le lemme fondamental pondéré non standard sera rappelé dans le §5.3. La démonstration du théorème occupera le reste de cet article.

Remarque 4.2.2. Lorsque $M = G$, on a $\mathcal{E}_{G^!}(\tilde{G}) = \{s_0\}$, $\gamma[s_0] = \gamma$ et $G[s_0] = G^!$. On a aussi $i_{G^!}(\tilde{G}, G^!) = 1$. Dans ce cas-là $r^{\tilde{G}}_{G^!,K}(\gamma)$ est l'intégrale orbitale endoscopique de la fonction f_K, et $s^{G^!}_{G^!}(\gamma)$ est l'intégrale orbitale stable de la fonction caractéristique d'un hyperspécial quelconque de $G^!(F)$. Donc 4.2.1 se réduit au lemme fondamental pour l'unité [Chapitre I, 5.23].

Les définitions des intégrales orbitales pondérées endoscopiques et les fonctions stabilisées correspondantes se généralisent sans peine au cas $\tilde{G}$ de type métaplectique : il suffit de combiner la théorie pour les groupes $\mathrm{GL}(\cdot)$ avec le résultat pour $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$.

Corollaire 4.2.3. *L'assertion 4.2.1 demeure valable dans le cas plus général où $\tilde{G}$ est de type métaplectique.*

5 Endoscopie : standard et non standard

5.1 Endoscopie standard

Données endoscopiques Soit R un F-groupe réductif muni d'une donnée de L-groupe $(\hat{T}, \hat{B}, \ldots)$. On appelle donnée endoscopique pour R un quadruplet $(R^!, \mathcal{R}^!, s, \hat{\xi})$ tel que
- $R^!$ est un F-groupe réductif connexe quasi-déployé, muni d'une donnée de L-groupe ;
- $\mathcal{R}^!$ s'inscrit dans une extension topologique scindée

$$1 \to \widehat{R^!} \to \mathcal{R}^! \to W_F \to 1$$

  telle que l'action de W_F sur $\widehat{R^!}$ coïncide avec $\rho^!$;
- $s \in \hat{R}$ est semi-simple ;
- $\hat{\xi} : \mathcal{R}^! \to {}^{\mathrm{L}}R$ est un L-homomorphisme, i.e. il commute aux projections sur W_F, tel que :

– il existe un 1-cocycle $a : W_F \to Z_{\hat{R}}$, dont la classe cohomologique est triviale, tel que $\mathrm{Ad}\,(s) \circ \hat{\xi}(x) = a(w(x))\hat{\xi}(x)$ pour tout $x \in \mathcal{R}^!$, où $w(x)$ désigne sa projection dans W_F ;

– $\hat{\xi}$ induit un isomorphisme $\widehat{R^!} \xrightarrow{\sim} Z_{\hat{R}}(s)^0$.

On dit aussi que $R^!$ est un groupe endoscopique pour R associés à s. Un isomorphisme entre deux données endoscopiques $(R^!, \mathcal{R}^!, s, \hat{\xi})$ et $(R'^!, \mathcal{R}'^!, s', \hat{\xi}')$ de R est un élément $\hat{r} \in \hat{R}$ tel que $\mathrm{Ad}\,(\hat{r})\hat{\xi}(\mathcal{R}^!) = \hat{\xi}'(\mathcal{R}'^!)$ et $\mathrm{Ad}\,(\hat{r})(s) = s' \mod Z_{\hat{R}}$. On dit qu'une donnée endoscopique $(R^!, \mathcal{R}^!, s, \hat{\xi})$ est elliptique si $\hat{\xi}(Z_{\widehat{R^!}}^{\Gamma_F})^0 \subset Z_{\hat{R}}$. On dit que cette donnée est non ramifiée si

– la caractéristique résiduelle p de F est suffisamment grande par rapport à R ;

– R est non ramifié et le torseur intérieur fixé est l'identité ;

– $R^!$ est non ramifié et $\hat{\xi}(\mathcal{R}^!) \supset Z_{\hat{R}}(s)^0 \rtimes I_F$.

À isomorphisme près, on peut supposer que $s \in \hat{T}$ et $(\hat{\xi}^{-1}(\hat{T}), \hat{\xi}^{-1}(\hat{B}))$ est la paire de Borel Γ_F-invariante de $\widehat{R^!}$. L'endoscopie fournit une inclusion Γ_F-équivariante $Z_{\hat{R}} \hookrightarrow Z_{\widehat{R^!}}$. D'autre part, en dualisant $\hat{\xi}|_{\hat{\xi}^{-1}(\hat{T})}$, on obtient une inclusion $\mathfrak{a}_R \hookrightarrow \mathfrak{a}_{R^!}$. La donnée endoscopique est elliptique si et seulement si $\mathfrak{a}_R \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_{R^!}$.

Une construction d'Arthur Supposons que R est un sous-groupe de Lévi d'un F-groupe réductif non ramifié L. Choisissons $P_0 \in \mathcal{L}^L(R)$, qui fait partie du choix des données de L-groupes compatibles pour L et R, ce que l'on fixe, dont les torseurs intérieurs sont id.

La construction suivante est due à Arthur [19]. Soit $(R^!, \mathcal{R}^!, s_0, \hat{\xi})$ une donnée endoscopique elliptique non ramifiée pour R. Soit $s \in s_0 Z_{\hat{R}}^{\Gamma_F} / Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F}$. Posons

$$
\begin{aligned}
&\widehat{L[s]} := Z_{\hat{L}}(s)^0, \\
&\mathcal{L}[s] := \widehat{L[s]}\hat{\xi}(\mathcal{R}^!), \\
&\hat{\xi}[s] : \mathcal{L}[s] \to {}^{\mathrm{L}}L \text{ est l'inclusion.}
\end{aligned}
$$

Cela fournit une donnée endoscopique $(L[s], \mathcal{L}[s], s, \hat{\xi}[s])$ pour L qui est encore non ramifiée. Posons

$$\mathcal{E}_{R^!}(L) := \{s \in s_0 Z_{\hat{R}}^{\Gamma_F} / Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F} : (L[s], \mathcal{L}[s], s, \hat{\xi}[s]) \text{ est elliptique}\}.$$

C'est un ensemble fini d'après [18, §4]. Soit $s \in \mathcal{E}_{R^!}(L)$, alors on peut regarder $R^!$ comme un sous-groupe de Lévi de $L[s]$. L'endoscopie elliptique fournit l'homomorphisme $W^{L[s]}(R^!) \hookrightarrow W^L(R)$, pour lequel l'isomorphisme $\mathfrak{a}_R \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_{R^!}$ est équivariant. On sait aussi définir le coefficient

$$i_{R^!}(L, L[s]) := \frac{[Z_{\widehat{R^!}}^{\Gamma_F} : Z_{\hat{R}}^{\Gamma_F}]}{[Z_{\widehat{L[s]}}^{\Gamma_F} : Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F}]}.$$

Le lemme fondamental pondéré sur les algèbres de Lie Plaçons-nous dans la construction d'Arthur. Fixons une donnée endoscopique elliptique non ramifiée $(R^!, \mathcal{R}^!, s_0, \hat{\xi})$ pour R. À cette donnée est associée une correspondance de classes de conjugaison géométriques semi-simples entre les algèbres de Lie $\mathfrak{r}(F)$ et $\mathfrak{r}^!(F)$. On définit ainsi la sous-variété ouverte des éléments L-régulières $\mathfrak{r}^!_{L-\mathrm{reg}}$ de façon usuelle.

Fixons un sous-groupe hyperspécial K de $L(F)$ en bonne position relativement à R, ce qui détermine un réseau hyperspécial $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{l}(F)$. Fixons aussi une forme quadratique définie positive $W^L(R)$-invariante sur $\mathfrak{a}_R$; on obtient ainsi une forme quadratique définie positive sur $\mathfrak{a}_{R^!}$ qui est $W^{L[s]}(R^!)$-invariante pour tout $s \in \mathcal{E}_{R^!}(L)$. Notons $\mathbb{1}_{\mathfrak{k}}$ la fonction caractéristique de $\mathfrak{k}$. Ces choix permettent de définir les intégrales orbitales pondérées de $\mathbb{1}_{\mathfrak{k}}$

$$r^L_{R,K}(X) := |D^L(X)|^{\frac{1}{2}} \int\limits_{L_X(F)\backslash L(F)} \mathbb{1}_{\mathfrak{k}}(x^{-1}Xx)v_R(x)\,\mathrm{d}x, \qquad X \in \mathfrak{r}_{\mathrm{reg}}(F),$$

où $D^L(X) := \det(\mathrm{ad}\,(X)|\mathfrak{l}/\mathfrak{l}_X)$. Les mesures de Haar sont choisies comme dans le §4.2.

On définit le facteur de transfert

$$\Delta : \mathfrak{r}^!_{R-\mathrm{reg}}(F) \times \mathfrak{r}_{\mathrm{reg}}(F) \to \mathbb{C}$$

qui est adapté à K, cf. [84, 4.7]. On définit les intégrales orbitales pondérées endoscopiques

$$r^L_{R^!,K}(Y) = \sum_{X \in \mathfrak{r}(F)/\mathrm{conj}} \Delta(Y,X) r^L_{R,K}(X),$$

ainsi que les fonctions stabilisées $s^{L[s]}_{R^!}(Y)$, pour tout $Y \in \mathfrak{r}^!_{L-\mathrm{reg}}(F)$ et tout $s \in \mathcal{E}_{R^!}(L)$ (voir [85] ou §4). Énonçons le lemme fondamental pondéré comme suit.

Théorème 5.1.1 (Chaudouard, Laumon [29, 30], Waldspurger [86])**.** *Pour tout $Y \in \mathfrak{r}^!_{R-reg}(F)$, on a*

$$r^L_{R^!,K}(Y) = \sum_{s \in \mathcal{E}_{R^!}(L)} i_{R^!}(L, L[s]) s^{L[s]}_{R^!}(Y).$$

5.2 Exemples

Nous allons considérer l'endoscopie elliptique des groupes linéaires généraux, symplectiques et unitaires. Nous en donnerons les conditions pour que la donnée endoscopique soit non ramifiée et la construction d'Arthur sera explicitement décrite. Le cas non elliptique sera traité dans 5.2.4.

Exemple 5.2.1. Soient $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $R := \mathrm{GL}(m)$. La seule donnée endoscopique elliptique pour $\mathrm{GL}(m)$ à isomorphisme près est la donnée tautologique $(R, {}^{\mathrm{L}}R, 1, \mathrm{id})$.

Exemple 5.2.2. Soit $R := \mathrm{Sp}(2m)$. Alors $\hat{R} = \mathrm{SO}(2m+1, \mathbb{C})$. Soit $(R^!, \mathcal{R}^!, s, \hat{\xi})$ une donnée endoscopique elliptique pour R. Les valeurs propres de s sont forcément ± 1 d'après l'ellipticité. Notons $2m'+1$ la multiplicité de $+1$ et $2m''$ celle de -1. On a

$$\widehat{R^!} = \mathrm{SO}(2m'+1, \mathbb{C}) \times \mathrm{SO}(2m'', \mathbb{C}).$$

Donc

$$R^! = \mathrm{Sp}(2m') \times \mathrm{SO}(V'', q'')$$

où (V'', q'') est un F-espace quadratique de dimension $2m''$ ayant noyau anisotrope de dimension ≤ 2 car $R^!$ est quasi-déployé. On exclut le cas $\dim V'' = 2$ et (V'', q'') hyperbolique, pour lequel la donnée endoscopique n'est plus elliptique. De plus, $\mathrm{SO}(V'', q'')$ détermine $\mathcal{H}^!$.

Inversement, toutes données m' et (V'', q'') comme ci-dessus proviennent d'une donnée endoscopique elliptique, unique à isomorphisme près. La donnée endoscopique est non ramifiée si et seulement si (V'', q'') admet un réseau autodual à homothétie près.

Supposons $R^!$ de la forme ci-dessus. Soient $X \in \mathfrak{r}_{\mathrm{reg}}(F)$, $Y = (Y', Y'') \in \mathfrak{r}^!_{\mathrm{reg}}(F)$, alors X et Y se correspondent si et seulement s'ils se correspondent par valeurs propres, c'est-à-dire

– les valeurs propres de Y' sont $\pm a'_1, \ldots, \pm a'_{m'}$;
– celles de Y'' sont $\pm a''_1, \ldots, \pm a'_{m''}, 0$;
– celles de X sont $\pm a'_1, \ldots, \pm a'_{m'}, \pm a''_1, \ldots, \pm a''_{m''}$.

Prenons maintenant un ensemble fini I, $(n_i)_{i\in I} \in \mathbb{Z}^I_{\geq 1}$, et

$$\begin{aligned} L &= \mathrm{Sp}(2n), \\ R &= \prod_{i\in I} \mathrm{GL}(n_i) \times \mathrm{Sp}(2m), \\ R^! &= \prod_{i\in I} \mathrm{GL}(n_i) \times \mathrm{Sp}(2m') \times \mathrm{SO}(V'', q''), \end{aligned}$$

tels que $m + \sum_{i\in I} n_i = n$, où m, m' et (V'', q'') vérifient les conditions précédentes, qui font de $R^!$ un groupe endoscopique elliptique non ramifiée de R (tautologique en les composantes $\mathrm{GL}(n_i)$). À isomorphisme près, l'élément s_0 correspondant dans la donnée endoscopique est de la forme

$$s_0 = ((1)_{i\in I}, s_0^\flat) \in \prod_{i\in I} \mathbb{C}^\times \times \mathrm{SO}(2m+1, \mathbb{C}) \subset \hat{R}.$$

Les éléments $s \in \mathcal{E}_{R^!}(L)$ sont en bijection avec les décompositions $I = I' \sqcup I''$: à une telle décomposition est associée $s = ((s_i)_{i\in I}, s_0^\flat)$ avec $s_i = 1$ (resp. $s_i = -1$) si $i \in I'$ (resp. si $i \in I''$). Soit $s \in \mathcal{E}_{R^!}(L)$, on introduit le groupe endoscopique elliptique $L[s]$ de L ; écrivons-le comme

$$L[s] = \mathrm{Sp}(2n') \times \mathrm{SO}(U'', r'')$$

d'après ce qui précède. On a des inclusions uniques à conjugaison près :

$$\begin{aligned} \prod_{i\in I'} \mathrm{GL}(n_i) \times \mathrm{Sp}(2m') &\hookrightarrow \mathrm{Sp}(2n'), \\ \prod_{i\in I''} \mathrm{GL}(n_i) \times \mathrm{SO}(V'', q'') &\hookrightarrow \mathrm{SO}(U'', r''). \end{aligned}$$

Ces flèches font de $R^!$ un sous-groupe de Lévi de $L[s]$. Ainsi, $\mathrm{SO}(U'', r'')$ est aussi déterminé : à homothétie près, (U'', r'') et (V'', q'') ont le même noyau anisotrope.

Inversement, tout (U'', r'') ayant le même noyau anisotrope que (V'', q''), pris à homothétie près, provient d'un unique $s \in \mathcal{E}_{R^!}(L)$.

Exemple 5.2.3. Soient E/F une extension quadratique et $R := \mathrm{U}_{E/F}(m)$, le groupe unitaire quasi-déployé qui est isomorphe à $\mathrm{GL}(m)$ sur E. On a $\hat{R} = \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$. Il est muni de l'action du groupe $\Gamma_{E/F} := \Gamma_F/\Gamma_E$: l'élément non trivial dans $\Gamma_{E/F}$ opère, modulo automorphismes intérieurs, en renversant le diagramme de Dynkin $\mathbf{A}_{m-1}$. On introduit ainsi le L-groupe ${}^{\mathrm{L}}R$.

Décrivons les données endoscopiques elliptiques $(R^!, \mathcal{R}^!, s, \hat{\xi})$ pour R. Les valeurs propres de s sont ± 1 ; notons m' la multiplicité de 1 et m'' celle de -1. Alors

$$\widehat{R^!} = \mathrm{GL}(m', \mathbb{C}) \times \mathrm{GL}(m'', \mathbb{C}).$$

Étant donné (m', m''), il n'y a qu'une seule possibilité de $R^!$ et de $\mathcal{R}^!$:

$$R^! = \mathrm{U}_{E/F}(m') \times \mathrm{U}_{E/F}(m'').$$

Inversement, toute donnée endoscopique elliptique de R s'obtient d'une paire (m', m'') telle que $m' + m'' = m$, unique à la symétrie $(m', m'') \mapsto (m'', m')$ près. La donnée endoscopique est non ramifiée si et seulement si E/F l'est.

La correspondance des classes de conjugaison est similaire au cas du groupe symplectique, c'est-à-dire la correspondance par valeurs propres des applications E-linéaires. Nous ne la répétons pas.

Supposons maintenant que E/F est non ramifiée. Prenons $I, (n_i)_{i\in I}$ comme dans 5.2.2 et posons

$$\begin{aligned} L &= \mathrm{U}_{E/F}(n), \\ R &= \prod_{i\in I} \mathrm{GL}_E(n_i) \times \mathrm{U}_{E/F}(m), \\ R^! &= \prod_{i\in I} \mathrm{GL}_E(n_i) \times \mathrm{U}_{E/F}(m') \times \mathrm{U}_{E/F}(m''), \end{aligned}$$

qui font de $R^!$ un groupe endoscopique elliptique non ramifiée de R. On peut supposer que l'élément s_0 de cette donnée endoscopique s'écrit

$$s_0 = ((1)_{i\in I}, s_0^\flat) \in \prod_{i\in I} \mathbb{C}^\times \times \mathrm{GL}(m, \mathbb{C}).$$

Comme dans 5.2.2, les éléments $s \in \mathcal{E}_{R^!}(L)$ sont en bijection avec les décompositions $I = I' \sqcup I''$; le groupe endoscopique elliptique associé est de la forme

$$L[s] = \mathrm{U}_{E/F}(n') \times \mathrm{U}_{E/F}(n'').$$

On a des inclusions bien déterminées à conjugaison près :

$$\begin{aligned} \prod_{i\in I'} \mathrm{GL}_E(n_i) \times \mathrm{U}_{E/F}(m') &\hookrightarrow \mathrm{U}_{E/F}(n'), \\ \prod_{i\in I''} \mathrm{GL}_E(n_i) \times \mathrm{U}_{E/F}(m'') &\hookrightarrow \mathrm{U}_{E/F}(n''). \end{aligned}$$

Cela détermine aussi (n', n''). Remarquons que des différents choix de s peuvent induire la même donnée endoscopique pour L.

Remarque 5.2.4. En général, une donnée endoscopique $(L^!, \mathcal{L}^!, s, \hat{\xi})$ s'interprète comme une donnée endoscopique elliptique d'un sous-groupe de Lévi R de L. Le sous-groupe R est unique à conjugaison près par $L(F)$, tandis que la donnée endoscopique elliptique pour R est unique à l'action de $W^L(R)$ près.

5.3 Endoscopie non standard

Définitions Rappelons la définition dans [85, 3.7]. Soient G_1, G_2 deux F-groupes réductifs connexes et simplement connexes. Supposons qu'ils sont non ramifiés et p est suffisamment grand par rapport à G_1 et G_2. Pour $i = 1, 2$, fixons une paire de Borel (T_i, B_i) définie sur F pour G_i ; notons Σ_i, $\check{\Sigma}_i$ les ensembles de racines et coracines, respectivement. Une donnée endoscopique non standard non ramifiée est un triplet (G_1, G_2, j_*) où

- G_1, G_2 sont comme ci-dessus, munis de paires de Borel définies sur F ;
- $j_* : X_*(T_1)_{\bar{F}} \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} X_*(T_2)_{\bar{F}} \otimes \mathbb{Q}$, son transposé est noté j^* ;
- il existe des bijections $\check{\tau} : \check{\Sigma}_1 \to \check{\Sigma}_2$, $\tau : \Sigma_2 \to \Sigma_1$ et des fonctions $\check{b} : \check{\Sigma}_1 \to \mathbb{Q}_{>0} \cap \mathbb{Z}_p^\times$, $b : \Sigma_2 \to \mathbb{Q}_{>0} \cap \mathbb{Z}_p^\times$, telles que
  - τ s'identifie à $\check{\tau}^{-1}$ via les bijections naturelles $\Sigma_i \simeq \check{\Sigma}_i$, $i = 1, 2$;
  - j^* et j_* sont Γ_F-équivariants ;
  - on a $j_*(\check{\alpha}_1) = \check{b}(\check{\alpha}_1)\check{\tau}(\check{\alpha}_1)$ et $j^*(\alpha_2) = b(\alpha_2)\tau(\alpha_2)$ pour tout $\check{\alpha}_1 \in \check{\Sigma}_1$ et tout $\alpha_2 \in \Sigma_2$.

À l'instar du cas standard, ces données définissent

- une correspondance de classes de conjugaison géométriques entre $\mathfrak{g}_{1,\mathrm{reg}}(F)$ et $\mathfrak{g}_{2,\mathrm{reg}}(F)$;

– les bijections de racines induisent une correspondance de sous-groupes de Lévi semi-standards de G_1 et G_2.

Soient $M_1 \subset G_1$, $M_2 \subset G_2$ des sous-groupes de Lévi semi-standards qui se correspondent, alors $W^{G_1}(M_1) = W^{G_2}(M_2)$ et on a un isomorphisme équivariant $\mathfrak{a}_{M_1} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_{M_2}$.

Notons R_1 (resp. R_2) le sous-groupe engendré par $\check{\Sigma}_1$ (resp. $\check{\Sigma}_2$). La même définition s'applique à M_1, M_2 et leurs coracines. On définit ainsi les groupes R^{M_1}, R^{M_2}.

Soient H_1, H_2 deux sous-groupes commensurables dans un groupe fixé, adoptons la convention $[H_1 : H_2] := [H_1 : H_1 \cap H_2][H_2 : H_1 \cap H_2]^{-1}$. D'après [85, 3.7] et l'erratum [87], on définit le coefficient

$$c^{G_1,G_2}_{M_1,M_2} := \frac{[R_2^{\Gamma_F} : j_*(R_1^{\Gamma_F})]}{[R^{M_2,\Gamma_F} : j_*(R^{M_1,\Gamma_F})]}. \tag{II.5}$$

Signalons que ce coefficient dépend de j_*. Énonçons le lemme fondamental pondéré non standard comme une conjecture.

Conjecture 5.3.1 ([85]). Soient $Y_1 \in \mathfrak{m}_{1,G_1-\mathrm{reg}}(F)$ et $Y_2 \in \mathfrak{m}_{2,G_2-\mathrm{reg}}(F)$ qui se correspondent. Alors

$$s^{G_1}_{M_1}(Y_1) = c^{G_1,G_2}_{M_1,M_2} s^{G_2}_{M_2}(Y_2)$$

où les fonctions stabilisées $s^{G_i}_{M_i}$ $(i = 1, 2)$ sont définies à l'aide des formes quadratiques invariantes sur $\mathfrak{a}_{M_1}$ et $\mathfrak{a}_{M_2}$ qui se correspondent via $\mathfrak{a}_{M_1} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_{M_2}$.

Passage au quotient Pour $i = 1, 2$, soit $\pi_i : G_i \to \underline{G}_i$ une isogénie centrale ; notons $\underline{M}_i := \pi_i(M_i)$. Cela n'affecte pas les algèbres de Lie, les espaces $\mathfrak{a}_{M_i}$ et les groupes de Weyl. La correspondance de classes marche pour $\underline{G}_i, \underline{M}_i$ au lieu de G_i, M_i.

Corollaire 5.3.2. *Supposons vérifiée 5.3.1. Soient $\underline{Y}_1 \in \mathfrak{m}_{1,\underline{G}_1-\mathrm{reg}}(F)$ et $\underline{Y}_2 \in \underline{\mathfrak{m}}_{2,\underline{G}_2-\mathrm{reg}}(F)$ qui se correspondent. Alors*

$$s^{\underline{G}_1}_{\underline{M}_1}(\underline{Y}_1) = c^{G_1,G_2}_{M_1,M_2} s^{\underline{G}_2}_{\underline{M}_2}(\underline{Y}_2).$$

Démonstration. Pour $i = 1, 2$, soit $Y_i \in \mathfrak{m}_i(F)$ l'élément qui s'envoie sur $\underline{Y}_i$, alors il suffit de noter que $s^{G_i}_{M_i}(Y_i) = s^{\underline{G}_i}_{\underline{M}_i}(\underline{Y}_i)$, ce qui résulte de [85, 5.7]. □

La convention suivante sera commode. Soient G_i, M_i $(i = 1, 2)$ tels que M_i est un Lévi de G_i et que les groupes $G_{i,\mathrm{SC}}, M_{i,\mathrm{sc}}$ sont comme dans le lemme fondamental pondéré non standard 5.3.1. Nous noterons

$$c^{G_1,G_2}_{M_1,M_2} = c^{G_{1,\mathrm{SC}},G_{2,\mathrm{SC}}}_{M_{1,\mathrm{sc}},M_{2,\mathrm{sc}}}. \tag{II.6}$$

Un exemple Supposons $n \geq 1$. Fixons un ensemble fini I, $(n_i)_{i\in I} \in \mathbb{Z}^I_{\geq 1}$, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et posons $n := m + \sum_{i\in I} n_i$. Posons

$$G_1 := \mathrm{Sp}(2n), \qquad \underline{G}_2 := \mathrm{SO}(2n+1),$$
$$M_1 := \prod_{i\in I} \mathrm{GL}(n_i) \times \mathrm{Sp}(2m), \qquad \underline{M}_2 := \prod_{i\in I} \mathrm{GL}(n_i) \times \mathrm{SO}(2m+1),$$

Regardons M_1 comme un sous-groupe de Lévi de G_1 en choisissant un plongement, qui est unique à conjugaison près par $G_1(F)$. Idem pour $\underline{G}_2$ et $\underline{M}_2$. Notons $\pi : G_2 \to \underline{G}_2$ le revêtement simplement connexe, c'est-à-dire $G_2 = \mathrm{Spin}(2n+1)$, et posons $M_2 := \pi^{-1}(\underline{M}_2)$, alors M_2 et un sous-groupe de Lévi de G_2.

Comme indiqué dans [Chapitre I, §8.2], on peut choisir des F-tores maximaux déployés T_1, T_2 dans M_1, M_2 respectivement, avec $\underline{T}_2 := \pi(T_2)$, de sorte qu'il existe une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $X_*(T_1)$ telle que l'on a des identifications

$$\begin{aligned}
X_*(T_1) &= \bigoplus_{k=1}^{n} \mathbb{Z} e_k, \\
X_*(T_2) &= \left\{ \sum_{k=1}^{n} r_k e_k : \sum_{k=1}^{n} r_k \equiv 0 \mod 2 \right\}, \\
X_*(\underline{T}_2) &= \bigoplus_{k=1}^{n} \mathbb{Z} e_k.
\end{aligned}$$

En choisissant des sous-groupes de Borel convenables, les coracines se décrivent comme suit.

$$\begin{aligned}
\check{\Sigma}_1 &= \{\pm e_i \pm e_j : 1 \leq i \neq j \leq n\} \sqcup \{\pm e_i : 1 \leq i \leq n\}, \\
\check{\Sigma}_2 &= \{\pm e_i \pm e_j : 1 \leq i \neq j \leq n\} \sqcup \{\pm 2e_i : 1 \leq i \leq n\}.
\end{aligned}$$

Alors l'inclusion $X_*(T_2) \hookrightarrow X_*(\underline{T}_2)$ correspond à l'isogénie $\pi : G_2 \to \underline{G}_2$.

On prend $j_* := \mathrm{id} : X_*(T_1) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} X_*(T_2) \otimes \mathbb{Q}$. On prend les fonctions τ, $\check{\tau}$, b, $\check{b}$ qui fournissent un triplet non standard non ramifié (G_1, G_2, j_*), pour laquelle M_1 et M_2 sont des sous-groupes de Lévi semi-standards qui se correspondent.

Remarquons que le choix des divers identifications peut affecter j_*, mais la correspondance de classes et la correspondance de mesures de Haar sur $\mathfrak{a}_{M_1}$ et $\mathfrak{a}_{M_2}$ ne changent pas.

C'est plus pratique de travailler avec $\underline{G}_2$ et $\underline{M}_2$. La correspondance des classes géométriques entre $\mathfrak{g}_{1,\mathrm{reg}}(F)$ et $\underline{\mathfrak{g}}_{2,\mathrm{reg}}(F)$ est la correspondance par valeurs propres. Pour $\mathfrak{m}_1$ et $\underline{\mathfrak{m}}_2$, c'est la même correspondance pour les facteurs $\mathfrak{sp}(2m)$ et $\mathfrak{so}(2m+1)$; pour les facteurs $\mathfrak{gl}(\cdot)$, c'est la correspondance tautologique.

Le coefficient de cette donnée endoscopique non standard se calculent comme suit.

Proposition 5.3.3. *Pour cette donnée,*

$$c^{G_1, \underline{G}_2}_{M_1, \underline{M}_2} = c^{G_1, G_2}_{M_1, M_2} := \begin{cases} 1, & si\ m \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & si\ m = 0. \end{cases}$$

Démonstration. Les coracines dans $\check{\Sigma}_1$ et $\check{\Sigma}_2$ engendrent respectivement les réseaux $X_*(T_1)$ et $X_*(T_2)$. Vu les identifications ci-dessus et le choix $j_* = \mathrm{id}$, on voit que $[R_2^{\Gamma_F} : j_*(R_1^{\Gamma_F})] = \frac{1}{2}$. Soient M_1, M_2 des sous-groupes de Lévi semi-standards qui se correspondent. Alors il en est de même pour $[R^{M_2,\Gamma_F} : j_*(R^{M_1,\Gamma_F})]$ sauf si le facteur Sp (resp. SO) n'apparaît plus dans M_1 (resp. $\underline{M}_2$) i.e. sauf si $m = 0$, auquel cas on a trivialement $[R^{M_2,\Gamma_F} : j_*(R^{M_1,\Gamma_F})] = 1$. Cela permet de conclure. □

Remarque 5.3.4. Explicitons l'isomorphisme $\mathfrak{a}_{M_1} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_{M_2} = \mathfrak{a}_{\underline{M}_2}$ induit par j_*. On peut se limiter au cas $M_1 = T_1$ et $M_2 = T_2$. On a identifié T_1 et $\underline{T}_2$ dans la description de $X_*(T_i)$ $(i = 1, 2)$. Comme $j_* = \mathrm{id}$, il induit l'application $\mathrm{id} : \mathfrak{a}_{T_1} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_{\underline{T}_2}$. Le cas général en découle : si l'on identifie les composantes $\prod_{i \in I} \mathrm{GL}(n_i)$ dans M_1 et $\underline{M}_2$, alors $\mathfrak{a}_{M_1} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_{\underline{M}_2}$ est encore l'identité.

6 Descente des données endoscopiques

Le formalisme est celui du §4, mais ici les revêtements métaplectiques ne nous concernent pas. Désormais, fixons des éléments $\eta \in M(F)_{\rm ss}$, $\epsilon \in M^!(F)_{\rm ss}$ qui se correspondent. Supposons de plus que η et ϵ sont d'ordre finis premiers à p. Nous nous placerons sous l'une des deux hypothèses suivantes.

(A) $M^!_\epsilon$ est quasi-déployé.

(B) M_η et $M^!_\epsilon$ sont non ramifiés.

L'hypothèse (B) est plus forte que (A). En tout cas, écrivons $\eta = ((\eta_i)_{i\in I}, \eta^\flat)$ et $\epsilon = ((\epsilon_i)_{i\in I}, \epsilon^\flat)$. Quitte à conjuguer η et ϵ, on peut supposer que $\eta_i = \epsilon_i$ pour tout $i \in I$.

6.1 Paramétrage

Plaçons-nous sous l'hypothèse (A). Rappelons la paramétrisation des classes de conjugaison semi-simples dans [Chapitre I, §3 et §7.1]. À la classe $\mathcal{O}^M(\eta)$ sont associées $(\mathcal{O}^{\mathrm{GL}(n_i)}(\eta_i))_{i\in I}$ et les données

- K : une F-algèbre étale de dimension finie ;
- τ : une involution non triviale de K, qui est déterminée par la sous-algèbre fixée $K^\# := K^{\tau=\mathrm{id}}$;
- $a \in K^\times$ est tel que $N_{K/K^\#}(a) := a\tau(a) = 1$;
- (W_K, h_K) : une $(K, K^\#)$-forme anti-hermitienne, où on suppose que W_K est un K-module fidèle ;
- $(W_\pm, \langle|\rangle_\pm)$: deux F-espaces symplectiques.

Ces données sont soumises à la condition $\dim_F W_K + \dim_F W_+ + \dim_F W_- = 2m$. Elles sont uniques modulo la notion d'équivalence évidente. L'élément η se réalise comme l'opérateur $(w \mapsto aw, +\mathrm{id}, -\mathrm{id})$ dans l'espace $W_K \oplus W_+ \oplus W_-$.

Écrivons $\mathrm{SO}(2m'+1) = \mathrm{SO}(V', q')$ et $\mathrm{SO}(2m''+1) = \mathrm{SO}(V'', q'')$ en choisissant des F-espaces quadratiques convenables. À $\mathcal{O}^{M^!}(\epsilon)$ sont associées $(\mathcal{O}^{\mathrm{GL}(n_i)}(\epsilon_i))_{i\in I}$ et les données

- $K', K'^\#$: F-algèbres étales comme précédemment ;
- $a' \in K'^\times$ est tel que $N_{K'/K'^\#}(a) = 1$;
- (V'_K, h'_K) : une $(K', K'^\#)$-forme hermitienne, où on suppose que V'_K est un K'-module fidèle ;
- $(V'_\pm, q'_\pm)$: deux F-espaces quadratiques ;
- des objets similaires $(K'', K''^\#)$, a'', (V''_K, h''_K), $(V''_\pm, q''_\pm)$.

Ces données sont soumises aux conditions

$$\begin{gathered}(\mathrm{tr}_{K'/F})_*(V'_K, h'_K) \oplus (V'_+, q'_+) \oplus (V'_-, q'_-) \simeq (V', q'),\\ (\mathrm{tr}_{K''/F})_*(V''_K, h''_K) \oplus (V''_+, q''_+) \oplus (V''_-, q''_-) \simeq (V'', q''),\\ \dim V'_+ \equiv \dim V''_+ \equiv 1 \mod 2,\\ \dim V'_- \equiv \dim V''_- \equiv 0 \mod 2.\end{gathered}$$

Elles sont uniques modulo la notion d'équivalence évidente. Si l'on note $\eta = (\eta', \eta'')$, alors η' se réalise comme l'opérateur $(v' \mapsto a'v', +\mathrm{id}, -\mathrm{id})$ dans l'espace $V'_K \oplus V'_+ \oplus V'_-$, et η'' comme $(v'' \mapsto a''v'', +\mathrm{id}, -\mathrm{id})$ dans $V''_K \oplus V''_+ \oplus V''_-$. La correspondance entre η et ϵ entraîne que

$$\begin{gathered}(K', K'^\#, a') \times (K'', K''^\#, -a'') \simeq (K, K^\#, a),\\ W_K \simeq V'_K \oplus V''_K \quad \text{comme } K-\text{modules},\\ \dim_F W_+ + 1 = \dim_F V'_+ + \dim_F V''_-,\\ \dim_F W_- + 1 = \dim_F V'_- + \dim_F V''_+,\end{gathered}$$

où le produit de triplets dans la première condition est pris au sens évident.

On sait aussi décrire les commutants connexes.

$$\begin{aligned} M_\eta &= \prod_{i\in I} \mathrm{GL}(n_i)_{\eta_i} \times \mathrm{U}_{K/K^\#}(W_K, h_K) \times \mathrm{Sp}(W_+) \times \mathrm{Sp}(W_-), \\ M^!_\epsilon &= \prod_{i\in I} \mathrm{GL}(n_i)_{\epsilon_i} \\ &\quad \times \mathrm{U}_{K'/K'^\#}(V'_K, h'_K) \times \mathrm{U}_{K''/K''^\#}(V''_K, h''_K) \\ &\quad \times \mathrm{SO}(V'_+, q'_+) \times \mathrm{SO}(V''_-, q''_-) \\ &\quad \times \mathrm{SO}(V''_+, q''_+) \times \mathrm{SO}(V'_-, q'_-). \end{aligned}$$

D'après nos hypothèses, $\mathrm{SO}(V'_+, q'_+)$ et $\mathrm{SO}(V''_+, q''_+)$ sont déployés.

Définition 6.1.1. Soit L un F-groupe réductif admettant une décomposition

$$L = L_0 \times \prod_a \mathrm{SO}(2a+1),$$

où a parcourt des entiers positifs et L_0 ne contient aucun facteur direct de type SO impair déployé. On notera

$$\bar{L} := L_0 \times \prod_a \mathrm{Sp}(2a).$$

Les groupes que l'on rencontrera dans cette section sont tous de ce type. Remarquons aussi que $Z^{\Gamma_F}_{\widehat{\bar{L}}} \hookrightarrow Z^{\Gamma_F}_{\hat{L}}$, $Z^{\Gamma_F,0}_{\widehat{\bar{L}}} \xrightarrow{\sim} Z^{\Gamma_F,0}_{\hat{L}}$, et $\mathfrak{a}_L = \mathfrak{a}_{\bar{L}}$.

Avec cette convention, on a

$$\begin{aligned} \overline{M^!_\epsilon} &= \prod_{i\in I} \mathrm{GL}(n_i)_{\epsilon_i} \\ &\quad \times \mathrm{U}_{K'/K'^\#}(V'_K, h'_K) \times \mathrm{U}_{K''/K''^\#}(V''_K, h''_K) \\ &\quad \times \mathrm{Sp}(\overline{V'_+}) \times \mathrm{SO}(V''_-, q''_-) \\ &\quad \times \mathrm{Sp}(\overline{V''_+}) \times \mathrm{SO}(V'_-, q'_-), \end{aligned}$$

où $\overline{V'_+}$, $\overline{V''_+}$ ont les bonnes dimensions et sont munis de formes symplectiques.

6.2 Des nouvelles données endoscopiques

Conservons toujours l'hypothèse (A) et les notations précédentes. On munit M_η d'une donnée de L-groupe de sorte que le tore maximal $\hat{T}$ dans $\widehat{M_\eta}$ est ce que l'on a fixé dans la donnée de L-groupe pour M. Les actions galoisiennes sur $\hat{T}$ héritées de $\widehat{M_\eta}$ et de $\hat{M}$ peuvent différer par un 1-cocycle $\Gamma_F \to N_{\hat{M}}(\hat{T})$. Toutefois l'inclusion $Z_{\hat{M}} \hookrightarrow Z_{\widehat{M_\eta}}$ est Γ_F-équivariante et est indépendante de tout choix. On a aussi $\mathfrak{a}_M \hookrightarrow \mathfrak{a}_{M_\eta}$.

Vu 5.2.2, 5.2.3 et 5.2.4, $\overline{M^!_\epsilon}$ est un sous-groupe endoscopique de M_η, ce qui détermine la donnée endoscopique $(\overline{M^!_\epsilon}, \overline{\mathcal{M}}^!_\epsilon, \bar{s}_0, \hat{\xi})$ à isomorphisme près. La donnée endoscopique $(\overline{M^!_\epsilon}, \overline{\mathcal{M}}^!_\epsilon, \bar{s}_0, \hat{\xi})$ est non ramifiée sous l'hypothèse (B).

Lemme 6.2.1. *Soient $X \in \mathfrak{m}_{\eta,\mathrm{reg}}(F)$, $Y \in \mathfrak{m}^!_{\epsilon,\mathrm{reg}}(F)$. Soit $\bar{Y} \in \overline{\mathfrak{m}^!_{\epsilon,\mathrm{reg}}}(F)$ tel que Y et $\bar{Y}$ se correspondent par valeurs propres.*

Si $\delta = \exp(X)\eta \in M(F)$ et $\gamma = \exp(Y)\epsilon \in M^!(F)$ sont des décompositions de Jordan topologiques, et si δ correspond à γ, alors X et $\bar{Y}$ se correspondent via l'endoscopie décrite ci-dessus.

Démonstration. Lorsque $I = \emptyset$, cela est démontré dans [Chapitre I]. Le cas général en découle car l'endoscopie est tautologique en la composante $\mathrm{GL}(n_i)_{\epsilon_i} = \mathrm{GL}(n_i)_{\eta_i}$, pour tout $i \in I$. $\square$

D'après 5.2.4, il existe un Lévi R de M_η, unique à conjugaison près par $M_\eta(F)$, tel que $\overline{M^!_\epsilon}$ est un groupe endoscopique elliptique de R. Rappelons que $\hat{R}$ et $\widehat{M_\eta}$ partagent le même tore maximal $\hat{T}$. À isomorphisme près on peut supposer $\bar{s}_0 \in \hat{T}$, et $\bar{s}_0$ fait encore partie de cette donnée endoscopique elliptique pour R.

On a $R \neq M_\eta$ si et seulement si $\mathrm{U}_{K'/K'^\#}(V'_K, h'_K)$, $\mathrm{U}_{K''/K''^\#}(V''_K, h''_K)$, $\mathrm{SO}(V''_-, q''_-)$ ou $\mathrm{SO}(V'_-, q'_-)$ contiennent des facteurs $\mathrm{GL}_E(\cdot)$, où E est une certaine extension finie de F. On absorbe ces $\mathrm{GL}_E(\cdot)$ supplémentaires en introduisant les objets $\bar{I} \supset I$, $\bar{K} \subset K$, $\bar{K}' \subset K'$, etc., et on écrit

$$\begin{aligned} R &= \prod_{i \in \bar{I}} \mathrm{GL}_{F_i}(n_i)_{\eta_i} \times \mathrm{U}_{\bar{K}/\bar{K}^\#}(\bar{W}_K, \bar{h}_K) \times \mathrm{Sp}(\bar{W}_+) \times \mathrm{Sp}(\bar{W}_-), \\ \overline{M^!_\epsilon} &= \prod_{i \in \bar{I}} \mathrm{GL}(n_i)_{\epsilon_i} \\ &\quad \times \mathrm{U}_{\bar{K}'/\bar{K}'^\#}(V'_{\bar{K}}, h'_{\bar{K}}) \times \mathrm{U}_{\bar{K}''/\bar{K}''^\#}(V''_{\bar{K}}, h''_{\bar{K}}) \\ &\quad \times \mathrm{Sp}(\overline{V'_+}) \times \mathrm{SO}(\bar{V}''_-, \bar{q}''_-) \\ &\quad \times \mathrm{Sp}(\overline{V''_+}) \times \mathrm{SO}(\bar{V}'_-, \bar{q}'_-), \end{aligned}$$

Ici F_i est une extension finie de F pour tout $i \in \bar{I}$, $(\bar{K}, \bar{K}^\#)$ est une F-algèbre étale à involution qui est un facteur direct de $(K, K^\#)$, et $(\bar{W}_K, \bar{h}_K)$ est le facteur direct correspondant de (W_K, h_K) ; idem pour $(\bar{K}', \bar{K}'^\#)$, $(\bar{K}'', \bar{K}''^\#)$ etc. D'autre part $(\bar{V}''_-, \bar{q}''_-) = (\{0\}, 0)$ si (V''_-, q''_-) est de dimension 2 hyperbolique ; sinon $(\bar{V}''_-, \bar{q}''_-) = (V''_-, q''_-)$. Idem pour $(\bar{V}'_-, \bar{q}'_-)$. Supposons comme d'habitude que $\eta_i = \epsilon_i$ pour tout $i \in \bar{I}$.

Rappelons que $\bar{s}_0 \in \hat{T}$ est l'élément faisant partie de la donnée endoscopique $(\overline{M^!_\epsilon}, \overline{\mathcal{M}}^!_\epsilon, \bar{s}_0, \hat{\xi})$ pour M_η. Décrivons-le. Soit $i \in \bar{I}$, écrivons

$$\mathrm{GL}_{F_i}(n_i)_{\eta_i} = \prod_{j \in J_i} \mathrm{GL}_{F_{ij}}(n_{ij})$$

où J_i est un ensemble fini ; pour tout $j \in J_i$, F_{ij} est une extension finie de F_i. Écrivons

$$J_i = J_i^U \sqcup J_i^+ \sqcup J_i^-$$

tel que $j \in J_i^\pm$ si et seulement si la composante dans $\mathrm{GL}_{F_{ij}}(n_{ij})$ de η_i est ± 1, sinon $j \in J_i^U$.

En regardant les descriptions de R et de $\overline{M^!_\epsilon}$, il s'ensuit que l'on peut écrire

$$\bar{s}_0 = \left((\bar{s}_0^{ij})_{\substack{i \in \bar{I} \\ j \in J_i}}, \bar{s}_0^U, \bar{s}_0{}^+, \bar{s}_0{}^- \right) \in \hat{R}$$

où

$$\begin{aligned} \bar{s}_0^U &\leftrightarrow \text{le groupe endoscopique } \mathrm{U}_{\bar{K}'/\bar{K}'^\#}(V'_{\bar{K}}, h'_{\bar{K}}) \times \mathrm{U}_{\bar{K}''/\bar{K}''^\#}(V''_{\bar{K}}, h''_{\bar{K}}) \\ &\quad \text{pour } \mathrm{U}_{\bar{K}/\bar{K}^\#}(\bar{W}_K, \bar{h}_K), \\ \bar{s}_0^+ &\leftrightarrow \text{le groupe endoscopique } \mathrm{Sp}(\overline{V'_+}) \times \mathrm{SO}(\bar{V}''_-, \bar{q}''_-) \\ &\quad \text{pour } \mathrm{Sp}(\bar{W}_+), \\ \bar{s}_0^- &\leftrightarrow \text{le groupe endoscopique } \mathrm{Sp}(\overline{V''_+}) \times \mathrm{SO}(\bar{V}'_-, \bar{q}'_-) \\ &\quad \text{pour } \mathrm{Sp}(\bar{W}_-). \end{aligned}$$

Il y a aussi des restrictions sur $\bar{s}_0^{ij}$ où $i \in \bar{I} \setminus I$: joints avec $(\bar{s}_0^U, \bar{s}_0^+, \bar{s}_0^-)$, ils sont tels que

– $\mathrm{U}_{K'/K'^{\#}}(V'_K, h'_K) \times \mathrm{U}_{K''/K''^{\#}}(V''_K, h''_K)$ est un groupe endoscopique pour $\mathrm{U}_{K/K^{\#}}(W_K, h_K)$,
– $\mathrm{Sp}(\overline{V'_+}) \times \mathrm{SO}(V''_-, q''_-)$ est un groupe endoscopique pour $\mathrm{Sp}(W_+)$,
– $\mathrm{Sp}(\overline{V''_+}) \times \mathrm{SO}(V'_-, q'_-)$ est un groupe endoscopique pour $\mathrm{Sp}(W_-)$.

Il reste à traiter les composantes $\bar{s}_0^{ij}$ où $i \in I$ et $j \in J_i$. La seule condition est que $\bar{s}_0^{ij}$ appartient au centre du dual de $\mathrm{GL}_{F_{ij}}(n_{ij})$. Faisons désormais le choix suivant

$$\bar{s}_0^{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } j \in J_i^+, \\ -1, & \text{si } j \in J_i^-, \\ 1, & \text{si } j \in J_i^U. \end{cases} \tag{II.7}$$

Le symbole "-1" a un sens car $F_{ij} = F$ lorsque $j \in J_i^{\pm}$, auquel cas le dual de $\mathrm{GL}_{F_{ij}}(n_{ij})$ est $\mathrm{GL}(n_{ij}, \mathbb{C})$. Ce choix des $\bar{s}_0^{ij}$ sera justifié dans 6.3.1

6.3 Rapport avec $\mathcal{E}_{M^!}(\tilde{G})$

Dans cette sous-section, nous nous plaçons sous l'hypothèse (B). Les groupes $M^!_\epsilon$ et M_η sont tous non ramifiés, donc les données endoscopiques décrites dans le §6.2 sont non ramifiées.

Rappelons s_0 est un élément dans $\widehat{\widetilde{M}}$ qui détermine l'endoscopie elliptique pour $\tilde{M}$, dont $M^!$ est le groupe endoscopique associé. On peut supposer que

$$s_0 = ((1)_{i\in I}, s_0^\flat) \in \prod_{i\in I} \mathrm{GL}(n_i, \mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(2m, \mathbb{C}).$$

Fixons maintenant $s = s_0 t \in \mathcal{E}_{M^!}(\tilde{G})$, où $t \in Z^0_{\widehat{\widetilde{M}}}/Z^0_{\widehat{\widetilde{G}}}$ est de la forme

$$t = ((t_i)_{i\in I}, 1) \in \prod_{i\in I}\{\pm 1\} \times \mathrm{Sp}(2m, \mathbb{C}),$$

comme dans 3.3.2, auquel est associée une décomposition $I = I' \sqcup I''$ telle que $i \in I'$ (resp. $i \in I''$) si $t_i = +1$ (resp. $t_i = -1$).

La recette du §6.1 marche aussi pour $\eta \in G(F)$. Nous nous contentons de décrire G_η :

$$G_\eta = \mathrm{U}_{\mathcal{K}/\mathcal{K}^{\#}}(W_{\mathcal{K}}, h_{\mathcal{K}}) \times \mathrm{Sp}(\mathcal{W}_+) \times \mathrm{Sp}(\mathcal{W}_-)$$

avec des notations compréhensibles. Il contient M_η comme un sous-groupe de Lévi.

D'autre part, introduisons $\epsilon[s] \in M^!(F)$, c'est encore d'ordre fini premier à p et on a $M^!_\epsilon = M^!_{\epsilon[s]}$. D'après 3.3.4, $\epsilon[s]$ et η se correspondent pour la donnée endoscopique déterminée par s. Reprenons la recette du §6.1 pour écrire

$$\begin{aligned} G[s]_{\epsilon[s]} = {} & \mathrm{U}_{\mathcal{K}'/\mathcal{K}'^{\#}}(V'_{\mathcal{K}}, h'_{\mathcal{K}}) \times \mathrm{U}_{\mathcal{K}''/\mathcal{K}''^{\#}}(V''_{\mathcal{K}}, h''_{\mathcal{K}}) \\ & \times \mathrm{SO}(\mathcal{V}'_+, \mathcal{Q}'_+) \times \mathrm{SO}(\mathcal{V}''_-, \mathcal{Q}''_-) \\ & \times \mathrm{SO}(\mathcal{V}''_+, \mathcal{Q}''_+) \times \mathrm{SO}(\mathcal{V}'_-, \mathcal{Q}'_-). \end{aligned}$$

Et aussi

$$\begin{aligned} \overline{G[s]_{\epsilon[s]}} = {} & \mathrm{U}_{\mathcal{K}'/\mathcal{K}'^{\#}}(V'_{\mathcal{K}}, h'_{\mathcal{K}}) \times \mathrm{U}_{\mathcal{K}''/\mathcal{K}''^{\#}}(V''_{\mathcal{K}}, h''_{\mathcal{K}}) \\ & \times \mathrm{Sp}(\overline{\mathcal{V}'_+}) \times \mathrm{SO}(\mathcal{V}''_-, \mathcal{Q}''_-) \\ & \times \mathrm{Sp}(\overline{\mathcal{V}''_+}) \times \mathrm{SO}(\mathcal{V}'_-, \mathcal{Q}'_-). \end{aligned}$$

C'est un groupe endoscopique non ramifié de G_η et il contient $\overline{M^!_\epsilon}$ comme un sous-groupe de Lévi, l'inclusion étant bien déterminée à conjugaison près. Il fait partie d'une donnée endoscopique non ramifiée $(\overline{G[s]_{\epsilon[s]}}, \overline{\mathcal{G}[s]_{\epsilon[s]}}, \bar{s}, \hat{\xi})$ qui est unique à isomorphisme près. Indiquons que la condition (II.7) sur $\bar{s}$ est vide dans ce cas.

On a déjà décrit $\bar{s}$ et $\bar{s}_0$ dans le §6.2. Nous nous proposons d'exprimer $\bar{s}$ en termes de t et $\bar{s_0}$. Rappelons que les données de L-groupes pour M et M_η sont choisies de sorte que $\hat{M}$ et $\widehat{M_\eta}$ partagent le même tore maximal $\hat{T}$, qui fait partie de la paire de Borel Γ_F-stable dans les données de L-groupe. L'inclusion $Z_{\hat{M}} \hookrightarrow Z_{\widehat{M_\eta}}$ est bien définie et Γ_F-équivariante. Faisons la même construction pour G et G_η par rapport au même tore maximal $\hat{T}$ de façon compatible. On a

$$\bar{s}_0, \bar{s} \in \hat{T}. \tag{II.8}$$

On obtient ainsi l'homomorphisme

$$\tau : Z^0_{\widehat{\widetilde{M}}}/Z^0_{\widehat{\widetilde{G}}} \to Z_{\hat{M}}/Z_{\hat{G}} \to Z^{\Gamma_F}_{\widehat{M_\eta}}/Z^{\Gamma_F}_{\widehat{G_\eta}}. \tag{II.9}$$

Lemme 6.3.1. *Quitte à changer $\bar{s}$ par un isomorphisme des données endoscopiques, on a $\bar{s} = \bar{s}_0\tau(t)$.*

Démonstration. La torsion $\epsilon \mapsto \epsilon[s]$ n'affecte que les composantes $\mathrm{GL}(n_i)$ de $M^!$. En comparant la paramétrisation de $\epsilon[s]$ dans $M^!$ et dans $G[s]$, on voit que l'inclusion $\overline{M^!_\epsilon} \hookrightarrow \overline{G[s]_{\epsilon[s]}}$ est de la forme

$$\begin{aligned}
\mathrm{U}_{K'/K'^\#}(V'_K, h'_K) &\hookrightarrow \mathrm{U}_{\mathcal{K}'/\mathcal{K}'^\#}(V'_{\mathcal{K}}, h'_{\mathcal{K}}),\\
\mathrm{U}_{K''/K''^\#}(V''_K, h''_K) &\hookrightarrow \mathrm{U}_{\mathcal{K}''/\mathcal{K}''^\#}(V''_{\mathcal{K}}, h''_{\mathcal{K}}),\\
\mathrm{Sp}(\overline{V'_+}) &\hookrightarrow \mathrm{Sp}(\overline{\mathcal{V}'_+}),\\
\mathrm{SO}(V''_-, q''_-) &\hookrightarrow \mathrm{SO}(\mathcal{V}''_-, \mathcal{Q}''_-),\\
\mathrm{Sp}(\overline{V''_+}) &\hookrightarrow \mathrm{Sp}(\overline{\mathcal{V}''_+}),\\
\mathrm{SO}(V'_-, q'_-) &\hookrightarrow \mathrm{SO}(\mathcal{V}'_-, \mathcal{Q}'_-).
\end{aligned}$$

Pour tout $i \in \bar{I} \setminus I$, ces flèches déterminent aussi les inclusions des composantes $\mathrm{GL}_{F_{ij}}(n_{ij})$ dans $\overline{G[s]_{\epsilon[s]}}$. Décomposons $\hat{T}$ et $\bar{s}$ selon la décomposition de R

$$\hat{T} = \prod_{\substack{i\in\bar{I},\\ j\in J_i}} \hat{T}^{ij} \times \hat{T}^U \times \hat{T}^+ \times \hat{T}^-;$$

$$\bar{s} = ((\bar{s}^{ij})_{i,j}, \bar{s}^U, \bar{s}^+, \bar{s}^-).$$

Les inclusions précédentes affirment que l'on peut supposer que, quitte à changer la donnée endoscopique de G_η par un isomorphisme, on a

$$\begin{gathered}
\bar{s}^U = \bar{s}_0^U, \ \bar{s}^+ = \bar{s}_0^+, \ \bar{s}^- = \bar{s}_0^-,\\
\bar{s}^{ij} = \bar{s}_0^{ij}, \quad \text{si } i \in \bar{I} \setminus I.
\end{gathered}$$

Ce sont exactement les composantes correspondantes de $\bar{s}_0\tau(t)$. Il reste donc à considérer les composantes dans $\hat{T}^{ij}$ où $i \in I$. Écrivons $\tau(t) = ((\tau(t)^{ij})_{i,j}, 1, 1, 1)$ suivant la décomposition ci-dessus de $\hat{T}$.

Pour tout (i, j), $\mathrm{GL}_{F_{ij}}(n_{ij})$ se plonge dans un unique facteur dans la décomposition de $\overline{G[s]_{\epsilon[s]}}$ selon i et la restriction de $\epsilon[s]$ sur $\mathrm{GL}_{F_{ij}}(n_{ij})$. Soit $i \in I'$, alors $\tau(t)^{ij} = 1$ pour tout $j \in J_i$. Rappelons aussi la définition (II.7). Sur le facteur $\mathrm{GL}_{F_{ij}}(n_{ij})$, on a :

j	ϵ	$\epsilon[s]$	$\bar{s}_0^{ij}$	inclusion	$\bar{s}^{ij}$
J_i^+	1	1	1	$\mathrm{GL}_{F_{ij}}(n_{ij}) \hookrightarrow \mathrm{Sp}(\overline{\mathcal{V}'_+})$	1
J_i^-	-1	-1	-1	$\mathrm{GL}_{F_{ij}}(n_{ij}) \hookrightarrow \mathrm{SO}(\mathcal{V}'_-, \mathcal{Q}'_-)$	-1
J_i^U	$\neq \pm 1$	$\neq \pm 1$	1	$\mathrm{GL}_{F_{ij}}(n_{ij}) \hookrightarrow \mathrm{U}_{\mathcal{K}'/\mathcal{K}'^{\#}}(V'_{\mathcal{K}}, h'_{\mathcal{K}})$	1

Soit $i \in I''$, alors $\tau(t)^{ij} = -1$ pour tout $j \in J_i$. Sur le facteur $\mathrm{GL}_{F_{ij}}(n_{ij})$, on a :

j	ϵ	$\epsilon[s]$	$\bar{s}_0^{ij}$	inclusion	$\bar{s}^{ij}$
J_i^+	1	-1	1	$\mathrm{GL}_{F_{ij}}(n_{ij}) \hookrightarrow \mathrm{SO}(\mathcal{V}''_-, \mathcal{Q}''_-)$	-1
J_i^-	-1	1	-1	$\mathrm{GL}_{F_{ij}}(n_{ij}) \hookrightarrow \mathrm{Sp}(\overline{\mathcal{V}''_+})$	1
J_i^U	$\neq \pm 1$	$\neq \mp 1$	1	$\mathrm{GL}_{F_{ij}}(n_{ij}) \hookrightarrow \mathrm{U}_{\mathcal{K}''/\mathcal{K}''^{\#}}(V''_{\mathcal{K}}, h''_{\mathcal{K}})$	-1

où la colonne $\bar{s}^{ij}$ signifie un choix loisible des $\bar{s}^{ij} \in \hat{T}^{ij}$, ce que l'on fixe.

On voit ainsi qu'en tout cas, on a $\bar{s}_0^{ij}\tau(t)^{ij} = \bar{s}^{ij}$. □

On peut aussi regarder $\tau(t)$ comme un élément dans $Z_{\hat{R}}^{\Gamma_F}/Z_{\widehat{G_\eta}}^{\Gamma_F}$. Ledit lemme permet d'appliquer la construction d'Arthur dans la situation

$$\begin{tikzcd} & G_\eta \\ \overline{M^!_\epsilon} \arrow[r, dashed, "\text{endo.ell}"] & R \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

avec $\bar{s} = \bar{s}_0\tau(t) \in \bar{s}_0 Z_{\hat{R}}^{\Gamma_F}/Z_{\widehat{G_\eta}}^{\Gamma_F}$. On construit ainsi une donnée endoscopique non ramifiée pour G_η déterminée par le groupe endoscopique $G_\eta[\bar{s}]$, qui est éventuellement non elliptique.

Lemme 6.3.2. *La construction d'Arthur utilisant $\bar{s}$ et la descente en (ϵ, η) fournissent la même donnée endoscopique pour G_η : on a $G_\eta[\bar{s}] \simeq \overline{G[s]_{\epsilon[s]}}$.*

Démonstration. Les groupes en question sont des groupes endoscopiques non ramifiés pour G_η, un produit direct des groupes considérés dans le §5.2 à restriction des scalaires près. De plus, 6.3.1 entraîne qu'ils sont associés au même élément $\bar{s} \in \hat{T}$. Or tous les deux contiennent le même Lévi $\overline{M^!_\epsilon}$, donc sont isomorphes d'après la remarque sur les noyaux anisotropes dans 5.2.2. □

6.4 Une généralisation

On aura aussi besoin de considérer le cas général $s \in s_0 Z^0_{\widehat{\tilde{M}}}/Z^0_{\hat{\tilde{G}}}$. Montrons comment le ramener au cas $s \in \mathcal{E}_{M^!}(\tilde{G})$.

Rappelons que l'application $\gamma \mapsto \gamma[s]$ sur $M^!(F)$ est définie dans le cas général où $\tilde{G}$ est de type métaplectique et $s = s_0 t \in s_0 Z^0_{\widehat{\tilde{M}}}/Z^0_{\hat{\tilde{G}}}$ (voir 3.3.3). On définit ainsi les éléments $\bar{s}, \bar{s}_0 \in \hat{T}$ en combinant les résultats dans le §6.2 et la descente des données endoscopiques pour $\mathrm{GL}(\cdot)$, qui est simple.

On dispose encore de l'homomorphisme

$$\tau : Z^0_{\widehat{\tilde{M}}}/Z^0_{\hat{\tilde{G}}} \to Z^{\Gamma_F}_{\widehat{M_\eta}}/Z^{\Gamma_F}_{\widehat{G_\eta}}.$$

Ainsi, on formule les analogues de 6.3.1 et 6.3.2 dans ce cadre, avec les mêmes notations. Le bilan est que les assertions de 6.3.1 et 6.3.2 sont encore valables dans cette situation.

Proposition 6.4.1. *Quitte à changer $\bar{s}$ par un isomorphisme de données endoscopiques pour G_η, on a $\bar{s} = \bar{s}_0\tau(t)$. De plus, la construction d'Arthur utilisant $\bar{s}$ et la descente fournissent la même donnée endoscopique pour G_η : on a $G_\eta[\bar{s}] \simeq \overline{G[s]_{\epsilon[s]}}$.*

Démonstration. Procédons pas à pas. Il convient de remarquer que l'élément $z[s]$ est défini dans 3.3.3 suivant le même schéma.

1. Supposons $\tilde{G}$ de type métaplectique et $s \in \mathcal{E}_{M^!}(\tilde{G})$. Alors on se ramène au cas $\tilde{G} = \widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$, qui est déjà traité, et au cas $\tilde{G} = \mathrm{GL}(n) \times \mu_8$, qui est simple.
2. Supposons $\tilde{G} = \widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ mais $s \in s_0 Z^0_{\widehat{\widetilde{M}}}/Z^0_{\widehat{\widetilde{G}}}$ est quelconque. Alors 3.1.8 affirme qu'il existe $G_1 \in \mathcal{L}^G(M)$ tel que $G[s] = G_1[s]$ et $s \in \mathcal{E}_{M^!}(\tilde{G}_1)$. On peut aussi supposer que $\eta \in G_1(F)$. L'étape précédente est alors applicable à $\tilde{G}_1$.
   Posons $\bar{s} := \bar{s}_0\tau(t)$. Après descente en (ϵ, η), on s'est ramené à la situation

(II.10)
$$\begin{tikzcd}
\overline{G[s]_{\epsilon[s]}} \arrow[d, equal] & & G_\eta \\
\overline{G_1[s]_{\epsilon[s]}} \arrow[r, "\sim"] & G_{1,\eta}[\bar{s}] \arrow[r, dashed, "\text{endo.}", "\bar{s}=\bar{s}_0\tau(t)"'] & G_{1,\eta} \arrow[u, hook, "\text{Lévi}"'] \\
& \overline{M^!_\epsilon} \arrow[u, hook, "\text{Lévi}"] \arrow[r, dashed, "\text{endo.ell.}", "\bar{s}_0"'] & R \arrow[u, hook, "\text{Lévi}"']
\end{tikzcd}\ .$$

Montrons que

(II.11)
$$Z_{\widehat{G_\eta}}(\bar{s}) \subset \widehat{G_{1,\eta}}.$$

Écrivons

$$\begin{aligned}
G &= \mathrm{Sp}(W), \\
G_1 &= \prod_{k \in I^\natural} \mathrm{GL}(n_k^\natural) \times \mathrm{Sp}(W^\natural), \\
M &= \prod_{i \in I} \mathrm{GL}(n_i) \times \mathrm{Sp}(W^\flat), \\
M^! &= \prod_{i \in I} \mathrm{GL}(n_i) \times \mathrm{SO}(2m'+1) \times \mathrm{SO}(2m''+1).
\end{aligned}$$

Posons $2n := \dim_F W$, $2m^\natural := \dim_F W^\natural$ et $2m := \dim_F W^\flat$. Soient $i \in I$ et $k \in I^\natural$, écrivons $i \mapsto k$ si $\mathrm{GL}(n_i) \hookrightarrow \mathrm{GL}(n_k^\natural)$. Exprimons t selon la décomposition de $\widehat{\widetilde{G}}_1$:

$$t = ((a_k)_{k \in I^\natural}, t_0^\natural) \in \prod_{k \in I^\natural} \mathrm{GL}(n_k^\natural, \mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(2m^\natural, \mathbb{C})$$

où $a_k \in \mathbb{C}^\times \subset \mathrm{GL}(n_k^\natural, \mathbb{C})$, $a_k \neq \pm 1$ pour tout $k \in I^\natural$ et $a_k \neq a_{k'}^{\pm 1}$ si $k \neq k'$.
Rappelons que $\bar{s}_0^{ij} \in \{\pm 1\}$ pour tous $i \in I$, $j \in J_i$. Vu la description des commutants des éléments semi-simples dans les groupes classiques, il suffit de montrer que, pour tous $i, i' \in I$, $j \in J_i$, $j' \in J_{i'}$ tels que
– dans la décomposition de G_η selon les valeurs propres de η, $\mathrm{GL}_{F_{ij}}(n_{ij})$ et $\mathrm{GL}_{F_{i'j'}}(n_{i'j'})$ se plongent dans le même facteur direct,

– $i \mapsto k$, $i' \mapsto k'$,
on a $\bar{s}_0^{ij} a_k = \left(\bar{s}_0^{i'j'} a_{k'}\right)^{\pm 1}$ si et seulement si $k = k'$.

En effet, $\mathrm{GL}_{F_{ij}}(n_{ij})$ et $\mathrm{GL}_{F_{i'j'}}(n_{i'j'})$ se plongent dans le même facteur seulement s'il existe $\bullet \in \{+, -, U\}$ tel que $j \in J_i^\bullet$ et $j' \in J_{i'}^\bullet$. Cela entraîne que $\bar{s}_0^{ij} = \bar{s}_0^{i'j'}$ d'après (II.7). Donc $\bar{s}_0^{ij} a_k = \left(\bar{s}_0^{i'j'} a_{k'}\right)^{\pm 1}$ si et seulement si $a_k = a_{k'}^{\pm 1}$, si et seulement si $k = k'$. On en déduit (II.11).

Vu (II.10) et (II.11), le groupe endoscopique $\overline{G[s]_{\epsilon[s]}} = \overline{G_1[s]_{\epsilon[s]}} \simeq G_{1,\eta}[\bar{s}]$ pour G_η est associé à $\bar{s} = \bar{s}_0 \tau(t)$, d'où l'analogue de 6.3.1. Montrons que $G_\eta[\bar{s}] \simeq \overline{G[s]_{\epsilon[s]}}$. En effet, ces deux groupes endoscopiques de G_η sont tous associés à $\bar{s}$ et ils partagent le Lévi $\overline{M^!_\epsilon}$, donc sont isomorphes (cf. la démonstration de 6.3.2). D'où l'analogue de 6.3.2.

3. Le cas général : supposons $\tilde{G}$ de type métaplectique et $s \in s_0 Z^0_{\widehat{\widetilde{M}}} / Z^0_{\widehat{\tilde{G}}}$ quelconque. Écrivons $\tilde{G} = \prod_{k \in K} \mathrm{GL}(n_k) \times \widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ où $(n_k)_{k \in K} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^K$. Pour achever la preuve, il suffit de combiner l'étape précédente pour $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ avec la descente des données endoscopiques pour $\mathrm{GL}(n_k)$ pour chaque $k \in K$.

□

7 Descente des intégrales orbitales

7.1 Les fonctions combinatoires

Pour l'instant, soit G un F-groupe réductif connexe quelconque. Soit M un sous-groupe de Lévi. Fixons une forme quadratique définie positive $W^G(M)$-invariante sur $\mathfrak{a}_M$ telle que $\mathfrak{a}_M = \mathfrak{a}_M^G \oplus \mathfrak{a}_G$ est une décomposition orthogonale.

Soit $\eta \in M(F)_{\mathrm{ss}}$. Posons $\underline{G} := G_\eta$ et $\underline{M} := M_\eta$. Fixons un sous-groupe de Lévi $\underline{R}$ de $\underline{G}$ qui est inclus dans $\underline{M}$. Il existe une inclusion $\mathfrak{a}_M \hookrightarrow \mathfrak{a}_{\underline{R}}$ induite par $A_M \hookrightarrow A_{\underline{R}}$. On peut prolonger la forme quadratique choisie sur $\mathfrak{a}_M$ en une forme quadratique définie positive sur $\mathfrak{a}_{\underline{R}}$, invariante par $W^{\underline{G}}(\underline{R})$, etc.

Notons $\mathfrak{a}_{\underline{R}}^M$ le complément orthogonal de $\mathfrak{a}_M$ dans $\mathfrak{a}_{\underline{R}}$. Idem, on définit l'espace $\mathfrak{a}_{\underline{R}}^G$. Tous ces espaces héritent des formes quadratiques définies positives invariantes.

Soit $\underline{L} \in \mathcal{L}^{\underline{G}}(\underline{R})$. On a une application linéaire canonique $\Sigma : \mathfrak{a}_{\underline{R}}^M \oplus \mathfrak{a}_{\underline{R}}^{\underline{L}} \to \mathfrak{a}_{\underline{R}}^G$; ces espaces sont munis de mesures de Haar grâce aux formes quadratiques choisies précédemment. Suivant Arthur, on définit

$$d_{\underline{R}}^G(M, \underline{L}) := \begin{cases} \dfrac{\text{la mesure sur } \mathfrak{a}_{\underline{R}}^G}{\Sigma_*\left(\text{la mesure sur } \mathfrak{a}_{\underline{R}}^M \oplus \mathfrak{a}_{\underline{R}}^{\underline{L}}\right)}, & \text{si } \mathfrak{a}_{\underline{R}}^M \oplus \mathfrak{a}_{\underline{R}}^{\underline{L}} = \mathfrak{a}_{\underline{R}}^G, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que $\mathfrak{a}_{\underline{R}}^M \oplus \mathfrak{a}_{\underline{R}}^{\underline{L}} = \mathfrak{a}_{\underline{R}}^G$ si et seulement si $\mathfrak{a}_M^G \oplus \mathfrak{a}_{\underline{L}}^G = \mathfrak{a}_{\underline{R}}^G$. En effet, il suffit de prendre les compléments orthogonaux dans $\mathfrak{a}_{\underline{R}}^G$.

7.2 Descente de l'intégrale orbitale pondérée endoscopique

Conservons les notations introduites dans le §6.

Proposition 7.2.1. *Soit $\gamma \in M^!_{G\text{-reg}}(F)$. Si γ n'est pas compact, alors $r^{\tilde{G}}_{M^!,K}(\gamma) = 0$.*

Démonstration. La correspondance des classes de conjugaison préserve la compacité, et une classe de conjugaison dans $G(F)$ ne coupe pas K si elle n'est pas compacte. Donc l'assertion découle de la définition de $r^{\tilde{G}}_{M^!,K}(\gamma)$. $\square$

Supposons maintenant $\gamma \in M^!_{\text{G-reg}}(F)$ compact avec la décomposition de Jordan topologique

$$\gamma = \exp(Y)\epsilon, \qquad Y \in \mathfrak{m}^!_{\epsilon,\text{reg}}(F).$$

Comme $\gamma \mapsto r^{\tilde{G}}_{M^!,K}(\gamma)$ est invariante par conjugaison géométrique, on peut supposer que $M^!_\epsilon$ est quasi-déployé d'après [46].

D'après la correspondance des classes de conjugaison géométriques régulières dans l'endoscopie non standard §5.3 et la définition de $\overline{M^!_\epsilon}$ dans 6.1.1, on déduit une correspondance de classes de conjugaison géométriques entre $\mathfrak{m}^!_{\epsilon,\text{reg}}(F)$ et $\overline{\mathfrak{m}^!_{\epsilon,\text{reg}}}(F)$.

Proposition 7.2.2 (cf. [85, 5.4])**.** *Soit ϵ comme ci-dessus.*

1. *Si $M^!_\epsilon$ n'est pas non ramifié, alors $r^{\tilde{G}}_{M^!,K}(\gamma) = 0$.*
2. *Si $M^!_\epsilon$ est non ramifié, alors il existe $\eta \in K^M$ qui lui correspond tel que l'on peut choisir $R \subset M_\eta$ comme dans le §6.2 qui est non ramifié et*

$$r^{\tilde{G}}_{M^!,K}(\gamma) = \sum_{L \in \mathcal{L}^{G_\eta}(R)} d^G_R(M,L) r^L_{\overline{M^!_\epsilon}}(\bar{Y}),$$

où $\bar{Y} \in \overline{\mathfrak{m}^!_{\epsilon,\text{reg}}}(F)$ correspond à Y.

Démonstration. Supposons d'abord que $M^!_\epsilon$ n'est pas non ramifié. Si pour chaque $\delta \in M(F)$ correspondant à γ, la classe $\mathcal{O}^G(\delta)$ ne coupe pas K, alors $r^{\tilde{G}}_{M^!,K}(\gamma) = 0$ et l'assertion est vérifiée dans ce cas.

Supposons maintenant qu'il existe $\delta_0 \in M(F)$ correspondant à γ tel que $\mathcal{O}^G(\delta_0) \cap K \neq \emptyset$. Montrons que $\mathcal{O}^M(\delta_0) \cap K^M \neq \emptyset$. Il existe $g \in G(F)$ tel que $g\delta_0 g^{-1} \in K$. Prenons $P = MU \in \mathcal{P}^G(M)$, la décomposition d'Iwasawa permet d'écrire $g = kum$ avec $k \in K$, $u \in U(F)$ et $m \in M(F)$. Alors $um\delta_0 m^{-1}u^{-1} \in K$. Il existe $u' \in U(F)$ tel que $um\delta_0 m^{-1}u^{-1} = u'm\delta_0 m^{-1}$. Comme M est en bonne position relativement à K, on a $u' \in K$ et $m\delta_0 m^{-1} \in K^M$.

On peut donc supposer que $\delta_0 \in K^M$. Notons $\delta_0 = \exp(X_0)\eta$ la décomposition de Jordan topologique, alors $\eta \in K$ et $K_\eta := G_\eta(F) \cap K$ est un sous-groupe hyperspécial de G_η d'après [85, 5.3]. En particulier, G_η est non ramifié. Désignons $\mathfrak{k}_\eta$ le sous-réseau hyperspécial dans $\mathfrak{g}_\eta(F)$ associé à K_η. Idem, on obtient $K^M_\eta \subset M_\eta(F)$, $\mathfrak{k}^M_\eta \subset \mathfrak{m}_\eta(F)$ jouissant des mêmes propriétés.

Posons $\Xi^{M_\eta}[\bar{Y}]$ l'ensemble des classes de conjugaison dans $\mathfrak{m}_{\eta,\text{reg}}(F)$ qui correspondent à $\bar{Y}$; posons $\Xi^{M_\eta,K^M_\eta}[\bar{Y}]$ son sous-ensemble des classes coupant K^M_η. Prenons un ensemble de représentants $\dot{\Xi}^{M_\eta,K^M_\eta}[\bar{Y}]$ dans $\mathfrak{m}_\eta(F)$. Comme dans la démonstration de [Chapitre I, 5.23], l'ensemble des classes de conjugaison dans $M(F)$ qui correspondent à γ et coupent K^M a pour ensemble de représentants

$$\left\{\exp(X)\eta : X \in \dot{\Xi}^{M_\eta,K^M_\eta}[\bar{Y}]\right\}.$$

Rappelons que le Lévi $R \subset M_\eta$ choisi dans le §6.2 n'est unique qu'à conjugaison par $M_\eta(F)$ près. Comme $K_\eta \subset G_\eta(F)$ est encore en bonne position relativement à M_η, on peut prendre un F-tore déployé maximal T_0 de G_η tel que $T_0 \subset M_\eta$ et K_η correspond à un sommet hyperspécial dans l'appartement associé à T_0 dans l'immeuble de Bruhat-Tits de G_η. Quitte à conjuguer R par $M_\eta(F)$, on peut supposer que $T_0 \subset R$. Avec ce choix, $K^R := K \cap R(F)$ est un sous-groupe hyperspécial de $R(F)$.

On définit l'ensemble $\Xi^R[\bar{Y}]$ en remplaçant M_η par R dans la définition ci-dessus. L'application naturelle $\Xi^R[\bar{Y}] \to \Xi^{M_\eta}[\bar{Y}]$ est bijective d'après [85, p.154 (4)]. Prenons un ensemble de représentants $\dot{\Xi}^R[\bar{Y}]$ dans $\mathfrak{r}(F)$. Le bilan est

$$r^{\tilde{G}}_{M^!,K}(\exp(Y)\epsilon) = \sum_{X \in \dot{\Xi}^R[\bar{Y}]} \Delta(\exp(Y)\epsilon, \exp(X)\eta)\, r^{\tilde{G}}_{\tilde{M},K}(\exp(X)\eta),$$

où on regarde η comme un élément dans $\tilde{M}$ à l'aide du scindage de $\mathbf{p}$ au-dessus de K^M.

La descente semi-simple de facteur de transfert [Chapitre I, 7.23] affirme que

$$\Delta(\exp(Y)\epsilon, \exp(X)\eta) = \Delta_{\overline{M^!_\epsilon},R}(\bar{Y}, X)$$

où le terme à gauche signifie un facteur de transfert pour la donnée endoscopique elliptique pour R construite dans le §6.2, qui n'est pas forcément non ramifiée.

D'autre part, la descente d'intégrales orbitales pondérées non ramifiées [85, 4.4] s'adapte au cas métaplectique (cf. la preuve de [Chapitre I, 8.10]). Cela affirme que

$$r^{\tilde{G}}_{\tilde{M},K}(\exp(X)\eta) = \sum_{L \in \mathcal{L}^{G_\eta}(R)} d^G_R(M,L) r^L_{R,K^L}(X)$$

où $K^L := K_\eta \cap L(F)$, qui est hyperspécial dans $L(F)$. Donc

$$r^{\tilde{G}}_{M^!,K}(\gamma) = \sum_{L \in \mathcal{L}^{G_\eta}(R)} d^G_R(M,L) \left(\sum_{X \in \dot{\Xi}^R[\bar{Y}]} \Delta_{\overline{M^!_\epsilon},R}(\bar{Y}, X) r^L_{R,K^L}(\bar{Y}) \right). \tag{II.12}$$

Si $M^!_\epsilon$ n'est pas non ramifié, $\overline{M^!_\epsilon}$ ne l'est pas non plus, et le terme dans la parenthèse est nul d'après une variante d'un résultat de Kottwitz (voir [85, pp.154-155]). Alors l'assertion est vérifiée dans ce cas-là.

Il reste à traiter le cas $M^!_\epsilon$ non ramifié. Fixons un sous-groupe hyperspécial $K^!$ de $M^!$. Dans ce cas-là, quitte à remplacer γ par un conjugué géométrique, on peut supposer de plus que $\epsilon \in K^!$ d'après [84, 5.3] et [46]. Vu [Chapitre I, 8.9], il existe toujours $\delta \in M(F)$ qui correspond à γ avec la décomposition de Jordan $\delta = \exp(X)\eta$ tel que $\eta \in K^M$. Donc la formule (II.12) est valable. L'hypothèse (B) du §6 est valable et la donnée endoscopique elliptique $(\overline{M^!_\epsilon}, \ldots)$ pour R est donc non ramifiée. Le facteur de transfert descendu $\Delta_{\overline{M^!_\epsilon},R}$ est normalisé par rapport à K^R, toujours d'après [Chapitre I, 7.23]. D'où

$$\sum_{X \in \dot{\Xi}^R[\bar{Y}]} \Delta_{\overline{M^!_\epsilon},R}(\bar{Y}, X) r^L_{R,K^L}(\bar{Y}) = r^L_{\overline{M^!_\epsilon},K^L}(\bar{Y}), \quad L \in \mathcal{L}^{G_\eta}(R).$$

L'assertion en résulte en le mettant dans (II.12). □

Supposons que $M^!_\epsilon$ est non ramifié et $\eta \in K^M$ est l'élément fourni par 7.2.2 tel que η correspond à ϵ et M_η est non ramifié. Avec ce choix de (ϵ, η), posons

$$E^{\mathrm{inst}} := \{(L, \bar{s}) : L \in \mathcal{L}^{G_\eta}(R),\ d^G_R(M,L) \neq 0,\ \bar{s} \in \mathcal{E}_{\overline{M^!_\epsilon}}(L)\}. \tag{II.13}$$

Corollaire 7.2.3. *Avec les hypothèses précédentes, on a*

$$r^{\tilde{G}}_{M^!,K}(\gamma) = \sum_{(L,\bar{s}) \in E^{\mathrm{inst}}} d^G_R(M,L) i_{\overline{M^!_\epsilon}}(L, L[\bar{s}]) s^{L[\bar{s}]}_{\overline{M^!_\epsilon}}(\bar{Y})$$

où $\bar{Y} \in \overline{\mathfrak{m}^!_{\epsilon,\mathrm{reg}}}(F)$ correspond à Y.

Démonstration. Cela résulte aussitôt de 7.2.2 et du lemme fondamental pondéré sur les algèbres de Lie 5.1.1. □

7.3 Descente des fonctions stabilisées

Cette sous-section est parallèle à la précédente. Nous ne répétons plus les notations et hypothèses.

Lemme 7.3.1. *Si $\gamma \in M^!_{G-reg}(F)$ n'est pas compact, alors*

$$\sum_{s\in\mathcal{E}_{M^!}(\tilde{G})} i_{M^!}(\tilde{G}, G[s]) \cdot s^{G[s]}_{M^!}(\gamma[s]) = 0.$$

Démonstration. En fait, $s^{G[s]}_{M^!}(\gamma[s]) = 0$ pour tout s car $\gamma[s]$ n'est pas compact : cela est prouvé dans [85, 6.1]. □

Supposons désormais que $\gamma = \exp(Y)\epsilon$ est compact. Comme remarqué plus haut, on peut supposer $M^!_\epsilon$ quasi-déployé. Soit $s \in \mathcal{E}_{M^!}(\tilde{G})$, alors $\gamma[s] = \exp(Y)\epsilon[s]$ est encore une décomposition de Jordan topologique.

Pour tout $L^\epsilon \in \mathcal{L}^{G[s]_{\epsilon[s]}}(M^!_\epsilon)$, supposé muni d'une donnée de L-groupe , posons

$$e^{G[s]}_{M^!_\epsilon}(M^!, L^\epsilon) := \begin{cases} [Z^{\Gamma_F}_{\widehat{M^!}} \cap Z^{\Gamma_F}_{\widehat{L^\epsilon}} : Z^{\Gamma_F}_{\widehat{G[s]}}]^{-1} d^{G[s]}_{M^!_\epsilon}(M^!, L^\epsilon), & \text{si } d^{G[s]}_{M^!_\epsilon}(M^!, L^\epsilon) \neq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Posons

$$E^{\mathrm{st}} := \{(L^\epsilon, s) : s \in \mathcal{E}_{M^!}(\tilde{G}),\ L^\epsilon \in \mathcal{L}^{G[s]_{\epsilon[s]}}(M^!_\epsilon),\ d^{G[s]}_{M^!_\epsilon}(M^!, L^\epsilon) \neq 0\}. \tag{II.14}$$

Proposition 7.3.2. *Conservons les hypothèses précédentes.*

1. *Si $M^!_\epsilon$ n'est pas non ramifié, alors*

$$\sum_{s\in\mathcal{E}_{M^!}(\tilde{G})} i_{M^!}(\tilde{G}, G[s]) \cdot s^{G[s]}_{M^!}(\gamma[s]) = 0.$$

2. *Si $M^!_\epsilon$ est non ramifié, alors*

$$\sum_{s\in\mathcal{E}_{M^!}(\tilde{G})} i_{M^!}(\tilde{G}, G[s]) \cdot s^{G[s]}_{M^!}(\gamma[s]) = \sum_{(L^\epsilon,s)\in E^{\mathrm{st}}} i_{M^!}(\tilde{G}, G[s]) e^{G[s]}_{M^!_\epsilon}(M^!, L^\epsilon) \cdot s^{L^\epsilon}_{M^!_\epsilon}(Y).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer [85, 6.4] aux groupes $M^! \hookrightarrow G[s]$, à l'élément $\exp(Y)\epsilon[s]$, pour tout s, et noter que $M^!_\epsilon = M^!_{\epsilon[s]}$. □

7.4 Un ensemble d'indices

Plaçons-nous sous l'hypothèse (B) du §6 pour η et ϵ. Soit $s = s_0 t \in s_0 Z^0_{\widehat{\widetilde{M}}}/Z^0_{\widehat{\tilde{G}}}$. Prenons $\bar{s} = \bar{s}_0\tau(t)$ comme dans 6.4.1. Soit $L \in \mathcal{L}^{G_\eta}(R)$. Par abus de notation, on désigne l'image de $\bar{s}$ dans $\bar{s}_0 Z^{\Gamma_F}_{\hat{R}}/Z^{\Gamma_F}_{\hat{L}}$ par le même symbole $\bar{s}$.

Soit $L \in \mathcal{L}^{G_\eta}(R)$, la construction d'Arthur donne un groupe endoscopique $L[\bar{s}]$ de L ; si $L = R$ alors $L[\bar{s}] = \overline{M^!_\epsilon}$. Supposons fixé un plongement $\overline{M^!_\epsilon} \hookrightarrow G_\eta[\bar{s}]$, alors la construction d'Arthur est compatible aux sous-groupes de Lévi au sens que l'on peut regarder $L \mapsto L[\bar{s}]$ comme une application $\mathcal{L}^{G_\eta}(R) \to \mathcal{L}^{G_\eta[\bar{s}]}(\overline{M^!_\epsilon})$: le dual de $L[\bar{s}]$ s'identifie au commutant dans $\widehat{G_\eta[\bar{s}]}$ de l'image de $Z^{\Gamma_F,0}_{\hat{L}}$ dans $Z^{\Gamma_F,0}_{\widehat{\overline{M^!_\epsilon}}}$. D'après 6.4.1, on obtient

$$\mathcal{L}^{G_\eta}(R) \to \mathcal{L}^{\overline{G[s]_{\epsilon[s]}}}(\overline{M^!_\epsilon}).$$

Cette application admet une section canonique, donc est surjective : soit $\overline{L^\epsilon} \in \mathcal{L}^{\overline{G[s]_{\epsilon[s]}}}(\overline{M^!_\epsilon})$, on définit $L \in \mathcal{L}^{G_\eta}(R)$ tel que $\hat{L}$ est le commutant dans $\widehat{G_\eta}$ de l'image de $Z^{\Gamma_F,0}_{\widehat{\overline{L^\epsilon}}}$ dans $Z^{\Gamma_F,0}_{\hat{R}}$ (cf. [85, p.162 (7)]). Par construction, $\overline{L^\epsilon}$ est un groupe endoscopique elliptique de L, d'où $\mathfrak{a}_L = \mathfrak{a}_{\overline{L^\epsilon}}$ pour cette section $\overline{L^\epsilon} \mapsto L$.

Signalons que $\overline{G[s]_{\epsilon[s]}}$ est un groupe du type obtenu par la construction 6.1.1. Idem pour ses sous-groupes de Lévi. En inversant cette construction-là, on a une bijection canonique

$$\mathcal{L}^{\overline{G[s]_{\epsilon[s]}}}(\overline{M^!_\epsilon}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}^{G[s]_{\epsilon[s]}}(M^!_\epsilon).$$

Le composé est noté

(II.15)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}^{G_\eta}(R) \arrow[r] & \mathcal{L}^{\overline{G[s]_{\epsilon[s]}}}(\overline{M^!_\epsilon}) \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{L}^{G[s]_{\epsilon[s]}}(M^!_\epsilon) \\
L \arrow[r, mapsto] & L[\bar{s}] \arrow[r, mapsto] & L^\epsilon.
\end{tikzcd}$$

qui admet la section $L^\epsilon \mapsto \overline{L^\epsilon} \mapsto L$ décrite précédemment.

On a le diagramme suivant, dont toute flèche est injective et Γ_F-équivariante.

(II.16)
$$\begin{tikzcd}
& Z^0_{\widehat{\widetilde{G}}} \arrow[rrrr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & & & Z_{\widehat{G[s]}} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
Z^0_{\widehat{\widetilde{M}}} \arrow[rrrr] \arrow[dd] & & & & Z_{\widehat{M^!}} \arrow[dd] & \\
& Z_{\widehat{G_\eta}} \arrow[rr] \arrow[dl] & & Z_{\widehat{\overline{G[s]_{\epsilon[s]}}}} \arrow[rr] \arrow[dl] & & Z_{\widehat{G[s]_{\epsilon[s]}}} \arrow[dl] \\
Z_{\widehat{M_\eta}} \arrow[rr] \arrow[d] & & Z_{\widehat{\overline{M^!_\epsilon}}} \arrow[rr] \arrow[d, equal] & & Z_{\widehat{M^!_\epsilon}} & \\
Z_{\hat{R}} \arrow[rr] & & Z_{\widehat{\overline{M^!_\epsilon}}} & & &
\end{tikzcd}$$

Montrons qu'il est commutatif. En effet, la commutativité est claire sauf pour les deux grandes faces. Pour prouver que $Z^0_{\widehat{\widetilde{M}}} \to Z_{\widehat{M_\eta}} \to Z_{\widehat{\overline{M^!_\epsilon}}} \to Z_{\widehat{M^!_\epsilon}}$ coïncide avec $Z^0_{\widehat{\widetilde{M}}} \to Z_{\widehat{M^!}} \to Z_{\widehat{M^!_\epsilon}}$, il suffit de noter que le facteur $\mathrm{Sp}(2m)$ de M ne contribue pas à $Z^0_{\widehat{\widetilde{M}}}$; donc on se ramène au cas $M = \prod_{i\in I} \mathrm{GL}(n_i)$, pour lequel l'assertion devient évidente. Idem pour la grande face contenant $Z^0_{\widehat{\widetilde{G}}}$. Désormais, regardons tous ces centres comme des sous-groupes de $Z_{\widehat{\overline{M^!_\epsilon}}}$.

On a un diagramme commutatif similaire

(II.17)
$$\begin{tikzcd}
& \mathfrak{a}_G \arrow[rrrr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & & & \mathfrak{a}_{G[s]} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
\mathfrak{a}_M \arrow[rrrr, "\sim"] \arrow[dd] & & & & \mathfrak{a}_{M^!} \arrow[dd] & \\
& \mathfrak{a}_{G_\eta} \arrow[rr] \arrow[dl] & & \mathfrak{a}_{\overline{G[s]_{\epsilon[s]}}} \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dl] & & \mathfrak{a}_{G[s]_{\epsilon[s]}} \arrow[dl] \\
\mathfrak{a}_{M_\eta} \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathfrak{a}_{\overline{M^!_\epsilon}} \arrow[rr, "\sim"] \arrow[d, equal] & & \mathfrak{a}_{M^!_\epsilon} & \\
\mathfrak{a}_R \arrow[rr, "\sim"] & & \mathfrak{a}_{\overline{M^!_\epsilon}} & & &
\end{tikzcd}$$

Rappelons qu'une forme quadratique définie positive $W^G(M)$-invariante sur $\mathfrak{a}_M$ est fixée au début ; on la transfère vers $\mathfrak{a}_{M^!}$, puis on le prolonge en une forme sur $\mathfrak{a}_{M^!_\epsilon}$ vérifiant des propriétés similaires. Ainsi, on peut supposer que les formes quadratiques sur chaque espace ci-dessus s'obtiennent par ces flèches. Désormais, regardons tous ces espaces comme sous-espaces de $\mathfrak{a}_{M^!_\epsilon}$.

Pour tout $L \in \mathcal{L}^{G_\eta}(R)$, désignons par τ_L le composé

$$\tau_L : \ Z^0_{\widehat{\widetilde{M}}}/Z^0_{\widehat{\widetilde{G}}} \xrightarrow{\tau} Z^{\Gamma_F}_{\widehat{M_\eta}}/Z^{\Gamma_F}_{\widehat{G_\eta}} \longrightarrow Z^{\Gamma_F}_{\hat{R}}/Z^{\Gamma_F}_{\hat{L}}. \tag{II.18}$$

Posons $E^\natural$ l'ensemble des paires $(t, L) \in \left(Z^0_{\widehat{\widetilde{M}}}/Z^0_{\widehat{\widetilde{G}}}\right) \times \mathcal{L}^{G_\eta}(R)$ vérifiant les conditions suivantes :

(E1) $s := s_0 t \in \mathcal{E}_{M^!}(\tilde{G})$;

(E2) $\bar{s} := \bar{s}_0 \tau_L(t) \in \mathcal{E}_{\overline{M^!_\epsilon}}(L)$;

(E3) $d^G_R(M, L) \neq 0$;

(E4) $d^{G[s]}_{M^!_\epsilon}(M^!, L^\epsilon) \neq 0$.

Avec ces notations, on définit deux applications

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{st}} :& E^\natural \longrightarrow E^{\mathrm{st}}, \\ & (t, L) \longmapsto (L^\epsilon, s); \\ e^{\mathrm{inst}} :& E^\natural \longrightarrow E^{\mathrm{inst}}, \\ & (t, L) \longmapsto (L, \bar{s}). \end{aligned}$$

Lemme 7.4.1. *L'application e^{st} est bijective.*

Démonstration. Soit (L^ϵ, s) dans l'image de e^{st}. Par (E2), on a $\mathfrak{a}_L = \mathfrak{a}_{L[\bar{s}]} = \mathfrak{a}_{L^\epsilon}$, ce qui détermine le sous-espace $\mathfrak{a}_L$, donc détermine $L \in \mathcal{L}^{G_\eta}(R)$. D'autre part, l'égalité $s = s_0 t$ détermine t. D'où l'injectivité.

Soit $(L^\epsilon, s) \in E^{\mathrm{st}}$. Notons t l'élément tel que $s = s_0 t$ et L l'image de L^ϵ par la section de la suite (II.15) associée à s. Montrons que $(t, L) \in E^\natural$. En effet, la définition de E^{st} entraîne que

$$\begin{gathered} s \in \mathcal{E}_{M^!}(\tilde{G}), \\ \mathfrak{a}^{M^!}_{M^!_\epsilon} \oplus \mathfrak{a}^{L^\epsilon}_{M^!_\epsilon} = \mathfrak{a}^{G[s]}_{M^!_\epsilon}. \end{gathered}$$

qui ne sont que (E1) et (E4), respectivement.

Comme $\mathfrak{a}_L = \mathfrak{a}_{L^\epsilon}$ pour la section $L^\epsilon \mapsto L$ de (II.15), on voit que (E2) est vérifié. Enfin, (II.17) donne un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{a}^G_M \arrow[d] & + & \mathfrak{a}^G_L \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{a}^G_R \arrow[d] \\ \mathfrak{a}^{G[s]}_{M^!} & + & \mathfrak{a}^{G[s]}_{L^\epsilon} \arrow[r] & \mathfrak{a}^{G[s]}_{M^!_\epsilon}. \end{tikzcd}$$

Les flèches verticales sont des isomorphismes par ellipticité. (E4) équivaut à ce que la somme de la ligne inférieure est directe et la flèche horizontale inférieure est un isomorphisme, donc il en est de même pour la ligne supérieure, ce qui équivaut à (E3). D'où la surjectivité de e^{st}. $\square$

Lemme 7.4.2. *L'application e^{inst} est surjective, chaque fibre a $[Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F} \cap Z^0_{\widehat{\widetilde{M}}} : Z^0_{\widehat{\widetilde{G}}}]$ éléments.*

Démonstration. Soit $(L, \bar{s}) \in E^{\mathrm{inst}}$. On a $\bar{s} \in \bar{s}_0 Z_{\hat{R}}^{\Gamma_F}/Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F}$ car $Z_{\widehat{M_\eta}}^{\Gamma_F} \subset Z_{\hat{R}}^{\Gamma_F}$. On a un homomorphisme canonique

$$\tau_L^0 : Z^0_{\widehat{\widetilde{M}}}/Z^0_{\widehat{\widetilde{G}}} \to Z_{\hat{R}}^{\Gamma_F,0}/Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F,0}.$$

Comme $\mathfrak{a}_R^M \oplus \mathfrak{a}_R^L = \mathfrak{a}_R^G$, ou ce qui revient au même, $\mathfrak{a}_M^G \oplus \mathfrak{a}_L^G = \mathfrak{a}_R^G$, on déduit par dualité que $Z_{\hat{R}}^{\Gamma_F,0} = Z^0_{\widehat{\widetilde{M}}} Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F,0}$, d'où la surjectivité de τ_L^0. Signalons aussi que τ_L est le composé de τ_L^0 et $Z_{\hat{R}}^{\Gamma_F,0}/Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F,0} \to Z_{\hat{R}}^{\Gamma_F}/Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F}$.

D'après [19, Lemma 1.1], l'homomorphisme $Z_{\hat{R}}^{\Gamma_F,0}/Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F,0} \to Z_{\hat{R}}^{\Gamma_F}/Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F}$ est surjectif. Écrivons $\bar{s} = \bar{s}_0\bar{t}$ où $\bar{t} \in Z_{\hat{R}}^{\Gamma_F}/Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F}$, alors il existe $t \in Z^0_{\widehat{\widetilde{M}}}/Z^0_{\widehat{\widetilde{G}}}$ tel que $\bar{t} = \tau_L(t)$. Le nombre de choix de t est égal à $|\mathrm{Ker}\,(\tau_L)| = [Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F} \cap Z^0_{\widehat{\widetilde{M}}} : Z^0_{\widehat{\widetilde{G}}}]$. Il reste à montrer que $(t, L) \in E^\natural$.

Comme $(L, \bar{s}) \in E^{\mathrm{inst}}$, les conditions (E2) et (E3) sont automatiquement satisfaites. Posons $s = s_0 t$. Cet élément définit une donnée endoscopique pour $\tilde{G}$, éventuellement non elliptique. Contemplons le diagramme (II.17). Montrons que

$$\mathfrak{a}_{G[s]}^G \subset \mathfrak{a}_M^G \cap \mathfrak{a}_L^G. \tag{II.19}$$

Pour prouver $\mathfrak{a}_{G[s]}^G \subset \mathfrak{a}_M^G$, on utilise $\mathfrak{a}_{G[s]} \subset \mathfrak{a}_{M^!} = \mathfrak{a}_M$. Pour prouver $\mathfrak{a}_{G[s]}^G \subset \mathfrak{a}_L^G$, rappelons que $\mathfrak{a}_L = \mathfrak{a}_{L[\bar{s}]}$ par (E2) ; or $L[\bar{s}]$ est un Lévi de $\overline{G[s]_{\epsilon[s]}}$ et $\mathfrak{a}_{\overline{G[s]_{\epsilon[s]}}} = \mathfrak{a}_{G[s]_{\epsilon[s]}} \supset \mathfrak{a}_{G[s]}$, d'où l'inclusion cherchée.

On a aussi $\mathfrak{a}_{G[s]}^G \subset \mathfrak{a}_R^G$. Vu (E3), on déduit $\mathfrak{a}_{G[s]}^G = \{0\}$ de (II.19), donc (E1) est vérifié. En utilisant l'argument dans la dernière étape de la preuve de 7.4.1, on en déduit (E4). □

8 Comparaison des coefficients

8.1 Réduction

Soit $\gamma \in M^!_{G-\mathrm{reg}}(F)$.

Lemme 8.1.1. *On a $r^{\tilde{G}}_{M^!,K}(\gamma) = \sum_{s \in \mathcal{E}_{M^!}(\tilde{G})} i_{M^!}(\tilde{G}, G[s]) s^{G[s]}_{M^!}(\gamma[s]) = 0$ sauf si, à conjugaison géométrique près, γ vérifie les conditions suivantes :*
- *γ est compact avec la décomposition de Jordan topologique $\gamma = \exp(Y)\epsilon$,*
- *$M^!_\epsilon$ est non ramifié.*

En particulier, 4.2.1 est vérifié si γ ne vérifie pas les conditions ci-dessus.

Démonstration. Cela résulte de 7.2.1, 7.3.1, 7.2.2 et 7.3.2. □

Désormais, supposons que γ est compact avec la décomposition de Jordan topologique $\gamma = \exp(Y)\epsilon$ telle que $M^!_\epsilon$ est non ramifié. D'après 7.2.2, on peut choisir $\eta \in K^M$ correspondant à ϵ tel que M_η est non ramifié. On s'est ainsi ramené à la situation dans le §7.4. Conservons le formalisme-là et posons, pour $(t, L) \in E^\natural$,

$$\begin{aligned}
(L, \bar{s}) &:= e^{\mathrm{inst}}(t, L),\\
(L^\epsilon, s) &:= e^{\mathrm{st}}(t, L),\\
c^{\mathrm{inst}}(t, L) &:= d_R^G(M, L) i_{\overline{M^!_\epsilon}}(L, L[\bar{s}])[Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F} \cap Z^0_{\widehat{\widetilde{M}}} : Z^0_{\widehat{\widetilde{G}}}]^{-1},\\
c^{\mathrm{st}}(t, L) &:= e^{G[s]}_{M^!_\epsilon}(M^!, L^\epsilon) i_{M^!}(\tilde{G}, G[s])\\
&= d^{G[s]}_{M^!_\epsilon}(M^!, L^\epsilon)[Z^{\Gamma_F}_{\widehat{M^!}} \cap Z^{\Gamma_F}_{\widehat{L^\epsilon}} : Z^{\Gamma_F}_{\widehat{G[s]}}]^{-1} i_{M^!}(\tilde{G}, G[s]).
\end{aligned}$$

Indiquons que les intersections des groupes complexes sont prises à l'aide du diagramme (II.16).

Lemme 8.1.2. *Supposons vérifié le lemme fondamental pondéré non standard 5.3.1. Soit* $\gamma = \exp(Y)\epsilon$ *et* η *comme ci-dessus, où* $Y \in \mathfrak{m}^!_\epsilon(F)$. *Alors*

$$r^{\tilde{G}}_{M^!,K}(\gamma) = \sum_{(t,L)\in E^\natural} c^{\mathrm{inst}}(t,L) c^{L[\bar{s}],L^\epsilon}_{\overline{M^!_\epsilon},M^!_\epsilon}\, s^{L^\epsilon}_{M^!_\epsilon}(Y),$$

$$\sum_{s\in\mathcal{E}_{M^!}(\tilde{G})} i_{M^!}(\tilde{G},G[s]) s^{G[s]}_{M^!}(\gamma[s]) = \sum_{(t,L)\in E^\natural} c^{\mathrm{st}}(t,L)\, s^{L^\epsilon}_{M^!_\epsilon}(Y).$$

Ici nous utilisons la convention (II.6) pour le coefficient $c^{L[\bar{s}],L^\epsilon}_{\overline{M^!_\epsilon},M^!_\epsilon}$, qui sera justifiée dans la preuve.

Démonstration. On combine 7.2.2, 7.3.2, 7.4.1, 7.4.2 et le fait, noté dans [Chapitre I, §8], que $L[\bar{s}]_{\mathrm{SC}}$ et L^ϵ_{SC} font partie d'un triplet non standard. Ce triplet est un produit direct de triplets tautologiques (avec $j_* = \mathrm{id}$) ou des triplets de type $(\mathrm{Sp}(2a), \mathrm{Spin}(2a+1), j_*)$, où j_* est choisi comme dans le §5.3, par lequel $(\overline{M^!_\epsilon})_{\mathrm{sc}}$ correspond à $(M^!_\epsilon)_{\mathrm{sc}}$.

De plus, l'application $\mathfrak{a}^{L[\bar{s}]}_{\overline{M^!_\epsilon}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}^{L^\epsilon}_{M^!_\epsilon}$ induit par j_* coïncide avec celle obtenue par (II.17) (ou plutôt (II.23)). En effet, il suffit de comparer 5.3.4 et 6.1.1. Cela permet de conclure en appliquant le lemme fondamental pondéré non standard 5.3.2. $\square$

Lemme 8.1.3. *Pour tout* $(t,L) \in E^\natural$, *on a l'égalité*

$$c^{\mathrm{inst}}(t,L)c^{\mathrm{st}}(t,L)^{-1} = [Z^{\Gamma_F}_{\widehat{L^\epsilon}} \cap Z^{\Gamma_F,0}_{\widehat{M^!_\epsilon}} : Z^{\Gamma_F}_{\widehat{L[\bar{s}]}} \cap Z^{\Gamma_F,0}_{\widehat{M^!_\epsilon}}].$$

On démontrera ce résultat combinatoire dans le §8.2. En admettant 8.1.3 pour l'instant, montrons notre théorème principal.

Démonstration de 4.2.1. D'après 8.1.1 et 8.1.2, il suffit de fixer (ϵ,η) comme ce que l'on a fait dans cette section, et prouver que

$$c^{\mathrm{inst}}(t,L)^{-1}c^{\mathrm{st}}(t,L) = c^{L[\bar{s}],L^\epsilon}_{\overline{M^!_\epsilon},M^!_\epsilon} \tag{II.20}$$

pour tout $(t,L) \in E^\natural$. D'après 8.1.3,

$$c^{\mathrm{inst}}(t,L)^{-1}c^{\mathrm{st}}(t,L) = [Z^{\Gamma_F}_{\widehat{L^\epsilon}} \cap Z^{\Gamma_F,0}_{\widehat{M^!_\epsilon}} : Z^{\Gamma_F}_{\widehat{L[\bar{s}]}} \cap Z^{\Gamma_F,0}_{\widehat{M^!_\epsilon}}]^{-1}.$$

Rappelons que $L[\bar{s}] \in \mathcal{L}^{\overline{G[s]_{\epsilon[s]}}}(\overline{M^!_\epsilon})$ s'écrit sous la forme

$$\begin{tikzcd}
L[\bar{s}] \arrow[r, equal] & L_0 & \times & \mathrm{Sp}(2a) & \times & \mathrm{Sp}(2b) \\
\overline{M^!_\epsilon} \arrow[u, hook, "\text{Lévi}"] \arrow[r, equal] & M_0 \arrow[u, hook] & \times & \prod \mathrm{GL}(\cdot) \times \mathrm{Sp}(2a^\flat) \arrow[u, hook] & \times & \prod \mathrm{GL}(\cdot) \times \mathrm{Sp}(2b^\flat) \arrow[u, hook, "\text{Lévi}"']
\end{tikzcd}$$

où $a, b, a^\flat, b^\flat \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, et L_0, M_0 n'ont aucun facteur direct de type SO impair déployé, cf. la description de $\overline{M^!_\epsilon}$. Selon la définition 6.1.1, on en déduit

$$\begin{tikzcd}
L^\epsilon \arrow[r, equal] & L_0 & \times & \mathrm{SO}(2a+1) & \times & \mathrm{SO}(2b+1) \\
M^!_\epsilon \arrow[u, hook, "\text{Lévi}"] \arrow[r, equal] & M_0 \arrow[u, hook] & \times & \prod \mathrm{GL}(\cdot) \times \mathrm{SO}(2a^\flat+1) \arrow[u, hook] & \times & \prod \mathrm{GL}(\cdot) \times \mathrm{SO}(2b^\flat+1). \arrow[u, hook, "\text{Lévi}"']
\end{tikzcd}$$

D'où

$$[Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{M^!_\epsilon}}^{\Gamma_F,0} : Z_{\widehat{L[\bar{s}]}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{M^!_\epsilon}}^{\Gamma_F,0}]^{-1} =$$
$$= \left| Z_{\mathrm{Sp}(2a,\mathbb{C})} \cap (\prod Z_{\mathrm{GL}(\cdot,\mathbb{C})} \times \{1\}) \right|^{-1} \cdot \left| Z_{\mathrm{Sp}(2b,\mathbb{C})} \cap (\prod Z_{\mathrm{GL}(\cdot,\mathbb{C})} \times \{1\}) \right|^{-1}.$$

Ces expressions s'évaluent sans difficulté :

$$\left| Z_{\mathrm{Sp}(2a,\mathbb{C})} \cap (\prod Z_{\mathrm{GL}(\cdot,\mathbb{C})} \times \{1\}) \right|^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } a > 0, a^\flat = 0, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{II.21}$$

Idem pour $b, b^\flat$ au lieu de $a, a^\flat$. D'autre part, $c_{M^!_\epsilon, M^!_\epsilon}^{L[\bar{s}], L^\epsilon}$ est égal au produit $c_{\overline{M_a}, M_a}^{\overline{G_a}, G_a} \cdot c_{\overline{M_b}, M_b}^{\overline{G_b}, G_b}$, où $G_a = \mathrm{SO}(2a+1)$, $M_a = \prod \mathrm{GL}(\cdot) \times \mathrm{SO}(2a^\flat + 1) \subset G_a$, et $\overline{G_a}$, $\overline{M_a}$ sont définies selon 6.1.1. Idem pour $b, b^\flat$ au lieu de $a, a^\flat$. Vu 5.3.3, $c_{\overline{M_a}, M_a}^{\overline{G_a}, G_a}$ admet la même description ci-dessus que (II.21), et idem pour $c_{\overline{M_b}, M_b}^{\overline{G_b}, G_b}$. On conclut que

$$[Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{M^!_\epsilon}}^{\Gamma_F,0} : Z_{\widehat{L[\bar{s}]}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{M^!_\epsilon}}^{\Gamma_F,0}]^{-1} = c_{M^!_\epsilon, M^!_\epsilon}^{L[\bar{s}], L^\epsilon},$$

ce qui fallait démontrer. □

8.2 Yoga de centres

Nous nous proposons d'établir 8.1.3. Fixons $(t, L) \in E^\natural$ et conservons les notations précédentes. On a les variantes suivantes des diagrammes (II.16), (II.17) :

(II.22)
$$\begin{tikzcd}
 & Z^0_{\widehat{\widetilde{G}}} \arrow[rrrr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & & & Z_{\widehat{G[s]}} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
Z^0_{\widehat{\widetilde{M}}} \arrow[rrrr] \arrow[dd] & & & & Z_{\widehat{M^!}} \arrow[dd] & \\
 & Z_{\widehat{L}} \arrow[rr] \arrow[dl] & & Z_{\widehat{L[\bar{s}]}} \arrow[rr] \arrow[dl] & & Z_{\widehat{L^\epsilon}} \arrow[dl] \\
Z_{\widehat{R}} \arrow[rr] & & Z_{\widehat{\overline{M^!_\epsilon}}} \arrow[rr] & & Z_{\widehat{M^!_\epsilon}} &
\end{tikzcd}$$

dont toute flèche est injective et Γ_F-équivariante, et

(II.23)
$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{a}_G \arrow[rrrr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & & & \mathfrak{a}_{G[s]} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
\mathfrak{a}_M \arrow[rrrr] \arrow[dd] & & & & \mathfrak{a}_{M^!} \arrow[dd] & \\
 & \mathfrak{a}_L \arrow[rr] \arrow[dl] & & \mathfrak{a}_{L[s]} \arrow[rr] \arrow[dl] & & \mathfrak{a}_{L^\epsilon} \arrow[dl] \\
\mathfrak{a}_R \arrow[rr] & & \mathfrak{a}_{\overline{M^!_\epsilon}} \arrow[rr] & & \mathfrak{a}_{M^!_\epsilon} &
\end{tikzcd}$$

dont toute flèche est injective et toute flèche horizontale est un isomorphisme, car les données endoscopiques en vue sont toutes elliptiques.

Lemme 8.2.1. *On a l'égalité*

$$d_R^G(M, L) = d_{M^!_\epsilon}^{G[s]}(M^!, L^\epsilon).$$

Démonstration. Contemplons (II.23). La définition de $E^\natural$ fournit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{a}_M^G \arrow[d, equal] & \oplus & \mathfrak{a}_L^G \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, equal] & \mathfrak{a}_R^G \arrow[d, equal] \\
\mathfrak{a}_{M^!}^{G[s]} & \oplus & \mathfrak{a}_{L^\epsilon}^{G[s]} \arrow[r, "\sim"] & \mathfrak{a}_{M^!_\epsilon}^{G[s]} .
\end{tikzcd}$$

Les égalités verticales préservent les formes quadratiques choisies (rappelons (II.17) et la remarque qui le suit). Les facteurs $d^*_*(\cdot, \cdot)$ sont les rapports des mesures relativement aux flèches horizontales, donc sont égaux. $\square$

Les preuves suivantes reposeront sur (II.22) et deux faits.

1. Soient H un F-groupe réductif connexe et S un sous-groupe de Lévi de H. Supposons qu'ils sont munis de données de L-groupes compatibles. Alors
$$Z_{\hat{S}}^{\Gamma_F} = Z_{\hat{H}}^{\Gamma_F} Z_{\hat{S}}^{\Gamma_F, 0}.$$
2. Soient a, A, B des sous-groupes dans un groupe commutatif tels que $a \subset A$. Alors
$$A \cap (Ba) = (A \cap B)a.$$

Le premier est [19, Lemma 1.1] et le deuxième est élémentaire.

Lemme 8.2.2. *On a l'égalité*

$$\frac{c^{\mathrm{inst}}(t, L)}{d_R^G(M, L)} = [Z_{\widehat{L[\bar{s}]}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F, 0} : Z_{\hat{\tilde{G}}}^0]^{-1}.$$

Démonstration. Notons c_1 le terme à gauche dans l'assertion. En déroulant les définitions, on voit que
$$c_1 = [Z_{\widehat{M^!_\epsilon}}^{\Gamma_F} : Z_{\hat{R}}^{\Gamma_F}][Z_{\widehat{L[\bar{s}]}}^{\Gamma_F} : Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F}]^{-1}[Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{\widetilde{M}}}^0 : Z_{\hat{\tilde{G}}}^0]^{-1}.$$

Comme $Z_{\widehat{M^!_\epsilon}}^{\Gamma_F} = Z_{\widehat{L[\bar{s}]}}^{\Gamma_F} Z_{\widehat{M^!_\epsilon}}^{\Gamma_F, 0}$ et $Z_{\widehat{M^!_\epsilon}}^{\Gamma_F, 0} = Z_{\hat{R}}^{\Gamma_F, 0}$, on a la suite exacte

$$1 \to \frac{Z_{\widehat{L[\bar{s}]}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\hat{R}}^{\Gamma_F}}{Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F}} \to \frac{Z_{\widehat{L[\bar{s}]}}^{\Gamma_F}}{Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F}} \to \frac{Z_{\widehat{M^!_\epsilon}}^{\Gamma_F}}{Z_{\hat{R}}^{\Gamma_F}} \to 1.$$

Donc
$$c_1 = [Z_{\widehat{L[\bar{s}]}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\hat{R}}^{\Gamma_F} : Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F}]^{-1}[Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{\widetilde{M}}}^0 : Z_{\hat{\tilde{G}}}^0]^{-1}.$$

On a aussi

$$Z_{\hat{R}}^{\Gamma_F} = Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F} Z_{\hat{R}}^{\Gamma_F, 0},$$
$$Z_{\hat{R}}^{\Gamma_F, 0} = Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F, 0} Z_{\widehat{\widetilde{M}}}^0$$

où la dernière égalité découle de l'hypothèse $d_R^G(M, L) \neq 0$ et dualité. D'où $Z_{\hat{R}}^{\Gamma_F} = Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F} Z_{\widehat{\widetilde{M}}}^0$, donc
$$Z_{\widehat{L[\bar{s}]}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\hat{R}}^{\Gamma_F} = Z_{\widehat{L[\bar{s}]}}^{\Gamma_F} \cap \left(Z_{\widehat{\widetilde{M}}}^0 Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F} \right) = (Z_{\widehat{L[\bar{s}]}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{\widetilde{M}}}^0) Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F}$$

car $Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F} \subset Z_{\widehat{L[\bar{s}]}}^{\Gamma_F}$. On en déduit

$$\frac{Z_{\widehat{L[\bar{s}]}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{\widetilde{M}}}^0}{Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{\widetilde{M}}}^0} \xrightarrow{\sim} \frac{Z_{\widehat{L[\bar{s}]}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\hat{R}}^{\Gamma_F}}{Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} c_1 &= [Z_{\widehat{L[\bar{s}]}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{\widetilde{M}}}^0 : Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{\widetilde{M}}}^0]^{-1} [Z_{\hat{L}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{\widetilde{M}}}^0 : Z_{\widehat{\widetilde{G}}}^0]^{-1} \\ &= [Z_{\widehat{L[\bar{s}]}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{\widetilde{M}}}^0 : Z_{\widehat{\widetilde{G}}}^0]^{-1}. \end{aligned}$$

Il reste à observer que $Z_{\widehat{\widetilde{M}}}^0 = Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0}$. $\square$

Lemme 8.2.3. *On a l'égalité*

$$\frac{c^{\mathrm{st}}(t,L)}{d_{M_\epsilon^!}^{G[s]}(M^!, L^\epsilon)} = [Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0} : Z_{\widehat{\widetilde{G}}}^0]^{-1}$$

Démonstration. Notons c_2 le terme à gauche dans l'assertion. Déroulons les définitions : c_2 est égal à

$$[Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F} : Z_{\widehat{G[s]}}^{\Gamma_F}]^{-1} [Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F} : Z_{\widehat{\widetilde{M}}}^0][Z_{\widehat{G[s]}}^{\Gamma_F} : Z_{\widehat{\widetilde{G}}}^0]^{-1} = [Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F} : Z_{\widehat{\widetilde{M}}}^0][Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F} : Z_{\widehat{\widetilde{G}}}^0]^{-1}.$$

On a $Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0} = Z_{\widehat{\widetilde{M}}}^0$, donc

$$\begin{aligned} c_2 &= [Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F} : Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0}][Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F} : Z_{\widehat{\widetilde{G}}}^0]^{-1} \\ &= [Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F} : Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0}][Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F} : Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0} \cap Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F,0}]^{-1} \\ &\cdot [Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0} \cap Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F,0} : Z_{\widehat{\widetilde{G}}}^0]^{-1}. \end{aligned}$$

Montrons que

$$[Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F} : Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0}][Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F} : Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0} \cap Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F,0}]^{-1} = [Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0} \cap Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F} : Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0} \cap Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F,0}]^{-1}. \tag{II.24}$$

On a

$$\begin{aligned} Z_{\widehat{M_\epsilon^!}}^{\Gamma_F} &= Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F} Z_{\widehat{M_\epsilon^!}}^{\Gamma_F,0}, \\ Z_{\widehat{M_\epsilon^!}}^{\Gamma_F,0} &= Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0} Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F,0} \end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte de l'hypothèse $d_{M_\epsilon^!}^{G[s]}(M, L^\epsilon) \neq 0$. Par conséquent $Z_{\widehat{M_\epsilon^!}}^{\Gamma_F} = Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F} Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0}$, donc

$$Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F} = Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{M_\epsilon^!}}^{\Gamma_F} = Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F} \cap \left(Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F} Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0} \right) = \left(Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F} \right) Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0}.$$

D'où la suite exacte

$$1 \to \frac{Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0}}{Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F,0} \cap Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0}} \to \frac{Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F}}{Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F,0} \cap Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0}} \to \frac{Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F}}{Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0}} \to 1.$$

On déduit (II.24) de cette suite. En mettant (II.24) dans la dernière expression de c_2, on obtient l'égalité cherchée. $\square$

Démonstration de 8.1.3. Vu 8.2.1, 8.2.2 et 8.2.3, on a

$$c^{\mathrm{inst}}(t,L)c^{\mathrm{st}}(t,L)^{-1} = [Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0} : Z_{\widehat{L[\bar{s}]}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0}].$$

Posons

$$\begin{aligned} A &:= Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0}, \\ B &:= Z_{\widehat{L[\bar{s}]}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0}, \\ C &:= Z_{\widehat{L[\bar{s}]}}^{\Gamma_F,0} = Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F,0}. \end{aligned}$$

Rappelons que $d_{M^!_\epsilon}^{G[s]}(M^!, L^\epsilon)$ entraîne que $Z_{\widehat{M^!_\epsilon}}^{\Gamma_F,0} = Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0} C$. On a donc

$$\begin{aligned} Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{M^!_\epsilon}}^{\Gamma_F,0} &= Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F} \cap \left(Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0} C \right) = \left(Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0} \right) C = AC, \\ Z_{\widehat{L[\bar{s}]}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{M^!_\epsilon}}^{\Gamma_F,0} &= Z_{\widehat{L[\bar{s}]}}^{\Gamma_F} \cap \left(Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0} C \right) = \left(Z_{\widehat{L[\bar{s}]}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0} \right) C = BC. \end{aligned}$$

D'après ce qui précède et l'inclusion $Z_{\widehat{L[\bar{s}]}}^{\Gamma_F} \hookrightarrow Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F}$,

$$A \cap BC = \left(Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0} \right) \cap \left(Z_{\widehat{L[\bar{s}]}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{M^!_\epsilon}}^{\Gamma_F,0} \right) = Z_{\widehat{L[\bar{s}]}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{M^!}}^{\Gamma_F,0} = B.$$

Donc $A/B \simeq AC/BC$. Il en résulte que

$$c^{\mathrm{inst}}(t,L)c^{\mathrm{st}}(t,L)^{-1} = [A : B] = [AC : BC] = [Z_{\widehat{L^\epsilon}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{M^!_\epsilon}}^{\Gamma_F,0} : Z_{\widehat{L[\bar{s}]}}^{\Gamma_F} \cap Z_{\widehat{M^!_\epsilon}}^{\Gamma_F,0}],$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Deuxième partie

La formule des traces pour les revêtements de groupes réductifs connexes

Chapitre III

Le développement géométrique fin

1 Introduction

Motivation La théorie des représentations automorphes des groupes réductifs connexes a depuis longtemps été l'objet de travaux intensifs, et la formule des traces d'Arthur-Selberg s'est avérée un outil indispensable. Or certaines questions arithmétiques nous obligent à considérer non seulement les groupes réductifs connexes, mais aussi leurs revêtements finis qui ne sont pas algébriques. Cet article fait partie d'un projet consistant à étendre les travaux d'Arthur aux revêtements.

Historiquement, Flicker et Kazhdan [34, 35] ont déjà utilisé une forme simple de la formule des traces sur les revêtements métaplectiques de $\mathrm{GL}(n)$. Mezo [64, 63] reprenait leur travail à l'aide de la formule des traces invariante d'Arthur. Malheureusement ils ne considèrent pas les autres revêtements. De plus, vu la profondeur des travaux d'Arthur sur la formule des traces invariante [10, 11], les justifications données dans [64] ne sont peut-être pas suffisantes.

Passons en revue le cas des groupes réductifs connexes. Soient F un corps de nombres et G un F-groupe réductif connexe. Désignons $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ l'anneau des adèles de F. On sait définir le sous-groupe $G(\mathbb{A})^1 \subset G(\mathbb{A})$ (voir §3.4). Fixons un sous-groupe de Lévi minimal M_0 et un sous-groupe compact maximal K de $G(\mathbb{A})$ en bonne position relativement à M_0. *Grosso modo*, la formule des traces "grossière" d'Arthur [5, 6] est une égalité des fonctionnelles linéaires sur $C_c^\infty(G(\mathbb{A})^1)$ (que l'on appelle aussi "distributions", par abus de terminologie)

$$J := \sum_{\mathfrak{o}} J_{\mathfrak{o}} = \sum_{\chi} J_\chi,$$

où $\mathfrak{o}$ (resp. χ) indexe des données géométriques (resp. spectrales). Les données $\mathfrak{o}$ sont faciles à décrire : elles correspondent aux classes de conjugaison semi-simples dans $G(F)$. Le terme correspondant à la classe $\{1\}$ est noté J_{unip} et s'appelle le terme unipotent. Les données χ correspondent, en gros, aux représentations automorphes cuspidales sur les sous-groupes de Lévi semi-standards modulo l'action du groupe de Weyl de G. Cette formule grossière est relativement facile à adapter aux revêtements (voir §6.1).

Avant d'obtenir la formule des traces invariante, il faut d'abord développer les distributions $J_{\mathfrak{o}}$ (resp. J_χ) en termes des intégrales orbitales pondérées (resp. caractères pondérés), et le résultat s'appelle le développement géométrique (resp. spectral) fin. En sommant les développements fins pour chaque $J_{\mathfrak{o}}$, le développement géométrique fin prend la forme (cf. [9])

$$J(f) = \sum_M |W_0^M||W_0^G|^{-1} \sum_{\gamma \in (M(F))_{M,S}} a^M(S, \dot{\gamma}) J_M(\dot{\gamma}, f), \quad f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A})^1),$$

où

– M parcourt les sous-groupes de Lévi semi-standards de G ;
– W_0^M est le groupe de Weyl de M ;
– S est un ensemble fini de places de F suffisamment grand relativement à f ;
– $(M(F))_{M,S}$ est l'ensemble des classes de (M,S)-équivalence (voir 6.5.1) ;
– le symbole pointé $\dot{\gamma}$ signifie que l'on choisit une mesure invariante sur la classe de conjugaison de γ dans $M(F_S)$;
– $a^M(S,\dot{\gamma})$ s'appelle le coefficient de ce développement en $\dot{\gamma}$, qui est un objet global ;
– $J_M(\dot{\gamma},f)$ est l'intégrale orbitale pondérée de f en $\dot{\gamma}$, qui est un objet local.

C'est ce qui est problématique pour les revêtements. Le principal but de cet article est un développement géométrique fin pour les revêtements. Quoique le résultat 6.5.9 a l'air très similaire, sa formulation ainsi que sa démonstration nécessitent des modifications inattendues. Précisons.

Revêtements Avant d'entamer ce projet, il faut bien sûr signaler une classe convenable de revêtements. Soit F un corps local ou global, toujours supposé de caractéristique nulle dans cet article. Soit G un F-groupe réductif connexe. Notons $A := F$ si F est local et $A := \mathbb{A}$ si F est global, alors $G(A)$ est muni d'une topologie déduite de celle de A. En premier lieu, on considère des extensions centrales finies topologiques de $G(A)$, à savoir

$$1 \to N \to \tilde{G} \xrightarrow{\mathbf{p}} G(A) \to 1$$

où N est un groupe abélien fini. Les représentations de $\tilde{G}$ se décomposent selon les caractères de N. On fixe un tel caractère $\xi : N \to \mu_m$, où $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ et $\mu_m := \{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{C}^\times : \boldsymbol{\varepsilon}^m = 1\}$. On pousse l'extension centrale en avant via ξ. On s'est ainsi ramené aux revêtements avec $N = \mu_m$, ce que l'on suppose dorénavant, et les représentations sur lesquelles μ_m (regardé comme un sous-groupe de $\tilde{G}$) opère par $\boldsymbol{\varepsilon} \mapsto \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathrm{id}$. De telles représentations sont dites spécifiques. Pour l'étude des représentations spécifiques, il suffit de considérer les fonctions f sur $\tilde{G}$ telles que $f(\boldsymbol{\varepsilon}\tilde{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}^{-1}f(\tilde{x})$ pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mu_m$, $\tilde{x} \in \tilde{G}$; de telles fonctions sont dites anti-spécifiques.

On montrera qu'un revêtement se scinde de façon canonique au-dessus des sous-groupes unipotents. Lorsque F est global, on suppose de plus qu'un scindage au-dessus de $G(F)$ est fixé. Tel est le formalisme posé dans [66] ; on dispose alors de la théorie de décomposition spectrale et des séries d'Eisenstein. Mentionnons aussi que d'un revêtement de $G(\mathbb{A})$ se déduisent des revêtements de $G(F_v)$, où v est une place de F, en prenant la fibre de $\mathbf{p}$ au-dessus de $G(F_v)$.

Or ces hypothèses ne suffisent pas dans le cas adélique. Par exemple, pour avoir un théorème de décomposition tensorielle des représentations lisses irréductibles spécifiques, il faut définir les algèbres de Hecke sphériques anti-spécifiques en presque toute place et montrer qu'elles sont commutatives. On posera des conditions (dites "non ramifiées") dans §3.1 qui doivent être vérifiées en dehors d'un ensemble fini de places V_{ram} contenant les places archimédiennes. Notre traitement de tels revêtements s'inspire beaucoup de [72, 73, 62].

D'après une philosophie bien connue, il faut considérer non seulement un revêtement $\mathbf{p} : \tilde{G} \to G(A)$, mais aussi ses fibres au-dessus des sous-groupes de Lévi ; on appelle ces fibres les sous-groupes de Lévi de $\tilde{G}$. Nos hypothèses pour un revêtement local, non ramifié ou adélique sont préservées par passage aux sous-groupes de Lévi de G. De plus, si l'on exige que l'algèbre de Hecke sphérique anti-spécifique d'un revêtement non ramifié est commutative, et idem pour tous les sous-groupes de Lévi, alors les conditions posées dans §3.1 sont bien minimales. Par ailleurs, nos hypothèses sont aussi préservées par pousser-en-avant le groupe μ_m par un homomorphisme.

En pratique les revêtements sont souvent dotés de structures supplémentaires. On démontrera dans §3.5 que les $\mathbf{K}_2$-torseurs multiplicatifs de Brylinski-Deligne [27], qui généralisent la construction de Steinberg, Moore et Matsumoto [60], fournissent des revêtements vérifiant nos hypothèses. La démonstration est basé sur un résultat de Weissman [90].

La formule des traces grossière Soit $\mathbf{p} : \tilde{G} \to G(\mathbb{A})$ un revêtement au sens ci-dessus. Fixons un sous-groupe de Lévi minimal M_0 et un sous-groupe compact maximal $K \subset G(\mathbb{A})$ en bonne position relativement à M_0. Notons $\tilde{G}^1 := \mathbf{p}^{-1}(G(\mathbb{A})^1)$ et $C^\infty_{c,--}(\tilde{G}^1)$ l'ensemble des fonctions anti-spécifiques dans $C^\infty_c(\tilde{G}^1)$. Comme dans le cas des groupes réductifs connexes, on a la formule des traces grossière

$$J(f) = \sum_{\mathfrak{o}} J_{\mathfrak{o}}(f) = \sum_{\chi} J_\chi(f), \quad f \in C^\infty_{c,--}(\tilde{G}^1)$$

où les indices $\mathfrak{o}$ correspondent aux classes de conjugaison semi-simples dans $G(F)$ comme précédemment, et les indices χ correspondent, en gros, aux représentations automorphes cuspidales spécifiques sur les sous-groupes de Lévi semi-standards de $\tilde{G}$ modulo l'action de W_0^G.

Ici on observe une asymétrie : le côté géometrique est indexé par toutes les classes de conjugaison semi-simples dans $G(F)$, tandis que le côté spectral ne fait intervenir que les représentations spécifiques. Nous y remédierons lors du raffinement.

Raffinement géométrique Pour un groupe réductif connexe G, le raffinement géométrique d'un terme $J_{\mathfrak{o}}$ repose sur la descente au terme $J^{G_\sigma}_{\text{unip}}$ dans la formule des traces grossière associé au commutant connexe G_σ de σ, où $\sigma \in \mathfrak{o}$. On exprime $J^{G_\sigma}_{\text{unip}}$ en termes des intégrales orbitales pondérées unipotentes définies dans [12]. Les intégrales orbitales pondérées satisfont aussi à une formule de descente. En comparant ces formules de descente, on exprime $J_{\mathfrak{o}}$ en termes des intégrales orbitales pondérées sur le même groupe.

Le procédé pour un revêtement $\mathbf{p} : \tilde{G} \to G(\mathbb{A})$ est analogue sauf que le revêtement disparaît après la descente, et le résultat n'est plus $J^{G_\sigma}_{\text{unip}}$, mais tordu par un certain caractère de $G_\sigma(\mathbb{A})$ à cause du fait qu'un élément dans $\mathbf{p}^{-1}(G_\sigma(\mathbb{A}))$ ne commute pas forcément avec le relèvement de σ dans $\tilde{G}$. Mentionnons que la partie elliptique de la formule des traces "avec un caractère" est beaucoup étudiée (eg. [49]), cependant il nous faut l'autre extrême, la partie unipotente.

De même, nous définissons les intégrales orbitales pondérées sur les revêtements et leurs propriétés se déduisent par descente aux intégrales orbitales pondérées unipotentes sur un groupe réductif connexe, et là encore un caractère intervient.

Notre méthode du raffinement est, pour l'essentiel, celle d'Arthur [8, 9]. Or d'une part l'adaptation au cas avec caractère n'est pas toujours triviale, et d'autre part nous avons besoin de renseignements plus précis sur les coefficients dans le développement géométrique fin avec caractère. Cela nécessite la longue section §5. Une fois que le formalisme avec un caractère est mis en place, la théorie sur les revêtements en découle par descente. L'un des nouveaux ingrédients dans le développement géométrique fin sur les revêtements 6.5.9 est la notion des bons éléments (voir 2.6.1) ; pourtant c'est difficile de les caractériser pour les revêtements en général. Le résultat 6.5.9 s'écrit

$$J(f) = \sum_{M \in \mathcal{L}(M_0)} |W_0^M||W_0^G|^{-1} \sum_{\substack{\gamma \in (M(F))^{K,\text{bon}}_{M,S} \\ \gamma \rightsquigarrow \widetilde{\gamma_S}}} a^{\tilde{M}}(S, \dot{\widetilde{\gamma_S}}) J_{\tilde{M}}(\dot{\widetilde{\gamma_S}}, f),$$

où

- M, W_0^M et S sont pareils que dans le cas des groupes réductifs connexes ;
- $(M(F))^{K,\text{bon}}_{M,S}$ est le sous-ensemble de $(M(F))_{M,S}$ défini dans 6.5.2 ; notons que la seule nouveauté est la bonté, les autres conditions sont implicites dans les travaux d'Arthur (cf. [20, Lemma 2.1]) ;
- la correspondance $\gamma \rightsquigarrow \widetilde{\gamma_S} \in \tilde{M}_S$ est définie 6.5.3, où on suppose que γ est un représentant admissible de la classe de (M, S)-équivalence ;

– $a^{\tilde{M}}(S, \dot{\widetilde{\gamma_S}})$ est le coefficient de ce développement en $\widetilde{\gamma_S}$;
– $J_{\tilde{M}}(\dot{\widetilde{\gamma_S}}, f)$ est l'intégrale orbitale pondérée anti-spécifique en $\dot{\widetilde{\gamma_S}}$.

Nous démontrerons que le produit $a^{\tilde{M}}(S, \dot{\widetilde{\gamma_S}})J_{\tilde{M}}(\dot{\widetilde{\gamma_S}}, f)$ ne dépend que de la classe de (M, S)-équivalence et de f. Donc cette expression est loisible.

Notons en passant que la démonstration sera beaucoup plus simple si l'on considère un revêtement tel que deux éléments dans $\tilde{G}$ commutent si et seulement si leurs images par $\mathbf{p}$ commutent. Tel est le cas du revêtement métaplectique de Weil.

Remarquons que notre méthode permet aussi de raffiner le côté géométrique de la formule des traces avec caractère pour un groupe réductif connexe (voir l'exemple 5.7.2). Une généralisation aux groupes tordus aura un intérêt arithmétique.

Structure de cet article Dans §2, nous définissons les revêtements dans le cas local, mettons en place le formalisme de base de l'analyse harmonique et fixons les notations. Le traitement n'est nullement original, mais nous essayons de travailler dans un cadre général : il n'y a aucune hypothèse sur le déploiement, la connexité simple du groupe ou sur les racines d'unité du corps en question.

Dans §3, nous étudions les revêtements "non ramifiés", établissons un isomorphisme de Satake et puis définissons les revêtements adéliques. Afin de supporter nos hypothèses, nous démontrons que les $\mathbf{K}_2$-torseurs multiplicatifs de Brylinski-Deligne [27] fournissent de tels revêtements adéliques.

La section §4 ne sert qu'à fixer les notations sur les fonctions combinatoires de Langlands et les (G, M)-familles.

Dans §5, nous étudions le côté géométrique de la formule des traces grossière avec un caractère. Après l'étude des intégrales orbitales pondérées avec caractère, nous obtenons le développement géométrique fin dans ce contexte. Enfin, nous étudions diverses propriétés des coefficients dans le développement fin, qui serviront à remonter ce développement au revêtement.

Dans §6, nous mettons en place d'abord la formule des traces grossière pour les revêtements. Puisque des structures analogues sont déjà présentes dans §6.1, nous procédons rapidement. Ensuite, nous définissons les intégrales orbitales pondérées anti-spécifiques. Le développement géométrique fin découle d'une réduction au cas unipotent. Nous donnons aussi des formules pour les coefficients similaires à celles d'Arthur.

Une grande partie de ce travail consiste en des paraphrases des travaux d'Arthur. Vu l'épaisseur des ses articles, on se contentera souvent d'indiquer les modifications nécessaires.

Conventions Les schémas en groupes sur une base S sont désignés par les symboles G, M etc. Leurs algèbres de Lie sont désignées par $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{m}$ etc. Le centre de G est noté Z_G, le centralisateur d'un sous-schéma en groupes H (resp. d'un S-point x) est noté $Z_G(H)$ (resp. $Z_G(x)$) ; le normalisateur de H est noté $N_G(H)$. Soit T un S-schéma, l'ensemble des T-points d'un S-schéma X est désigné par $X(T)$. Lorsque $T = \operatorname{Spec} A$ où A est une algèbre, on écrit aussi $X(A)$ au lieu de $X(T)$. Si A est muni d'une topologie, on munit $X(A)$ de la topologie induite.

Soit F un corps, on fixe une clôture algébrique $\bar{F}$ de F. Soit G un F-groupe algébrique. On désigne l'ensemble des éléments semi-simples dans $G(F)$ par $G(F)_{\mathrm{ss}}$. Soit $x \in G(F)$, on pose $G^x := Z_G(x)$ le commutant de x dans G, et G_x désigne la composante neutre de G^x. On dit que $x \in G(F)_{\mathrm{ss}}$ est régulier (resp. fortement régulier) si G_x (resp. G^x) est un tore. On désigne la sous-variété des éléments semi-simples réguliers par G_{reg}. La sous-variété des éléments unipotents dans G est désignée par G_{unip}. De même, pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on a la sous-variété $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ des éléments réguliers semi-simples et le cône nilpotent $\mathfrak{g}_{\mathrm{nil}}$.

On désigne le sous-groupe dérivé (schématique) de G par G_{der} et le groupe adjoint par G_{AD}. Si G est réductif et connexe, on désigne le revêtement simplement connexe de G_{der} par $\pi : G_{\mathrm{SC}} \to G_{\mathrm{der}}$.

On dit que deux éléments $x, y \in G(F)$ sont géométriquement conjugués s'ils sont conjugués par un élément dans $G(\bar{F})$. On définit ainsi les classes de conjugaison géométriques dans $G(F)$.

Soit F un corps complet à valuation discrète. On utilise toujours la valuation normalisée v de sorte que $v(F) = \mathbb{Z}$. L'anneau des entiers est noté $\mathfrak{o}_F$ et l'idéal maximal est noté par $\mathfrak{p}_F$. Soit F un corps global, on prend les valeurs absolues $|\cdot|_v$ de façon usuelle en chaque place v de telle sorte que $\prod_v |x|_v = 1$ pour tout $x \in F^\times$.

Pour deux éléments u, v dans un groupe quelconque, leur commutateur est défini comme

$$[u, v] := u^{-1}v^{-1}uv.$$

On désigne la fonction modulaire d'un groupe topologique A par $\delta_A(\cdot)$. On désigne la mesure d'un espace mesurable E par $\mathrm{mes}(E)$.

2 Revêtements locaux

2.1 Généralités

Soient F un corps local de caractéristique nulle et M un F-groupe algébrique affine. Un revêtement de $M(F)$ à m feuillets (où $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) est une extension centrale de groupes topologiques

$$1 \to \mu_m \to \tilde{M} \xrightarrow{\mathbf{p}} M(F) \to 1,$$

où $\mu_m := \{\varepsilon \in \mathbb{C}^\times : \varepsilon^m = 1\}$. Alors $\tilde{M}$ est unimodulaire si $M(F)$ l'est. Si F est archimédien, alors $\tilde{M}$ appartient à la classe de Harish-Chandra. De plus, si $F = \mathbb{C}$ alors $\mathbf{p}$ provient d'un revêtement étale de $\mathbb{C}$-groupes algébriques affines ([36] Exp XII, 5.1). Si F est non archimédien, alors $\tilde{M}$ est un groupe localement profini. Cela permet de parler de représentation lisses, admissibles etc. On dit que $\mathbf{p}$ est modéré si F est non archimédien de caractéristique résiduelle q première à m. Nous adoptons la convention de doter les éléments dans $\tilde{M}$ d'un $\sim$, par exemple $\tilde{x}$, et désignons son image dans $M(F)$ par le symbole sans $\sim$, par exemple $x = \mathbf{p}(\tilde{x})$.

Remarquons que $M(F)$ agit sur $\tilde{M}$ par conjugaison : de chaque $x \in M(F)$ se déduit un homomorphisme $\tilde{m} \mapsto x^{-1}\tilde{m}x$ de $\tilde{M}$. Sauf mention expresse du contraire, un revêtement signifie un revêtement d'un groupe réductif connexe.

Notons

$$\widehat{\mu_m} := \mathrm{Hom}(\mu_m, \mathbb{C}^\times).$$

Pour un revêtement à m feuillets $\mathbf{p} : \tilde{M} \to M(F)$, on peut définir les objets spécifiques et anti-spécifiques selon l'action de μ_m, dotés de l'indice $-$ et $\text{-\,-}$ respectivement, ou plus généralement les objets équivariants par rapport à certain élément dans $\widehat{\mu_m}$. Plus précisément, soit χ_- l'inclusion $\mu_m \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$; pour tout $\chi \in \widehat{\mu_m}$, posons

$$\begin{aligned}
C^\infty_{c,\chi}(\tilde{M}) &:= \{f \in C^\infty_c(\tilde{M}) : \forall \varepsilon \in \mu_m, \forall \tilde{x} \in \tilde{M},\ f(\varepsilon\tilde{x}) = \chi(\varepsilon)f(\tilde{x})\},\\
C^\infty_{c,-}(\tilde{M}) &:= C^\infty_{c,\chi_-},\\
C^\infty_{c,\text{-\,-}}(\tilde{M}) &:= C^\infty_{c,\chi_-^{-1}}.
\end{aligned}$$

Notons $\Pi(\tilde{M})$ l'ensemble de classes d'équivalences de représentations admissibles irréductibles de $\tilde{M}$, posons

$$\begin{aligned}\Pi_\chi(\tilde{M}) &:= \{\pi \in \Pi(\tilde{M}) : \forall \varepsilon \in \mu_m,\ \pi(\varepsilon) = \chi(\varepsilon)\mathrm{id}\},\\ \Pi_-(\tilde{M}) &:= \Pi_{\chi_-}(\tilde{M}),\\ \Pi_{--}(\tilde{M}) &:= \Pi_{\chi_-^{-1}}(\tilde{M}).\end{aligned}$$

De même, on définit l'ensemble $\Pi_2(\tilde{M})$ (resp. $\Pi_{\mathrm{temp}}(\tilde{M})$, $\Pi_{\mathrm{unit}}(\tilde{M})$) de représentations de la série discrète (resp. tempérées, unitaires) de $\tilde{M}$, et on rajoute les indices $-$, $--$ ou $\chi \in \widehat{\mu_m}$ pour signifier l'équivariance.

On a une décomposition canonique $C_c^\infty(\tilde{M}) = \bigoplus_{\chi \in \widehat{\mu_m}} C_{c,\chi}^\infty(\tilde{M})$. Cela permet aussi de parler de l'équivariance de distributions de sorte qu'une fonction χ-équivariante localement intégrable fournit une distribution χ-équivariante. L'étude des représentations sur les revêtements se ramène, pour l'essentiel, à l'étude des représentations spécifiques.

Remarque 2.1.1. Pour l'étude de représentations χ-équivariantes sur $\tilde{M}$, il suffit de considérer les fonctions test $\bar{\chi}$-équivariantes. En effet, supposons fixée une mesure de Haar sur $\tilde{M}$. Soient $\chi, \xi \in \widehat{\mu_m}$. Pour tout $\pi \in \Pi_\chi(\tilde{M})$ et $f \in C_{c,\xi}^\infty(\tilde{M})$, l'opérateur

$$\pi(f) = \int_{\tilde{M}} f(\tilde{m})\pi(\tilde{m})\,\mathrm{d}\tilde{m}$$

est nul sauf si $\xi = \bar{\chi}$.

2.2 Scindage unipotent

Conservons les notations précédentes.

Proposition 2.2.1. *Il existe une seule section continue $s : M_{unip}(F) \to \tilde{M}$ de $\mathbf{p}$ telle que*

- *pour tout sous-groupe unipotent U de M défini sur F, $s|_{U(F)}$ est un homomorphisme ;*
- *s est invariant par conjugaison.*

Démonstration. C'est contenu dans [66, A.1]. Donnons une preuve directe pour le cas de caractéristique nulle. L'exponentielle fournit un F-isomorphisme de variétés algébriques

$$\exp : \mathfrak{m}_{\mathrm{nil}} \to M_{\mathrm{unip}}.$$

Pour tout $x = \exp(X)$ dans $M_{\mathrm{unip}}(F)$, prenons $\tilde{x}'$ un relèvement quelconque de $\exp\left(\frac{X}{m}\right)$. Alors $s(x) := (\tilde{x}')^m \in \mathbf{p}^{-1}(x)$ est canoniquement défini ; en particulier s est invariant par conjugaison. On vérifie aisément la continuité de s.

Soit U un sous-groupe unipotent de M, alors $U(F)$ est divisible et sans torsion. D'après la construction ci-dessus, $\mathbf{p}$ se scinde au-dessus de $U(F)$ si et seulement si $s|_{U(F)}$ est un homomorphisme ; de plus, dans ce cas-là $s|_{U(F)}$ est l'unique scindage.

Montrons que $\mathbf{p}$ se scinde au-dessus de $U(F)$. Si U est commutatif, alors s est un homomorphisme d'après la construction, d'où le scindage. En général, les revêtements à m feuillets de $U(F)$ sont classifiés par $H^2(U(F), \mu_m)$ (la cohomologie continue) et il suffit de montrer que ce H^2 est trivial. Supposons que $\dim U \geq 1$. Il existe un sous-groupe algébrique distingué $U_1 \triangleleft U$ tel que $\dim U_1 < \dim U$ et U/U_1 est commutatif. Rappelons que $U(F)/U_1(F) = (U/U_1)(F)$ car $H^1(F, U_1) = 0$. Pour tout F-groupe unipotent U', on a $H^1(U'(F), \mu_m) = 0$. D'où la suite exacte de restriction-inflation

$$0 \to H^2((U/U_1)(F), \mu_m) \to H^2(U(F), \mu_m) \to H^2(U_1(F), \mu_m),$$

ce qui entraîne que $H^2(U(F), \mu_m) = 0$ par récurrence. Par conséquent $s|_{U(F)}$ est un homomorphisme. Comme $M_{\mathrm{unip}}(F)$ est la réunion des $U(F)$, cela caractérise s. □

Ce scindage canonique s'appelle le scindage unipotent. Identifions désormais $M_{\mathrm{unip}}(F)$ comme un sous-ensemble de $\tilde{M}$ via s. Cela permet de généraliser la décomposition de Jordan.

Proposition 2.2.2. *Pour tout $\tilde{x} \in \tilde{M}$, il existe $\tilde{\sigma} \in \tilde{M}$ et $u \in M_{unip}(F)$ tels que σ est semi-simple et $\tilde{x} = \tilde{\sigma} u = u\tilde{\sigma}$. Cette décomposition est unique.*

On dit que $\tilde{\sigma}$ (resp. u) est la partie semi-simple (resp. unipotente) de $\tilde{x}$.

Démonstration. Soit $x = \sigma u = u\sigma$ la décomposition de Jordan dans $M(F)$ avec $\sigma \in M(F)_{\mathrm{ss}}$ et $u \in M_{\mathrm{unip}}(F)$. Prenons l'unique $\tilde{\sigma} \in \mathbf{p}^{-1}(\sigma)$ de sorte que $\tilde{x} = \tilde{\sigma} u$. L'unicité de $(\tilde{\sigma}, u)$ provient de celle de (σ, u). De plus, on a $\tilde{\sigma} u = u\tilde{\sigma}$ par l'invariance du scindage unipotent, d'où le résultat cherché. □

Corollaire 2.2.3. *Soit $\tilde{x} = \tilde{\sigma} u$ la décomposition de Jordan. Soit $\tilde{y} \in \tilde{M}$, alors $\tilde{y}$ commute à $\tilde{x}$ si et seulement si $\tilde{y}\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}\tilde{y}$ et $yu = uy$.*

Démonstration. Cela résulte de l'unicité de la décomposition de Jordan et l'invariance du scindage unipotent. □

2.3 Sous-groupes de Lévi et paraboliques

Passons en revue la description des sous-groupes paraboliques. Les détails se trouvent dans [22, §5]. Soit F un corps quelconque et G un F-groupe réductif connexe. Fixons un sous-groupe de Lévi minimal M_0 de G : c'est le centralisateur d'un F-tore déployé maximal A_0. Un sous-groupe de Lévi M est dit semi-standard si $M \supset M_0$, un sous-groupe parabolique P est dit semi-standard si $P \supset A_0$. Tout sous-groupe parabolique semi-standard P admet une décomposition de Lévi canonique $P = M_P U_P$ avec M_P semi-standard et U_P le radical unipotent de P. Notons $\overline{P} = M_P U_{\overline{P}}$ le sous-groupe parabolique opposé de P.

Pour un sous-groupe de Lévi semi-standard M, définissons les ensembles finis suivants

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(M) &:= \{\text{les Lévis contenant } M\}, \\ \mathcal{P}(M) &:= \{\text{les paraboliques dont } M \text{ est un facteur de Lévi}\}, \\ \mathcal{F}(M) &:= \{\text{les paraboliques contenant } M\}. \end{aligned}$$

Nous indiquons le groupe ambiant G en exposant dans ces notations : $\mathcal{L}^G(M)$, $\mathcal{P}^G(M)$, $\mathcal{F}^G(M)$ lorsqu'il y a crainte de confusion.

Notons A_M le F-tore central déployé maximal dans M. Si $P \in \mathcal{P}(M)$, notons $A_P := A_M$. Posons aussi $X^*(M) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(M, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ et $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_M := \mathrm{Hom}(X^*(M), \mathbb{R})$. Relativisons ces constructions. Pour tous L, M semi-standards tels que $L \supset M$, on sait définir les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie $\mathfrak{a}_M^L$ avec une suite exacte courte scindée canonique

$$0 \to \mathfrak{a}_L \to \mathfrak{a}_M \leftrightarrows \mathfrak{a}_M^L \to 0.$$

Ainsi, on regarde $\mathfrak{a}_M^L$ comme sous-espace de $\mathfrak{a}_0$. En dualisant, on en déduit des suites exactes courtes scindées pour $(\mathfrak{a}_M^L)^*$, $\mathfrak{a}_M^*$ etc. Les complexifiés des espaces sont notés par $\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^L$, $(\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^L)^*$, etc.

Pour tout $M \in \mathcal{L}(M_0)$, notons W_0^M le groupe de Weyl de M. Si $M = G$, on le note aussi W_0. Pour deux sous-groupes paraboliques semi-standards P, P', "l'ensemble de Weyl" $W(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_{P'})$ est l'ensemble des isomorphismes linéaires $\mathfrak{a}_P \to \mathfrak{a}_{P'}$ obtenus en restreignant les isomorphismes $\mathfrak{a}_0 \to \mathfrak{a}_0$ induits par W_0^G. En particulier, on peut définir les groupes $W(\mathfrak{a}_P) := W(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_P)$. Deux sous-groupes paraboliques semi-standards P, P' sont dits associés si $W(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_{P'}) \neq \emptyset$.

Fixons $P_0 \in \mathcal{P}(M_0)$. Un sous-groupe parabolique P est dit standard si $P \supset P_0$. Un sous-groupe de Lévi M est dit standard s'il existe un sous-groupe parabolique standard P avec décomposition de Lévi canonique $P = MU$. Soit P un sous-groupe parabolique. Il existe un sous-ensemble fini $\Sigma_P \subset X^*(A_P) \subset \mathfrak{a}_P^*$ paramétrisant la décomposition

$$\mathfrak{u}_P := \mathrm{Lie}\,(U_P) = \bigoplus_{\alpha\in\Sigma_P} \mathfrak{u}_\alpha$$

en espaces propres pour l'action adjointe de A_P. Par abus de notation, on dit aussi que Σ_P est l'ensemble des racines pour (A_P, P), bien qu'il ne forme pas un système de racines en général. Notons Σ_P^{red} le sous-ensemble de Σ_P des racines réduites, i.e. indivisibles. Posons

$$\rho_P := \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma_P} (\dim \mathfrak{u}_\alpha)\alpha.$$

Soit $\Delta_0 = \Delta_0^G$ l'ensemble des racines simples de (A_0, P_0), c'est une base pour $(\mathfrak{a}_0^G)^*$. Les paraboliques standards sont en correspondance biunivoque $P \leftrightarrow \Delta_0^P$ avec les sous-ensembles de Δ_0 préservant l'ordre. Plus précisément, supposons que $P \supset P_0$ et soit $P = MU$ la décomposition de Lévi canonique ; posons $\Delta_P := \Delta_0 \setminus \Delta_0^P$. On peut identifier Δ_P à un sous-ensemble de Σ_P^{red} par restriction. Tout élément dans Σ_P admet une unique écriture en combinaison linéaire d'éléments de Δ_P à coefficients dans $\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

On obtient ainsi les bases

$$\begin{aligned}
\Delta_0 \subset (\mathfrak{a}_0^G)^* &: \quad \text{racines simples,}\\
\Delta_0^\vee \subset \mathfrak{a}_0^G &: \quad \text{coracines simples,}\\
\widehat{\Delta_0} \subset (\mathfrak{a}_0^G)^* &: \quad \text{la base duale de } \Delta_0^\vee,\\
\widehat{\Delta_0^\vee} \subset \mathfrak{a}_0^G &: \quad \text{la base duale de } \Delta_0.
\end{aligned}$$

On peut aussi relativiser cette situation : étant donnés sous-groupes paraboliques standards $P \supset Q$, on obtient les bases

$$\begin{aligned}
\Delta_Q^P &\subset (\mathfrak{a}_Q^P)^*,\\
\Delta_Q^{P\vee} &\subset \mathfrak{a}_Q^P,\\
\widehat{\Delta_Q^P} &\subset (\mathfrak{a}_Q^P)^*,\\
\widehat{\Delta_Q^{P\vee}} &\subset \mathfrak{a}_Q^P.
\end{aligned}$$

2.4 L'application de Harish-Chandra : le cas local

On se donne F un corps local, G un F-groupe réductif dont M est un sous-groupe de Lévi. On définit l'homomorphisme de Harish-Chandra local $H_M : M(F) \to \mathfrak{a}_M$ par

$$\forall \chi \in X^*(M), \quad \langle \chi, H_M(x)\rangle = \log|\chi(x)|.$$

Définition 2.4.1. On dit qu'un sous-groupe compact maximal $K \subset G(F)$ est en bonne position relativement à M (et réciproquement) si

- dans le cas F archimédien, les algèbres de Lie de K et de $A_M(F)$ sont orthogonales par rapport à la forme de Killing de G ;
- dans le cas F non archimédien, K est associé à un sommet spécial dans l'immeuble de Bruhat-Tits élargi de G, noté $\mathscr{I}(G)$, qui appartient à l'image d'une immersion équivariante $\mathscr{I}(M) \hookrightarrow \mathscr{I}(G)$.

Arthur l'appelle admissible dans [7].

Notons $M(F)^1 := \mathrm{Ker}\,(H_M)$. Si $P \in \mathcal{P}(M)$ et K est un sous-groupe compact maximal en bonne position relativement à M, alors la décomposition d'Iwasawa $G(F) = P(F)K$ permet de prolonger H_M en une fonction $H_P : G(F) \to \mathfrak{a}_M$ en posant

$$H_P(umk) = H_M(m), \quad u \in U(F), m \in M(F), k \in K.$$

Pour tout $x \in G(F)$, $H_P(x)$ est déterminé par la classe de x dans $U(F)\backslash G(F)/K$. La fonction modulaire δ_P de $P(F)$ s'exprime comme $\delta_P(x) = e^{\langle 2\rho_P, H_P(p)\rangle}$.

Nous adoptons la convention suivante : soit $x \in G(F)$, écrivons-le comme

$$\begin{gathered} x = u_P(x)m_P(x)k_P(x) \in G(F), \\ u_P(x) \in U_P(F), m_P(x) \in M_P(F), k_P(x) \in K; \end{gathered}$$

à l'aide de la décomposition d'Iwasawa ; l'élément $m_P(x)$ (resp. $k_P(x)$) est uniquement déterminé comme une classe dans $M(F)/M(F) \cap K$ (resp. dans $P(F) \cap K\backslash K$).

Posons

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{M,F} &:= H_M(M(F)), \\ \tilde{\mathfrak{a}}_{M,F} &:= H_M(A_M(F)). \end{aligned}$$

Ils coïncident avec $\mathfrak{a}_M$ si F est archimédien ; sinon ils sont des réseaux dans $\mathfrak{a}_G$. Définissons leurs réseaux duaux dans $i\mathfrak{a}_M^*$

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{M,F}^\vee &:= \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}_{M,F}, 2\pi i\mathbb{Z}), \\ \tilde{\mathfrak{a}}_{M,F}^\vee &:= \mathrm{Hom}(\tilde{\mathfrak{a}}_{M,F}, 2\pi i\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Ils se réduisent à $\{0\}$ si F est archimédien ; sinon $i\mathfrak{a}_M^*/\mathfrak{a}_{M,F}^\vee$ et $i\mathfrak{a}_M^*/\tilde{\mathfrak{a}}_{M,F}^\vee$ sont des tores réels compacts.

Considérons un revêtement à m feuillets $\mathbf{p} : \tilde{G} \to G(F)$. On prend les images réciproques $\tilde{M}$ (resp. $\tilde{P}$) par $\mathbf{p}$ des sous-groupes de Lévi M (resp. sous-groupes paraboliques P) de G. Soit $M \in \mathcal{L}(M_0)$. En composant H_M avec $\mathbf{p}$, on obtient $H_M : \tilde{M} \to \mathfrak{a}_M$; en particulier on sait définir

$$\tilde{M}^1 := \mathrm{Ker}\,(H_M) = \mathbf{p}^{-1}(M(F)^1).$$

2.5 Mesures et intégrales

Soient F un corps local de caractéristique nulle et G un groupe F-réductif connexe. Supposons fixées des mesures de Haar sur $M(F)$ pour tout sous-groupe de Lévi M. Imposons les règles suivantes

– un sous-groupe compact maximal fixé de $G(F)$ est de masse totale 1 ;

– un groupe discret est muni de la mesure de comptage.

Fixons des mesures de Haar sur $\mathfrak{a}_M$ pour tout sous-groupe de Lévi M de G, d'où les mesures de Haar duales sur $i\mathfrak{a}_M^*$ au sens que

$$\iint_{i\mathfrak{a}_M^* \times \mathfrak{a}_M} \phi(H) e^{-\langle \lambda, H\rangle} \,\mathrm{d}H \,\mathrm{d}\lambda = \phi(0)$$

pour tout $h \in C_c(\mathfrak{a}_M)$. Si F est non archimédien, nous demandons que

$$\mathrm{mes}(i\mathfrak{a}_M^*/\tilde{\mathfrak{a}}_{M,F}^\vee) = 1.$$

Comme $\tilde{\mathfrak{a}}_{M,F}$ est soit discret, soit égal à $\mathfrak{a}_M$, et $\mathrm{Ker}\,(H_M|_{A_M(F)})$ est compact, on normalise ainsi la mesure de Haar sur $A_M(F)$. De même, une mesure de Haar sur $M(F)$ induit une mesure de Haar sur $M(F)^1$.

Fixons désormais une forme quadratique définie positive W_0-invariante sur $\mathfrak{a}_0$. Soient $L \supset M$ deux sous-groupes de Lévi de G, on vérifie que la décomposition canonique

$$\mathfrak{a}_M = \mathfrak{a}_M^L \oplus \mathfrak{a}_L$$

est orthogonale par rapport à la forme quadratique W_0-invariante. Puisque les mesures de Haar sur $\mathfrak{a}_M$ et $\mathfrak{a}_L$ sont déjà fixées, on en déduit une mesure canonique sur $\mathfrak{a}_M^L$. En dualisant, on normalise la mesure de Haar sur $(\mathfrak{a}_M^L)^*$.

Soient $P = MU \in \mathcal{P}(M)$ et K un sous-groupe compact maximal en bonne position relativement à M, alors on dispose de la décomposition d'Iwasawa $G(F) = U(F)M(F)K$. Il existe une mesure de Haar sur $U(F)$ de sorte que pour tout $f \in C_c(G(F))$,

$$\int_{G(F)} f(x)\,\mathrm{d}x = \iiint_{U(F)\times M(F)\times K} f(umk)\delta_P(m)^{-1}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}u. \tag{III.1}$$

Dans le cas F non archimédien et G non ramifié, la compatibilité des mesures est simple. Prenons K hyperspécial. Prenons la mesure de Haar sur $G(F)$ (resp. $M(F), U(F)$) telle que $G(F) \cap K$ (resp. $M(F) \cap K$, $U(F) \cap K$) a masse totale 1. Alors ces mesures vérifient (III.1).

Considérons maintenant les revêtements. Conservons les conventions précédentes pour les groupes réductifs et leurs sous-groupes. Imposons la règle suivante pour les mesures sur les revêtements :

– supposons que $\mathbf{p} : A \to B$ est un revêtement fini de groupes topologiques localement compacts, et B est muni d'une mesure de Haar, alors A est muni de la mesure de Haar telle que $\mathrm{mes}_B(E) = \mathrm{mes}_A(\mathbf{p}^{-1}(E))$ pour tout $E \subset A$ mesurable.

Montrons qu'avec nos définitions, appliquées au revêtements de $G(F)$, les formules d'intégration habituelles restent valables. Soit $\mathbf{p} : \tilde{G} \to G(F)$ un revêtement à m feuillets. En prenant les images réciproques par $\mathbf{p}$ et en utilisant le scindage unipotent, on a $\tilde{G} = U(F)\tilde{M}\tilde{K}$. Prenons les mesures de Haar sur $\tilde{G}$, $\tilde{M}$ et $\tilde{K}$ selon la règle ci-dessus. Alors pour tout $f \in C_c(\tilde{G})$, on a

$$\int_{\tilde{G}} f(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x} = \iiint_{U(F)\times\tilde{M}\times\tilde{K}} f(u\tilde{m}\tilde{k})\delta_P(m)^{-1}\,\mathrm{d}\tilde{k}\,\mathrm{d}\tilde{m}\,\mathrm{d}u. \tag{III.2}$$

En effet, il suffit de le vérifier pour les fonctions f qui se factorisent par $\mathbf{p} : \tilde{G} \to G(F)$. La convention sur les mesures permet de remplacer l'intégrale sur $\tilde{G}$ par celle sur $G(F)$, et idem pour $\tilde{M}, M(F)$ et $\tilde{K}, K$. L'identité cherchée en résulte. Les compatibilités avec d'autres décompositions (eg. la décomposition $G = KAK$) se vérifient de la même manière.

2.6 Commutateurs

On revient aux notations de §2.1. Définissons la sous-variété

$$\mathrm{Comm}(M) := \{(x, y) \in M \times M : xy = yx\}.$$

Pour $(x, y) \in \mathrm{Comm}(M)(F)$, choisissons des relèvements $\tilde{x}, \tilde{y} \in \widetilde{M}$, alors le commutateur

$$[\tilde{x}, \tilde{y}] := \tilde{x}^{-1}\tilde{y}^{-1}\tilde{x}\tilde{y} \in \mu_m;$$

ne dépend pas du choix de relèvements. On en déduit une application continue $[\cdot,\cdot] : \mathrm{Comm}(M)(F) \to \mu_m$, notée $(x, y) \mapsto [x, y]$. Les propriétés suivantes sont immédiates.

– Si x, x' commutent à y, alors $[xx', y] = [x, y][x', y]$.
– Soit $t \in M(F)$, alors $[txt^{-1}, tyt^{-1}] = [x, y]$ pour tout $(x, y) \in \mathrm{Comm}(M)(F)$.
– Pour tout $(x, y) \in \mathrm{Comm}(M)(F)$, on a $[x, y] = [y, x]^{-1}$.
– Si $(x, y) \in \mathrm{Comm}(M)(F)$ et s'ils appartiennent à un sous-groupe de $M(F)$ sur lequel $\mathbf{p}$ est scindé, alors $[x, y] = 1$.

Soit $\gamma \in M(F)$, on a

$$y^{-1}\tilde{\gamma}y = [\gamma, y]\tilde{\gamma},$$
$$y\tilde{\gamma}y^{-1} = [y, \gamma]\tilde{\gamma}, \quad y \in M^{\gamma}(F).$$

D'où un homomorphisme continu $M^{\gamma}(F) \to \mu_m$, noté $[\cdot, \gamma] : y \mapsto [y, \gamma]$.

Définition 2.6.1 (cf. [35, I.8])**.** Un élément $\gamma \in M(F)$ est dit bon si $[\cdot, \gamma] = 1$ sur $M^{\gamma}(F)$. Cette propriété ne dépend que de la classe de conjugaison de γ. On dit qu'une classe de conjugaison dans $\widetilde{M}$ est bonne si son image par $\mathbf{p}$ l'est.

Montrons que la bonté est stable par petite perturbation par le centre. Posons

$$A_M(F)^{\dagger} := A_M(F)^m, \tag{III.3}$$
$$\widetilde{A_M} := \mathbf{p}^{-1}(A_M(F)), \tag{III.4}$$
$$\widetilde{A_M}^{\dagger} := \mathbf{p}^{-1}(A_M(F)^{\dagger}). \tag{III.5}$$

Alors $\widetilde{A_M}^{\dagger}$ (resp. $A_M(F)^{\dagger}$) est un sous-groupe ouvert et fermé d'indice fini de $\widetilde{A_M}$ (resp. de $A_M(F)$). De plus, $\widetilde{A_M}^{\dagger}$ est central dans $\tilde{M}$.

Lemme 2.6.2. *Pour tout $\gamma \in M(F)$ et tout $a \in A_M(F)^{\dagger}$, γ est bon si et seulement si $a\gamma$ l'est.*

Démonstration. On a $M^{a\gamma} = M^{\gamma}$ car $a \in A_M(F)$. Soit $x \in M^{a\gamma}$, on a $[x, a\gamma] = [x, \gamma]$ car $\widetilde{A_M}^{\dagger}$ est central. Cela permet de conclure. □

3 Revêtements non ramifiés et adéliques

3.1 Le cas non ramifié

Soit F un corps local non archimédien avec $q := |\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F|$. On se donne un revêtement $\mathbf{p} : \tilde{M} \to M(F)$ à m feuillets tel que M est non ramifié. Fixons un sous-groupe hyperspécial $K \subset M(F)$ et supposons qu'il existe un scindage continu $s : K \to \tilde{M}$ de $\mathbf{p}$ au-dessus de K.

Regardons K comme un sous-groupe de $\tilde{M}$ en fixant un tel scindage s. Prenons la mesure de Haar sur $M(F)$ telle que $\mathrm{mes}(K) = 1$, d'où une mesure de Haar sur $\tilde{M}$ selon les conventions de §2.5. Cette mesure est canonique car les sous-groupes hyperspéciaux sont conjugués par $M_{\mathrm{AD}}(F)$.

On définit l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}(\tilde{G}//K)$: c'est l'espace des fonctions K-bi-invariantes à support compact, muni du produit de convolution. Soit $\chi \in \widehat{\mu_m}$, posons $\mathcal{H}_{\chi}(\tilde{G}//K) := \mathcal{H}(\tilde{G}//K) \cap C^{\infty}_{c,\chi}(\tilde{G})$; c'est une sous-algèbre et on a $\mathcal{H}(\tilde{G}//K) = \prod_{\chi \in \widehat{\mu_m}} \mathcal{H}_{\chi}(\tilde{G}//K)$. Définissons la fonction $f_{K,\chi} \in \mathcal{H}_{\chi}(\tilde{G}//K)$ à support dans $\tilde{K}$ telle que

$$\forall \varepsilon \in \mu_m,\ \forall k \in K, \quad f_{K,\chi}(\varepsilon K) = \chi(\varepsilon),$$
$$\forall \tilde{x} \notin \tilde{K}, \quad f_{K,\chi}(\tilde{x}) = 0.$$

Selon notre convention de mesures, $f_{K,\chi}$ est l'unité de $\mathcal{H}_{\chi}(\tilde{G}//K)$. Si $\chi = \chi_{-}^{-1}$ (i.e. on considère l'algèbre de Hecke sphérique anti-spécifique), posons $f_K = f_{K,\chi}$.

En particulier, on peut définir l'algèbre de Hecke anti-spécifique associée à K, notée $\mathcal{H}_{\text{-}\text{-}}(\tilde{G}//K)$ dont f_K est l'unité. De même, on peut définir l'algèbre d'Iwahori-Hecke anti-spécifique (ou plus généralement, χ-équivariante) sous les mêmes hypothèses.

Définition 3.1.1. On dit qu'un triplet $(\mathbf{p}, K, s)$ vérifie la condition non ramifiée si
- $\mathbf{p} : \tilde{M} \to M(F)$ est un revêtement ;
- $K \subset M(F)$ est un sous-groupe hyperspécial ;
- $s : K \to \tilde{M}$ est un scindage de $\mathbf{p}$ au-dessus de K par lequel K s'identifie à un sous-groupe de $\tilde{M}$;
- q est premier avec $m := |\mathrm{Ker}\,(\mathbf{p})|$, i.e. $\mathbf{p}$ est modéré ;
- soient T un F-tore déployé maximal et $M_0 := Z_M(T)$ en bonne position relativement à K, alors le groupe

$$\tilde{H} := Z_{\widetilde{M_0}}(K \cap M_0(F)) \tag{III.6}$$

est commutatif.

Par abus de notations, on dit aussi que $\mathbf{p} : \tilde{M} \to M(F)$ muni des données (K, s) est un revêtement non ramifié.

La dernière condition technique sert à garantir la commutativité de l'algèbre de Hecke, ce qui fait l'objet du paragraphe suivant. Observons aussi que les F-tores déployés maximaux en bonne position relativement à K sont conjugués par K, d'après [25, 7.4.9 (i)].

Lemme 3.1.2. *Si la condition 3.1.1 est vérifiée, alors le scindage unipotent 2.2.1 coïncide avec s sur $K \cap M_{unip}(F)$.*

Démonstration. Il suffit de le vérifier sur $K \cap U(F)$ où U est un sous-groupe unipotent quelconque. Notons p la caractéristique résiduelle de F. Comme $U(F)$ est une union croissante de pro-p-groupes, $K \cap U(F)$ est un pro-p-groupe. Donc l'application $u \mapsto u^m$ est un homéomorphisme de $K \cap U(F)$ sur lui-même car m est premier à p. Vu la construction du scindage unipotent, on voit qu'il n'existe qu'un seul scindage possible de $\mathbf{p}$ au-dessus de $K \cap U(F)$. □

Remarque 3.1.3. Soit $\mathbf{p} : \tilde{M} \to M(F)$ un revêtement à m feuillets. Soit $\mu_m \to \mu_{m'}$ un homomorphisme quelconque et posons $\mathbf{p}' : \tilde{M}' \to M(F)$ la poussée-en-avant de $\mathbf{p}$ via $\mu_m \to \mu_{m'}$. Alors le triplet $(\mathbf{p}', K, s)$ vérifie la condition non ramifiée si $(\mathbf{p}, K, s)$ la vérifie.

Remarque 3.1.4. Soit $\mathbf{p} : \tilde{G} \to G(F)$ un revêtement et $(\mathbf{p}, K, s)$ un triplet vérifiant la condition non ramifiée pour $\tilde{G}$. Soient M un sous-groupe de Lévi en bonne position relativement à M et $\mathbf{p}_M : \tilde{M} \to M(F)$ le revêtement induit. Alors $(\mathbf{p}_M, K \cap M(F), s|_{K \cap M(F)})$ satisfait aussi à la condition non ramifiée pour $\tilde{M}$.

3.2 Isomorphisme de Satake

Considérons un revêtement $\mathbf{p} : \tilde{G} \to G(F)$ avec un sous-groupe hyperspécial K et un scindage $s : K \to \tilde{G}$ vérifiant la condition non ramifiée. Nous allons établir une variante de l'isomorphisme de Satake.

Définissons le support de l'algèbre de Hecke sphérique anti-spécifique par

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{H}_{\text{-}\text{-}}(\tilde{G}//K)) := \bigcup \left\{ \mathrm{Supp}(f) : f \in \mathcal{H}_{\text{-}\text{-}}(\tilde{G}//K) \right\}.$$

Fixons désormais un F-tore déployé maximal T en bonne position relativement à K. Alors $M_0 := Z_G(T)$ est un sous-groupe de Lévi minimal de G ; de plus, M_0 est un F-tore non ramifié. Posons $K_0 := K \cap M_0(F)$. Définissons $\tilde{H} \subset \tilde{T}$ comme dans 3.1.1.

Lemme 3.2.1 (cf. [62, 9.2]). *On a* $\mathrm{Supp}(\mathcal{H}_{--}(\tilde{G}//K)) = K\tilde{H}K$.

Démonstration. Dans [62] on ne considère que les groupes déployés, or la même preuve s'adapte aux groupes réductifs connexes non ramifiés sans modification. □

Remarque 3.2.2. C'est loisible d'identifier W_0^G à $(N_G(T)(F) \cap K)/K_0$. Comme K_0 centralise $\tilde{H}$, on voit que W_0^G opère sur $\tilde{H}$. D'autre part, 3.2.1 appliqué à $\widetilde{M_0}$ et K_0 affirme que

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{H}_{--}(\widetilde{M_0}//K_0)) = \tilde{H}$$

(on peut aussi le vérifier directement). Cela permet de faire opérer W_0^G sur $\mathcal{H}_{--}(\widetilde{M_0}//K_0)$ de façon canonique.

Posons

$$\Lambda := \{\lambda \in X_*(T) : \lambda(\varpi_F) \in \mathbf{p}(\tilde{H})\},$$

Alors Λ est un sous-réseau de $X_*(T)$ ayant le même rang ; en effet, $\Lambda \supset mX_*(T)$.

Lemme 3.2.3. *L'algèbre* $\mathcal{H}_{--}(\widetilde{M_0}//K_0)$ *est commutative. De plus, elle est isomorphe à l'algèbre* $\mathbb{C}[\Lambda]$, *ce qui s'identifie à l'algèbre en polynômes de* $\dim X_*(T)$ *variables.*

Démonstration. Il suffit de considérer le support de $\mathcal{H}_{--}(\widetilde{M_0}//K_0)$. On a déjà remarqué que $\mathrm{Supp}(\mathcal{H}_{--}(\widetilde{M_0}//K_0)) = \tilde{H}$, qui est commutatif selon 3.1.1.

Choisissons une $\mathbb{Z}$-base $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ de Λ. Pour tout $1 \leq i \leq r$, prenons une fonction $f_i \in \mathcal{H}_{--}(\widetilde{M_0}//K_0)$ à support dans $K_0\mathbf{p}^{-1}(\lambda(\varpi_F))K_0$. Alors $\lambda_i \mapsto f_i$ se prolonge en un isomorphisme $\mathbb{C}[\Lambda] \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{--}(\widetilde{M_0}//K_0)$. □

Fixons $P_0 = M_0U_0 \in \mathcal{P}(M_0)$. Prenons la mesure de Haar sur $U_0(F)$ telle que $\mathrm{mes}(K \cap U_0(F)) = 1$. Définissons l'application

$$\mathcal{S} : \mathcal{H}_{--}(\tilde{G}//K) \to \mathcal{H}_{--}(\widetilde{M_0}//K_0)$$
$$\mathcal{S}(f)(\tilde{x}) = \delta_{P_0}(x)^{-\frac{1}{2}} \int_{U_0(F)} f(u\tilde{x})\,\mathrm{d}u.$$

On vérifie que $\mathcal{S}$ est un homomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres et il est à image dans $\mathcal{H}_{--}(\widetilde{M_0}//K_0)^{W_0^G}$. Les arguments sont identiques à ceux pour le cas des groupes réductifs, cf. [28, §4] §4. Par contre, le lemme suivant fait intervenir le revêtement.

Lemme 3.2.4. *Soit* $\tilde{t} \in \tilde{T}$ *tel que* $|\alpha(t)| \geq 1$ *pour toute racine positive* α *pour* (T, P). *Alors on a*

$$K\tilde{t}K \cap U_0(F)\tilde{t}K = \tilde{t}K.$$

Si $u \in U_0(F)$, $k \in K$ *satisfont à* $u\tilde{t} = \tilde{t}k$, *alors* $u \in U_0(F) \cap K$.

Démonstration. L'inclusion $K\tilde{t}K \cap U_0(F)\tilde{t}K \supset \tilde{t}K$ est claire. Prouvons l'autre inclusion dans le premier énoncé. Dans $G(F)$ on a $KtK \cap U_0(F)tK = tK$ d'après [25, 4.4.4]. Soient $u \in U_0(F)$ et $k \in K$ tels que $u\tilde{t}k \in K\tilde{t}K \cap U_0(F)\tilde{t}K$. Il existe donc $\varepsilon \in \mu_m$ et $k' \in K$ tels que $u\tilde{t}k = \varepsilon\tilde{t}k'$. Posons $k'' := k'k^{-1}$, alors

$$u\tilde{t} = \varepsilon\tilde{t}k'',$$

ou encore

$$t^{-1}ut = \varepsilon k''.$$

D'après l'invariance du scindage unipotent 2.2.1 et la compatibilité 3.1.2, on a $\varepsilon = 1$. Cela prouve à la fois les deux énoncés voulus. □

Proposition 3.2.5. *On a l'isomorphisme d'algèbres*

$$\mathcal{H}_{--}(\tilde{G}//K) \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{H}_{--}(\widetilde{M_0}//K_0)^{W_0^G}.$$

Démonstration. Il suffit de reprendre la démonstration usuelle de l'isomorphisme de Satake sauf qu'il faut utiliser 3.2.4. Plus précisément, soient $\lambda, \lambda' \in X_*(T)$, écrivons $\lambda \leq_{P_0} \lambda'$ si $\langle \alpha, \lambda' - \lambda \rangle \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_0$. Posons

$$\Lambda^- := \{\lambda \in \Lambda : \lambda \leq_{P_0} 0\}.$$

Pour tout $\tilde{t} \in \tilde{T} \cap \tilde{H}$, on peut prendre $f_{\tilde{t}}$ l'élément de $\mathcal{H}_{--}(\tilde{G}//K)$ à support dans $K\tilde{t}K$ tel que $f_{\tilde{t}}(\tilde{t}) = 1$ d'après 3.2.1. Pour tout $\lambda \in \Lambda^-$, sélectionnons une image réciproque $\tilde{t}$ de $t = \lambda(\varpi_F) \in T$ et posons $f_\lambda := f_{\tilde{t}}$. D'après la décomposition de Cartan et 3.2.1, on voit que $\mathcal{B} := \{f_\lambda : \lambda \in \Lambda^-\}$ est une base pour $\mathcal{H}_{--}(\tilde{G}//K)$.

La même construction fournit une base $\{g_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ pour $\mathcal{H}_{--}(\widetilde{M_0}//K_0)$. Pour tout $[\lambda] \in \Lambda/W_0^G$, posons

$$f_{[\lambda]} := \sum_{\lambda \in [\lambda]} g_\lambda.$$

Alors $\mathcal{B}_0 := \{f_{[\lambda]} : [\lambda] \in \Lambda/W_0^G\}$ est une base pour $\mathcal{H}_{--}(\widetilde{M_0}//K_0)^{W_0^G}$. Chaque W_0^G-orbite dans Λ rencontre Λ^- en un et un seul point, par conséquent $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_0$ sont en bijection canonique.

Sélectionnons un ordre total $\leq$ sur $X_*(T)$ tel que $\lambda \leq_{P_0} \lambda'$ entraîne $\lambda \leq \lambda'$. Identifions $X_*(T)$ et $T(F)/T(F) \cap K$ à l'aide de $\lambda \mapsto \lambda(\varpi_F)$ et notons $\nu : T(F) \to X_*(T)$ l'homomorphisme ainsi obtenu. Dans $G(F)$, on a

$$\forall t, t' \in T(F), \quad Kt'K \cap U_0(F)tK \neq \emptyset \Rightarrow \nu(t) \leq_{P_0} \nu(t')$$

d'après [25, 4.4.4]. Il en résulte que $\mathcal{S}$ s'écrit dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}_0$ comme

$$\mathcal{S} f_{\lambda'} = \sum_{\lambda \leq \lambda'} c(\lambda, \lambda') f_{[\lambda]}, \quad c(\lambda, \lambda') \in \mathbb{C}^\times.$$

C'est une matrice triangulaire inférieure. Montrons qu'il n'y a pas de zéro dans la diagonale. Étant fixé $\lambda' \in \Lambda^-$, sélectionnons $\tilde{t}' \in \mathbf{p}^{-1}(\lambda'(\varpi_F))$ comme précédemment, alors $\tilde{t}'$ satisfait à l'hypothèse de 3.2.4. Maintenant 3.2.4 entraîne que

$$(\mathcal{S} f_{\lambda'})(\tilde{t}') = \delta_{P_0}(t')^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{U_0(F)} f_{\lambda'}(u\tilde{t}') \, du = \delta_{P_0}(t')^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{U_0(F) \cap K} 1 \, du.$$

Cela entraîne que $c(\lambda', \lambda') = \delta_{P_0}(t')^{-\frac{1}{2}} \neq 0$, ce qu'il fallait démontrer. □

Vu 3.2.3, on en déduit

Corollaire 3.2.6. *L'algèbre $\mathcal{H}_{--}(\tilde{G}//K)$ est commutative de type fini sur $\mathbb{C}$.*

3.3 Le cas adélique

Considérons un corps de nombres F et posons $\mathbb{A} = \prod'_v F_v$ son anneau d'adèles. Notons V_F l'ensemble de places de F. Notons $V_\infty := \{v \in V_F : v | \infty\}$. Pour $S \subset V_F$, nous utilisons l'indice S (eg. F_S, π_S, f_S) pour signifier les composantes $v \in S$ et l'exposant S (eg. F^S, π^S, f^S) pour signifier les composantes $v \notin S$.

Comme dans le cas local, on se donne un F-groupe réductif M, un entier m et on considère une extension centrale de groupes topologiques

$$1 \to \mu_m \to \tilde{M} \xrightarrow{\mathbf{p}} M(\mathbb{A}) \to 1.$$

Soit $S \subset V_F$ fini. Notons $\mathbf{p}_S : \tilde{M}_S \to M(F_S)$ la fibre de $\mathbf{p}$ au-dessus de $M(F_S)$. Lorsque $S = \{v\}$ on écrit tout simplement $\mathbf{p}_v : \tilde{M}_v \to M(F_v)$, c'est un revêtement de $M(F_v)$.

On dit que $\mathbf{p} : \tilde{M} \to M(\mathbb{A})$ est un revêtement à m feuillets si l'on se donne les données

– une immersion $\mathbf{i} : M(F) \to \tilde{M}$ qui scinde $\mathbf{p}$ au-dessus de $M(F)$;

– un ensemble fini de places $V_{\mathrm{ram}} \supset V_\infty$;

– un modèle lisse et connexe de M sur $\mathfrak{o}_{\mathrm{ram}}$, l'anneau de $(V_{\mathrm{ram}} \setminus V_\infty)$-entiers dans F ;

vérifiant les conditions suivantes

(G1) pour toute $v \notin V_{\mathrm{ram}}$, posons $K_v := M(\mathfrak{o}_v)$, alors il existe un scindage continu $s_v : K_v \to \tilde{M}_v$ que l'on fixe ;

(G2) le triplet $(\mathbf{p}_v : \tilde{M}_v \to M(F_v), K_v, s_v)$ vérifie la condition non ramifiée 3.1.1 ;

(G3) pour tout voisinage $\tilde{\mathcal{V}}$ de 1 dans $\tilde{M}$, il existe un ensemble fini de places $S \supset V_{\mathrm{ram}}$ tel que $s_v(K_v) \subset \tilde{\mathcal{V}}$ pour tout $v \notin S$.

Ces propriétés passent aux sous-groupes de Lévi et sont stables par pousser-en-avant en μ_m.

Le lemme 3.1.2 permet de définir le scindage unipotent adélique $M_{\mathrm{unip}}(\mathbb{A}) \to \tilde{M}$ en rassemblant les scindages unipotents locaux. Vu la construction du scindage unipotent, le résultat suivant est clair.

Lemme 3.3.1. *Le scindage* $\mathbf{i}$ *et le scindage unipotent coïncident sur* $M_{\mathrm{unip}}(F)$.

Nous supprimons systématiquement les symboles $\mathbf{i}$ et $(s_v)_{v \notin V_{\mathrm{ram}}}$, et nous regardons $G(F)$ et K_v comme des sous-groupes de $\tilde{M}$.

Soit $S \subset V_F$, on a l'isomorphisme canonique

$$\left(\prod\nolimits'_{v \in S} \tilde{M}_v\right) / \mathbf{N}_S \xrightarrow{\sim} \tilde{M}_S$$

où le produit restreint est pris par rapport aux K_v pour $v \notin V_{\mathrm{ram}}$ si $|S| = \infty$, et

$$\mathbf{N}_S := \left\{ (\boldsymbol{\varepsilon}_v)_{v \in S} \in \bigoplus_{v \in S} \mu_m : \prod_v \boldsymbol{\varepsilon}_v = 1 \right\}.$$

Lorsque $S = V_F$, posons tout simplement $\mathbf{N} = \mathbf{N}_S$.

Le choix de V_{ram}, le $\mathfrak{o}_{\mathrm{ram}}$-modèle lisse et le relèvement de K_v n'ont pas d'importance essentielle, quitte à passer à un ensemble fini de places plus grand. Étant donné un revêtement adélique, nous supposons fixées des telles données dans l'article.

Un élément $\tilde{x} \in \tilde{M}_S$ s'exprime comme $[\tilde{x}_v]_{v \in S}$, où $(\tilde{x}_v)_{v \in S}$ est un représentant de $\tilde{x}$ dans $\prod'_{v \in S} \tilde{M}_v$. Par abus de notation, on écrit les décompositions tensorielles $\pi = \bigotimes_{v \in S} \pi_v$ pour des représentations irréductibles admissibles (resp. $f = \prod_{v \in S} f_v$ pour des fonctions) sur $\tilde{M}_S$, où π_v (resp. f_v) sont des représentations (resp. fonctions) sur $\tilde{M}_v$, bien que π et f sont définies sur le quotient $\prod'_{v \in S} \tilde{M}_v / \mathbf{N}_S$. Soit $\chi \in \widehat{\mu_m}$, alors $f = \prod_v f_v$ est χ-équivariant si et seulement si chaque f_v l'est. Idem pour les représentations.

Les mêmes conventions de mesures de §2.5 s'imposent dans ce cadre ; nous demandons de plus que

– si $v \notin V_{\mathrm{ram}}$, on utilise la mesure sur $M(F_v)$ pour laquelle $\mathrm{mes}_{M(F_v)}(K_v) = 1$;

– pour tout sous-groupe unipotent $U \subset M$, on prend la mesure sur $U(\mathbb{A})$ pour laquelle

$$\mathrm{mes}(U(F) \backslash U(\mathbb{A})) = 1.$$

De tels choix sont possibles. On a les mêmes formules d'intégration comme précédemment.

3.4 L'application de Harish-Chandra : le cas adélique

L'application de Harish-Chandra s'adapte au cas adélique : soient G un F-groupe réductif connexe et M un sous-groupe de Lévi. Définissons $H_M : M(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_M$ par

$$\forall \chi \in X^*(M), \quad \langle \chi, H_M(x) \rangle = \log |\chi(x)|$$

où $|\cdot| = \prod_v |\cdot|_v$ est la valeur absolue adélique. Notons $M(\mathbb{A})^1 := \mathrm{Ker}\,(H_M)$, alors $M(F) \subset M(\mathbb{A})^1$.

Définition 3.4.1. On dit qu'un sous-groupe compact maximal $K = \prod_v K_v$ de $G(\mathbb{A})$ est en bonne position (ou réciproquement) relativement à M si K_v l'est pour tout v.

Fixons un tel sous-groupe compact maximal K. Soit $P = MU \in \mathcal{P}(M)$, on obtient l'application $H_P : G(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_M$ en posant

$$H_P(umk) = H_M(m), \quad u \in U(\mathbb{A}), m \in M(\mathbb{A}), k \in K.$$

Soit $\mathbf{p} : \tilde{G} \to G(\mathbb{A})$ un revêtement adélique. Prenons les groupes K et $P = MU$ comme précédemment et notons $\tilde{M} = \mathbf{p}^{-1}(M(\mathbb{A}))$, $\tilde{K} = \mathbf{p}^{-1}(K)$. On a la formule d'intégration (cf. (III.2))

$$\int_{\tilde{G}} f(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x} = \iiint_{U(\mathbb{A}) \times \tilde{M} \times \tilde{K}} f(u\tilde{m}\tilde{k})\delta_P(m)^{-1}\,\mathrm{d}\tilde{k}\,\mathrm{d}\tilde{m}\,\mathrm{d}u.$$

En composant les applications H_M, H_P ci-dessus avec $\mathbf{p}$, on obtient leurs avatars sur le revêtement, notés encore H_M, H_P. Posons $\tilde{G}^1 = \mathrm{Ker}\,(H_G) = \mathbf{p}^{-1}(G(\mathbb{A})^1)$, on a $G(F) \subset \tilde{G}^1$. Les notions de domaines de Siegel, hauteurs etc. se généralisent à cette situation. Cela permet de développer la théorie des formes automorphes et la décomposition spectrale sur les revêtements (voir [66, I.2]).

Signalons une décomposition utile pour l'étude de la formule des traces. Posons $F_\infty := \prod_{v|\infty} F_v$. Le F-tore A_G étant déployé, il est l'extension des scalaires d'un $\mathbb{Q}$-tore déployé $A_{G,\mathbb{Q}}$. L'immersion canonique $\mathbb{R} \to F_\infty$ fournit une immersion $A_{G,\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) \hookrightarrow A_G(F_\infty)$. Notons $A_{G,\infty}$ la composante neutre de $A_{G,\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ pour la topologie usuelle. On vérifie que $G(\mathbb{A}) = G(\mathbb{A})^1 \times A_{G,\infty}$. Si M est un sous-groupe de Lévi, alors il existe une immersion canonique $A_{G,\infty} \hookrightarrow A_{M,\infty}$. Rappelons que $A_{G,\infty}$ est un produit de $\mathbb{R}_{>0}$, donc simplement connexe. Cela permet de relever la décomposition ci-dessus canoniquement au revêtement : $\tilde{G} = \tilde{G}^1 \times A_{G,\infty}$.

3.5 K_2-torseurs multiplicatifs de Brylinski-Deligne

Montrons que les revêtements provenant des $\mathbf{K}_2$-torseurs multiplicatifs de Brylinski et Deligne [27] satisfont nos hypothèses pour un revêtement adélique. Dans le cas G simplement connexe et déployé, ce sont exactement les extensions considérées dans [60]. Rappelons très brièvement la construction.

Soit S un schéma quelconque, notons S_{Zar} le gros site de Zariski associé. La K-théorie de Quillen fournit des faisceaux en groupes $(\mathbf{K}_n)_{n\geq 0}$ sur S_{Zar} ; notons que $\mathbf{K}_1 = \mathbb{G}_\mathrm{m}$. Soit G un S-schéma en groupes réductif connexe. Une extension centrale par $\mathbf{K}_2$ est alors un $\mathbf{K}_2$-torseur $\tilde{G}(\cdot)$ sur G muni d'une structure multiplicative convenable (voir [27, §1]) dans la catégorie des faisceaux en groupes sur S_{Zar}. Nous l'appelons un $\mathbf{K}_2$-torseur multiplicatif. Lorsque S est régulier de type fini sur un corps, la catégorie de ces torseurs est concrètement décrite dans [27].

Dans ce qui suit, G désigne toujours un groupe réductif connexe sur la base en question et $\tilde{G}(\cdot)$ désigne un $\mathbf{K}_2$-torseur multiplicatif sur G. Puisque $\tilde{G}(\cdot) \to G$ est un torseur pour la topologie de Zariski, si S est le spectre d'un corps ou d'un anneau à valuation discrète, alors $\mathbf{K}_2(S) \hookrightarrow \tilde{G}(S) \twoheadrightarrow G(S)$ est une extension centrale de groupes.

Revêtements locaux Prenons F un corps local, $X := \operatorname{Spec} F$. Le théorème de Matsumoto assure que $K_2(F)$ est l'objet initial de la catégorie des applications (dites "symboles")

$$\{\cdot,\cdot\} : F^\times \times F^\times \to A, \quad A : \text{ un groupe abélien,}$$

tel que $\{\cdot,\cdot\}$ est bi-multiplicatif, alterné et $\{x,y\} = 1$ lorsque $x + y = 1$. Ainsi on peut parler des symboles localement constants sur $F^\times \times F^\times$. D'après un théorème de Moore, cette sous-catégorie admet un objet initial $K_2^{\mathrm{cont}}(F)$ muni d'un homomorphisme naturel $K_2(F) \to K_2^{\mathrm{cont}}(F)$. Désignons le groupe de racines d'unité dans F par $\mu(F)$. On a

$$K_2^{\mathrm{cont}}(F) = \begin{cases} \{1\}, & \text{si } F = \mathbb{C}; \\ \mu(F), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Posons $n_F := |K_2^{\mathrm{cont}}(F)|$. Alors $F^\times \times F^\times \to K_2^{\mathrm{cont}}(F)$ s'identifie au n_F-ième symbole de Hilbert, et $K_2^{\mathrm{cont}}(F) \simeq \mu_{n_F}$.

Soit $\tilde{G}(\cdot)$ un $\mathbf{K}_2$-torseur multiplicatif sur G. On prend les F-points et on obtient une extension centrale $\tilde{G}(F)$ de $G(F)$ par $K_2(F)$. On la pousse via $K_2(F) \to K_2^{\mathrm{cont}}(F)$. De la structure de torseur se déduisent des trivialisations locales (pour la topologie de Zariski) de cette extension centrale. Ces cartes se recollent via des sections locales de $\mathbf{K}_2$ sur G, qui fournissent des fonctions dans $K_2^{\mathrm{cont}}(F)$ sur des ouverts de $G(F)$. Elles sont localement constantes sur $G(F)$ (pour la topologie induite par $|\cdot|_F$) d'après [27, 10.2], donc on obtient une extension centrale topologique $K_2^{\mathrm{cont}}(F) \hookrightarrow \tilde{G} \twoheadrightarrow G(F)$. Si l'on choisit un isomorphisme $K_2^{\mathrm{cont}}(F) \simeq \mu_{n_F}$, alors on obtient un revêtement à n_F feuillets de $G(F)$ selon la définition dans §2.

Extension résiduelle Décrivons la construction dans [27, 12.11] qui sera bientôt utile. On se donne un corps local non archimédien F. Posons $V := \operatorname{Spec}(\mathfrak{o}_F)$, η son point générique et s son point spécial. Soient X_V un V-schéma lisse, X_η (resp. X_s) sa fibre générique (resp. spéciale) et E un $\mathbf{K}_2$-torseur sur X_η. Avec les notations standards, on a les inclusions

$$X_\eta \overset{j}{\hookrightarrow} X_V \overset{i}{\hookleftarrow} X_s.$$

Imposons d'abord la condition suivante :

$(*)$ chaque point de X_s admet un voisinage ouvert U dans X_V tel que E se trivialise sur $U \cap X_\eta$.

Cette condition dit que j_*E est un $j_*\mathbf{K}_2$-torseur sur X_V. Via l'homomorphisme de résidu $j_*\mathbf{K}_2 \to i_*\mathbf{K}_1 = i_*\mathbb{G}_\mathrm{m}$, on obtient un $i_*\mathbb{G}_\mathrm{m}$-torseur sur X_V, ou ce qui revient au même, un $\mathbb{G}_\mathrm{m}$-torseur sur X_s. Notons-le E_s.

Prenons maintenant $X_V = G_V$ un schéma en groupes réductif, avec fibre générique G et fibre spécial G_s. Prenons $E = \tilde{G}(\cdot)$ un $\mathbf{K}_2$-torseur multiplicatif sur G. Alors $\tilde{G}(\cdot)_s$ hérite la structure multiplicative : on obtient ainsi une extension centrale de G_s par $\mathbb{G}_\mathrm{m}$.

En général, la condition $(*)$ est satisfaite quitte à passer à un revêtement étale $V' \to V$. On construit ainsi le $\mathbb{G}_\mathrm{m}$-torseur $\tilde{G}(\cdot)_s$ par descente galoisienne. On l'appelle l'extension résiduelle de $\tilde{G}(\cdot)$. Si l'extension résiduelle est scindée, on dit que $\tilde{G}(\cdot)$ est résiduellement scindé.

Revêtements adéliques Prenons F un corps de nombres, $X := \operatorname{Spec}(\mathfrak{o}_F)$; posons $n_F := |\mu(F)|$. Soient G un F-groupe réductif connexe et $\tilde{G}(\cdot)$ un $\mathbf{K}_2$-torseur sur G.

Prenons S_1 un ensemble fini de points fermés de X (i.e. des places non archimédiennes). Notons S l'union de S_1 avec les places archimédiennes de F. Pour S_1 suffisamment grand, on peut supposer que :

– G admet un modèle lisse sur $X \setminus S_1$;

– $\tilde{G}(\cdot)$ est la fibre générique d'un $\mathbf{K}_2$-torseur sur G défini sur $X \setminus S_1$, notée encore $\tilde{G}(\cdot)$ (voir [27, 10.5]) ;
– n_{F_v} est premier avec la caractéristique résiduelle de F_v pour tout $v \in X \setminus S_1$.

Soient $(S_1, G, \tilde{G}(\cdot))$ et $(S_1', G', \tilde{G}'(\cdot))$ deux données comme ci-dessus, alors elles deviennent isomorphes si l'on se restreint à $X \setminus S_1''$ où $S_1'' \supset S_1 \cup S_1'$ est fini et assez grand.

Soit v une place de F, on construit l'extension centrale topologique

$$1 \to K_2^{\mathrm{cont}}(F_v) \to \tilde{G}_v \to G(F_v) \to 1. \tag{III.7}$$

D'autre part, [27, 10.6] affirme que $H^1(X \setminus S_1, \mathbf{K}_2) = 0$, d'où une extension centrale

$$1 \to H^0(X \setminus S_1, \mathbf{K}_2) \to \tilde{G}(X \setminus S_1) \to G(X \setminus S_1) \to 1. \tag{III.8}$$

Pour toute place v, il y a un morphisme naturel de (III.8) dans (III.7). Lorsque $v \in X \setminus S_1$, ce morphisme se factorise via

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & K_2(\mathfrak{o}_v) \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{G}(\mathfrak{o}_v) \arrow[r] \arrow[d] & G(\mathfrak{o}_v) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & K_2^{\mathrm{cont}}(F_v) \arrow[r] & \tilde{G}_v \arrow[r] & G(F_v) \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Or n_{F_v} est premier avec la caractéristique résiduelle de F_v, donc la composée $K_2(\mathfrak{o}_v) \to K_2(F_v) \to K_2^{\mathrm{cont}}(F_v)$ est triviale et ce diagramme fournit un scindage de (III.7) au-dessus de $G(\mathfrak{o}_v)$.

Réunissant ce que l'on a obtenu, il a un diagramme commutatif avec lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & H^0(X \setminus S_1, \mathbf{K}_2) \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{G}(X \setminus S_1) \arrow[r] \arrow[d] & G(X \setminus S_1) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ddl, dashed] & 1 \\
1 \arrow[r] & \prod_{\substack{v \in S \\ F_v \neq \mathbb{C}}} \mu(F_v) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_S"'] & \prod_{v \in S} \tilde{G}_v \times \prod_{v \in X \setminus S_1} G(\mathfrak{o}_v) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{v \in S} G(F_v) \times \prod_{v \in X \setminus S_1} G(\mathfrak{o}_v) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mu(F) \arrow[r] & \tilde{G}_S \times \prod_{v \in X \setminus S_1} G(\mathfrak{o}_v) \arrow[r] & \prod_{v \in S} G(F_v) \times \prod_{v \in X \setminus S_1} G(\mathfrak{o}_v) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

où $\alpha_S((\zeta_v)_{\substack{v \in S \\ F_v \neq \mathbb{C}}}) = \prod_v \zeta_v^{[\mu(F_v):\mu(F)]}$ et la dernière ligne s'obtient de la deuxième en poussant-en-avant via α_S. La flèche $\dashrightarrow$ provient du fait que l'application $H^0(X \setminus S_1, \mathbf{K}_2) \to \mu(F)$ ainsi obtenue est triviale, ce qu'assure la réciprocité de Moore [27, (10.4.2)].

On passe à la limite par rapport à S_1 et on obtient une extension centrale topologique $\mu(F) \hookrightarrow \tilde{G} \overset{\mathbf{p}}{\twoheadrightarrow} G(\mathbb{A})$. Elle se scinde canoniquement au-dessus de $\prod_{v \in X \setminus S_1} G(\mathfrak{o}_v)$ et au-dessus de $G(F)$ (à l'aide de $\dashrightarrow$). Enfin, on peut identifier $\mu(F)$ et μ_{n_F}, mais il n'y a pas de choix canonique. On vérifie sans peine que $\mathbf{p}$ satisfait aux conditions d'un revêtement adélique (avec $V_{\mathrm{ram}} := S$) sauf la commutativité du groupe $\tilde{H}$ dans (III.6), ce qui fait l'objet du paragraphe suivant.

Remarquons aussi que, pour toute place v, la fibre locale $\mathbf{p}_v : \tilde{G}_v \to G(F_v)$ de $\mathbf{p}$ est la poussée-en-avant de (III.7) via $\mu_{n_{F_v}} \to \mu_{n_F}$, $\zeta \mapsto \zeta^{[\mu(F_v):\mu(F)]}$.

Vérification des hypothèses Plaçons-nous dans le cas F un corps de nombres avec G, $\tilde{G}(\cdot)$ comme précédent. On construit l'extension centrale topologique $\mu(F) \hookrightarrow \tilde{G} \overset{\mathbf{p}}{\twoheadrightarrow} G(\mathbb{A})$. Identifions $\mu(F)$ et μ_{n_F} en fixant un générateur de $\mu(F)$. Le but est l'énoncé suivant.

Théorème 3.5.1. *Les données ci-dessus forment un revêtement de $G(\mathbb{A})$ à n_F-feuillets.*

Soit $S \supset V_{\mathrm{ram}}$ un ensemble fini de places de F vérifiant les conditions dans le paragraphe précédent. Soit $v \notin S$, on prend $K_v := G(\mathfrak{o}_v)$, T_v un F_v-tore déployé maximal dans $G_v := G \times_F F_v$ en bonne position relativement à K_v, et posons $M_{0,v} := Z_{G_v}(T_v)$. C'est un F-tore maximal car G est non ramifié. Définissons $\tilde{H}_v \subset \widetilde{M_{0,v}}$ comme dans (III.6). D'après ce qui précède, il suffit de vérifier la commutativité de $\tilde{H}_v$ pour tout $v \notin S$ afin de prouver 3.5.1.

Lemme 3.5.2. *Conservons le formalisme ci-dessus. Si $\tilde{G}(\cdot)$ est résiduellement scindé en v, alors $\tilde{H}_v$ est commutatif.*

Démonstration. On se ramène aussitôt au cas $G = M_0$, qui est un F_v-tore non ramifié. Dans ce cas-là, c'est l'assertion de [90, 6.5]. □

Lemme 3.5.3. *Pour toute place $v \notin S$, $\tilde{G}(\cdot)$ est résiduellement scindé en v.*

Démonstration. Cf. [27, 12.14 (iii)] 12.14. Rappelons que les conditions sur S entraînent que G admet un modèle lisse sur $V = \mathrm{Spec}\,(\mathfrak{o}_v)$ et $\tilde{G}(\cdot) \times_F F_v$ est la fibre générique d'un $\mathbf{K}_2$-torseur multiplicatif défini sur V, disons $\tilde{G}_V(\cdot)$.

Dans cette situation $(*)$ est évidemment satisfait. Donc l'extension résiduelle est obtenue en poussant-en-avant $\tilde{G}_V(\cdot)$ via les homomorphismes de faisceaux sur G_V :

$$\mathbf{K}_2 \to j_* \mathbf{K}_2 \to i_* \mathbf{K}_1.$$

Cela faisant partie de la suite de localisation en K-théorie, la composition est triviale. D'où la trivialité de l'extension résiduelle. □

Démonstration de 3.5.1. D'après les remarques après 3.5.1, il suffit de combiner les deux lemmes précédents. □

4 La combinatoire

Fixons un corps F, un F-groupe réductif connexe G, un sous-groupe de Lévi minimal M_0 et $P_0 \in \mathcal{P}(M_0)$.

4.1 Analyse convexe

Les résultats ici se trouvent dans [7]. Soient P, Q deux sous-groupes paraboliques semi-standards de G tels que $Q \supset P$, définissons des cônes ouverts dans $\mathfrak{a}_0$

$$\mathfrak{a}_P^{Q+} := \{H \in \mathfrak{a}_0 : \forall \alpha \in \Delta_P^Q,\ \alpha(H) > 0\},$$
$$^{+}\mathfrak{a}_P^{Q} := \{H \in \mathfrak{a}_0 : \forall \varpi \in \widehat{\Delta_P^Q},\ \varpi(H) > 0\};$$

et leurs fonctions caractéristiques

$$\tau_P^Q := \mathbb{1}_{\mathfrak{a}_P^{Q+}},$$
$$\hat{\tau}_P^Q := \mathbb{1}_{^{+}\mathfrak{a}_P^{Q}}.$$

Notons $\mathbb{Z}\Delta_P^{Q\vee}$ (resp. $\mathbb{Z}\widehat{\Delta_P^{Q\vee}}$) le réseau dans $\mathfrak{a}_P^Q$ engendré par $\Delta_P^{Q\vee}$ (resp. $\widehat{\Delta_P^{Q\vee}}$) et posons

$$\theta_P^Q(\lambda) := \mathrm{mes}(\mathfrak{a}_P^Q/\mathbb{Z}\Delta_P^{Q\vee})^{-1} \prod_{\alpha^\vee \in \Delta_P^{Q\vee}} \lambda(\alpha^\vee),$$

$$\hat{\theta}_P^Q(\lambda) := \mathrm{mes}(\mathfrak{a}_P^Q/\mathbb{Z}\widehat{\Delta_P^{Q\vee}})^{-1} \prod_{\varpi^\vee \in \widehat{\Delta_P^{Q\vee}}} \lambda(\varpi^\vee)$$

pour tout $\lambda \in (\mathfrak{a}_P^Q)^*_{\mathbb{C}}$. Ce sont des fonctions holomorphes en λ. Lorsque $Q = G$, on supprime les exposants et on les note $\mathfrak{a}_P^+$, ${}^+\mathfrak{a}_P$, τ_P, $\hat{\tau}_P$, θ_P et $\hat{\theta}_P$.

Étant donnés des sous-groupes paraboliques semi-standards $Q \supset Q' \supset P' \supset P$ et $Y \in \mathfrak{a}_P^Q$, notons $Y_{P'}^{Q'}$ l'image de Y via $\mathfrak{a}_P^Q \to \mathfrak{a}_{P'}^{Q'}$. Lorsque $Q = Q'$ (resp. $P = P'$), on simplifie les notations en supprimant les exposants (resp. les indices) comme précédemment.

Proposition 4.1.1 (cf. [7, 2.1]). *Soient $R \supset P$ deux sous-groupes paraboliques semi-standards, on a*

$$\sum_{Q: R \supset Q \supset P} (-1)^{\dim(A_P/A_Q)} \tau_P^Q(X^Q) \hat{\tau}_Q^R(X_Q) = \begin{cases} 1, & \text{si } P = R, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 4.1.2 (cf. [7, §2]). *Conservons les notations précédentes et posons*

$$\Gamma_P^R(X, Y) := \sum_{Q: R \supset Q \supset P} (-1)^{\dim(A_Q/A_R)} \tau_P^Q(X^Q) \hat{\tau}_Q^R(X_Q - Y_Q), \quad X, Y \in \mathfrak{a}_P^R.$$

Alors $\Gamma_P^R(\cdot, Y)$ est à support compact. On a la relation de récurrence suivante

$$\hat{\tau}_P^R(X - Y) = \sum_{Q: R \supset Q \supset P} (-1)^{\dim(A_Q/A_R)} \hat{\tau}_P^Q(X^Q) \Gamma_Q^R(X_Q, Y_Q).$$

Soit E un espace de Banach. Soit $c_P : i\mathfrak{a}_P^* \to E$ une fonction, définissons

$$c'_P(\lambda) := \sum_{Q \supset P} (-1)^{\dim(A_P/A_Q)} \hat{\theta}_P^Q(\lambda)^{-1} c_Q(\lambda_Q) \theta_Q(\lambda_Q)^{-1} \tag{III.9}$$

où $c_Q := c|_{i\mathfrak{a}_Q^*}$. C'est bien défini sur le complément dans $i\mathfrak{a}_P^*$ des murs associés aux coracines et copoids simples.

Proposition 4.1.3 (cf. [7, 6.1]). *Si c_P est lisse, alors c'_P se prolonge en une fonction lisse sur $\lambda \in i\mathfrak{a}_P^*$.*

Proposition 4.1.4 (cf. [7, 2.2]). *S'il existe $X \in \mathfrak{a}_P$ tel que $c_P(\lambda) = e^{\lambda(X)}$, alors*

$$c'_P(\lambda) = \int_{\mathfrak{a}_P^G} \Gamma_P^G(H, X^G) e^{\lambda(H)} \, \mathrm{d}H, \quad \lambda \in i\mathfrak{a}_P^*.$$

Cela étant la transformée de Fourier d'une fonction à support compact, c'_P se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}$. De plus, $c'_P(0)$ est un polynôme homogène en X de degré $\dim(A_P/A_G)$.

4.2 (G,M)-familles

Passons en revue la définition et les propriétés de (G,M)-familles. Les références sont [7, §6] et [10, §7].

Définition 4.2.1. Soit E un espace de Banach. Une (G,M)-famille à valeurs dans E est une famille des fonctions lisses

$$c_P : i\mathfrak{a}_M^* \to E, \quad P \in \mathcal{P}(M)$$

telle que pour tous $P, P' \in \mathcal{P}(M)$ adjacents et tout $\lambda \in i(\mathfrak{a}_M^*)_P^+ \cap i(\mathfrak{a}_M^*)_{P'}^+$, on a $c_P(\lambda) = c_{P'}(\lambda)$.

Proposition 4.2.2. *La fonction*

$$c_M(\lambda) := \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} c_P(\lambda)\theta_P(\lambda)^{-1}$$

est bien définie et lisse sur $i\mathfrak{a}_M^*$.

On en déduit des fonctions lisses c'_P sur $i\mathfrak{a}_P$ selon (III.9). Posons $c_M := c_M(0)$, c'est le terme qui nous intéresse.

Exemple 4.2.3. On dit qu'un ensemble $\mathcal{Y} = (Y_P)_{P \in \mathcal{P}(M)}$ de points dans $\mathfrak{a}_M$ indexé par $\mathcal{P}(M)$ est un ensemble (G,M)-orthogonal (resp. (G,M)-orthogonal positif) si pour tous $P, P' \in \mathcal{P}(M)$ adjacents séparés par $\alpha \in \Delta_P$, on a

$$Y_P - Y_{P'} \in \mathbb{R}\alpha^\vee \qquad (\text{resp.} \quad Y_P - Y_{P'} \in \mathbb{R}_{\geq 0}\alpha^\vee).$$

À un tel ensemble $\mathcal{Y}$ est associée une (G,M)-famille

$$c_P(\lambda, \mathcal{Y}) = e^{\lambda(Y_P)}.$$

Vu 4.1.4, on a

$$c'_P(\lambda, \mathcal{Y}) = \int_{\mathfrak{a}_P^G} \Gamma_P^G(H, Y_P^G) e^{\lambda(H)} \,\mathrm{d}H.$$

Ci-dessous une récapitulation des opérations utiles. Soit $(c_P)_P$ une (G,M)-famille à valeurs dans E.

1 Supposons que E est une algèbre de Banach. Soit $(d_P)_P$ une autre (G,M)-famille à valeurs dans E. Posons $(cd)_P(\lambda) := c_P(\lambda)d_P(\lambda)$, alors $(cd)_P$ est encore une (G,M)-famille.

2 Fixons $L \in \mathcal{L}(M)$. En rappelant que $\mathfrak{a}_L^* \hookrightarrow \mathfrak{a}_M^*$ canoniquement, posons

$$c_Q(\lambda) = c_P(\lambda), \quad Q \in \mathcal{P}(L), \lambda \in i\mathfrak{a}_L^*$$

où $P \in \mathcal{P}(M)$ est tel que $P \subset Q$; on vérifie que $c_Q(\lambda)$ ne dépend pas du choix de P. Alors $(c_Q)_Q$ est une (G,L)-famille.

3 Fixons $L \in \mathcal{L}(M)$ et $Q \in \mathcal{P}(L)$ comme ci-dessus. Si $R \in \mathcal{P}^L(M)$, notons $Q(R)$ l'unique élément de $\mathcal{P}(M)$ tel que $Q(R) \subset Q$ et $Q(R) \cap L = R$. Posons

$$c_R^Q(\lambda) := c_{Q(R)}(\lambda), \quad R \in \mathcal{P}^L(M), \lambda \in i\mathfrak{a}_M^*.$$

Alors $(c_R^Q)_R$ est une (L,M)-famille. Lorsque les fonctions c_R^Q ne dépendent pas de Q, on les note aussi c_R^L.

4 Soient F_1 une extension de F et M_1 un sous-groupe de Lévi de $G_1 := G \times_F F_1$. Supposons que $M \supset M_1$ sur F_1, d'où une inclusion canonique $\mathfrak{a}_M^* \hookrightarrow \mathfrak{a}_{M_1}^*$. Soit $(c_{P_1})_{P_1}$ une (G_1, M_1)-famille, posons

$$c_P(\lambda) := c_{P_1}(\lambda), \quad P \in \mathcal{P}(M), \lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$$

où $P_1 \in \mathcal{P}(M_1)$ est tel que $P_1 \subset P$ sur F_1 ; on vérifie que $c_P(\lambda)$ ne dépend pas du choix de P_1. Alors $(c_P(\lambda))_P$ est une (G, M)-famille.

Dorénavant, les (G, M)-familles sont supposées à valeurs dans une algèbre de Banach fixée.

Lemme 4.2.4 ([7, 6.3])**.** *On a*

$$(cd)_M(\lambda) = \sum_{Q \in \mathcal{F}(M)} c_M^Q(\lambda^Q) d'_Q(\lambda_Q).$$

En particulier,

$$(cd)_M = \sum_{Q \in \mathcal{F}(M)} c_M^Q d'_Q.$$

Corollaire 4.2.5 ([7, 6.4 et 6.5])**.** *Soient $(c_P), (d_P)$ des (G, M)-familles.*

- *On a $d_M(\lambda) = \sum_{Q \in \mathcal{P}(M)} d'_Q(\lambda_Q)$.*
- *Supposons que $L \in \mathcal{L}(M)$ et $Q \in \mathcal{P}(L)$. Si la famille (c_R^Q) ne dépend pas du choix de Q, alors*

$$(cd)_M(\lambda) = \sum_{L \in \mathcal{L}(M)} c_M^L(\lambda^L) d_L(\lambda_L).$$

Plaçons-nous dans la situation 4. Soit $L \in \mathcal{L}(M_1)$. Si l'homomorphisme canonique

$$\Sigma : \mathfrak{a}_{M_1}^M \oplus \mathfrak{a}_{M_1}^{L_1} \to \mathfrak{a}_{M_1}^G$$

est un isomorphisme, posons

$$d_{M_1}^G(M, L_1) := \frac{\text{la mesure sur } \mathfrak{a}_{M_1}^G}{\Sigma_* \left(\text{la mesure sur } \mathfrak{a}_{M_1}^M \oplus \mathfrak{a}_{M_1}^{L_1}\right)} \tag{III.10}$$

en rappelant que l'on a fixé des mesures de Haar sur les espaces en question ; sinon, posons $d_{M_1}^G(M, L_1) := 0$.

Prenons

$$\xi \in \mathfrak{a}_{M_1}^M \quad \text{en position générale.} \tag{III.11}$$

Pour $L_1 \in \mathcal{L}(M_1)$ tel que $d_{M_1}^G(M, L_1) \neq 0$, on voit que $(\xi + \mathfrak{a}_M^G) \cap \mathfrak{a}_{L_1}^G$ consiste en un seul point non singulier ; ce point appartient donc à $\mathfrak{a}_{Q_1}^+$ pour un unique $Q_1 \in \mathcal{P}(L_1)$. Cela définit une application $L_1 \mapsto Q_1$ pour de tels L_1.

Lemme 4.2.6 ([10, 7.4])**.** *Avec le choix précédent de $\xi \in \mathfrak{a}_{M_1}^M$, on a*

$$c_M(\lambda) = \sum_{L_1 \in \mathcal{L}(M_1)} d_{M_1}^G(M, L_1) c_{M_1}^{Q_1}(\lambda^{Q_1}), \quad \lambda \in i\mathfrak{a}_M^*.$$

En particulier,

$$c_M = \sum_{L_1 \in \mathcal{L}(M_1)} d_{M_1}^G(M, L_1) c_{M_1}^{Q_1}.$$

Considérons maintenant une variante. Soient $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(M)$, on dispose toujours d'une application canonique

$$\Sigma : \mathfrak{a}_M^{L_1} \oplus \mathfrak{a}_M^{L_2} \to \mathfrak{a}_M^G.$$

Cela permet de définir le coefficient $d_M^G(L_1, L_2)$ comme en (III.10). De même, prenons

$$\xi \in \mathfrak{a}_{\mathcal{M}}^M := \{(H, -H) : H \in \mathfrak{a}_M\} \tag{III.12}$$

en position générale ; ce choix fournit une application $(L_1, L_2) \mapsto (Q_1, Q_2)$ pour les L_1, L_2 avec $d_M^G(L_1, L_2) \neq 0$, et on a $Q_i \in \mathcal{P}(L_i)$, $i = 1, 2$.

Lemme 4.2.7 ([10, 7.4]). *Avec les notations précédentes, on a*

$$(cd)_M(\lambda) = \sum_{L_1, L_2 \in \mathcal{L}(M)} d_M^G(L_1, L_2) c_M^{Q_1}(\lambda^{Q_1}) c_M^{Q_2}(\lambda^{Q_2}).$$

En particulier,

$$(cd)_M = \sum_{L_1, L_2 \in \mathcal{L}(M)} d_M^G(L_1, L_2) c_M^{Q_1} c_M^{Q_2}.$$

5 La formule des traces avec caractère : la partie unipotente

Dans cette section, nous fixons les objets suivants
- F : un corps de nombres,
- $\mathbb{A}$: l'anneau d'adèles de F,
- G : un F-groupe réductif connexe,
- M_0 : un sous-groupe de Lévi minimal de G,
- $P_0 \in \mathcal{P}(M_0)$,
- $K = \prod_v K_v$: un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbb{A})$ en bonne position relativement à M_0,
- $\boldsymbol{\omega} : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$ un caractère unitaire continu tel que $\boldsymbol{\omega}|_{G(F)} = 1$.

On appelle un caractère $\boldsymbol{\omega}$ vérifiant la condition ci-dessus un caractère automorphe de G.

De tels objets passent de façon évidente aux sous-groupes de Lévi standards, voire semi-standards si l'on ôte la donnée P_0. Fixons aussi des mesures de Haar selon les conventions de §2.5.

Soit $T \in \mathfrak{a}_0$. Étant donné $P \in \mathcal{F}(M_0)$, par abus de notation, nous écrirons T au lieu de T_P pour désigner sa projection dans $\mathfrak{a}_P$.

5.1 Le $\mathfrak{o}$-développement

Notons R la représentation régulière de $G(\mathbb{A})$ sur $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1) = L^2(G(F)A_{G,\infty}\backslash G(\mathbb{A}))$, c'est-à-dire

$$(R(y)\phi) : x \mapsto \phi(xy), \quad y \in G(\mathbb{A})^1, \phi \in L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1).$$

Notons $A_{\boldsymbol{\omega}} : L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1) \to L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ l'application $\phi \mapsto \phi\boldsymbol{\omega}$. La formule des traces pour $(G, \boldsymbol{\omega})$ concerne les opérateurs

$$R(f) \circ A_{\boldsymbol{\omega}} : L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1) \to L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1), \quad f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A})^1).$$

Fixons f, alors $R(f) \circ A_{\boldsymbol{\omega}}$ admet le noyau

$$K^{\boldsymbol{\omega}}(x, y) = \sum_{\gamma \in G(F)} \boldsymbol{\omega}(y) f(x^{-1}\gamma y),$$

cela signifie que $R(f)\circ A_{\boldsymbol{\omega}}$ est donné par $\phi\mapsto\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} K^{\boldsymbol{\omega}}(\cdot,y)\phi(y)\,\mathrm{d}y$.

Rappelons la procédure de troncature d'Arthur. Soient $T\in\mathfrak{a}_0^+$ et $P=M_PU_P\supset P_0$ un sous-groupe parabolique standard. Définissons

$$K_P^{\boldsymbol{\omega}}(x,y) := \boldsymbol{\omega}(y)\int\limits_{U_P(\mathbb{A})}\sum_{\gamma\in M_P(F)} f(x^{-1}\gamma uy)\,\mathrm{d}u,$$
$$k^{T,\boldsymbol{\omega}}(x) := \sum_{P\supset P_0}(-1)^{\dim A_P/A_G}\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)} K_P^{\boldsymbol{\omega}}(\delta x,\delta x)\hat{\tau}_P(H_P(\delta x)-T).$$

Lorsque $\boldsymbol{\omega}=1$, on revient aux objets construits par Arthur [5] et on supprime l'exposant $\boldsymbol{\omega}$.

Remarquons que $K_P^{\boldsymbol{\omega}}(x,y)=\boldsymbol{\omega}(y)K_P(x,y)$ et $k^{T,\boldsymbol{\omega}}(x)=\boldsymbol{\omega}(x)k^T(x)$. Donc la somme définissant $k^{T,\boldsymbol{\omega}}$ est finie pour x dans un sous-ensemble compact.

On dit que $\gamma_1,\gamma_2\in G(F)$ sont $\mathcal{O}$-équivalents si leurs parties semi-simples sont conjuguées. Notons $\mathcal{O}$ l'ensemble de classes de $\mathcal{O}$-équivalences dans $G(F)$. Il est en bijection naturelle avec l'ensemble de classes de conjugaison semi-simples dans $G(F)$. Comme d'habitude, lorsqu'une ambiguïté sera à craindre sur G, on les notera $\mathcal{O}^G$-équivalence et $\mathcal{O}^G$.

Soit M un sous-groupe de Lévi de G, l'inclusion $M(F)\hookrightarrow G(F)$ induit une application $\mathcal{O}^M\to\mathcal{O}^G$ à fibres finies.

Soit $\mathfrak{o}\in\mathcal{O}$, définissons

$$K_{P,\mathfrak{o}}^{\boldsymbol{\omega}}(x,y) := \boldsymbol{\omega}(y)\int\limits_{U_P(\mathbb{A})}\sum_{\gamma\in M_P(F)\cap\mathfrak{o}} f(x^{-1}\gamma uy)\,\mathrm{d}u,$$
$$k_{\mathfrak{o}}^{T,\boldsymbol{\omega}}(x) := \sum_{P\supset P_0}(-1)^{\dim A_P/A_G}\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)} K_P^{\boldsymbol{\omega}}(\delta x,\delta x)\hat{\tau}_P(H_P(\delta x)-T).$$

Alors $\sum_{\mathfrak{o}} K_{P,\mathfrak{o}}^{\boldsymbol{\omega}}=K_P^{\boldsymbol{\omega}}$ et $\sum_{\mathfrak{o}} k_{\mathfrak{o}}^{T,\boldsymbol{\omega}}=k^{T,\boldsymbol{\omega}}$. Comme remarqué plus haut, on a $K_{P,\mathfrak{o}}^{\boldsymbol{\omega}}(x,y)=\boldsymbol{\omega}(y)K_{P,\mathfrak{o}}(x,y)$ et $k_{\mathfrak{o}}^{T,\boldsymbol{\omega}}(x)=\boldsymbol{\omega}(x)k_{\mathfrak{o}}^T(x)$. Puisque $\boldsymbol{\omega}$ est unitaire, le résultat suivant découle immédiatement du cas usuel $\boldsymbol{\omega}=1$.

Théorème 5.1.1 (cf. [5, 7.1])**.** *Soit $T\in\mathfrak{a}_0^+$ suffisamment régulier, alors*

$$\sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}}\int\limits_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} k_{\mathfrak{o}}^{T,\boldsymbol{\omega}}(x)\,\mathrm{d}x$$

converge absolument.

Soit $f\in C_c^\infty(\tilde{G}^1)$ quelconque et notons $k^{T,\boldsymbol{\omega}}(x,f)$ la fonction ainsi associée. Il est donc loisible de définir la distribution

$$f\mapsto J_{\mathfrak{o}}^{T,\boldsymbol{\omega}}(f) := \int\limits_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} k_{\mathfrak{o}}^{T,\boldsymbol{\omega}}(x,f)\,\mathrm{d}x.$$

On indiquera le groupe en question en exposant les notations, eg. $J_{\mathfrak{o}}^{G,T,\boldsymbol{\omega}}$. Si $\mathfrak{o}\ni 1$ (on l'appelle la classe unipotente dans $\mathcal{O}$), nous notons les objets associés par $K_{P,\mathrm{unip}}^{\boldsymbol{\omega}}$, $k_{\mathrm{unip}}^{T,\boldsymbol{\omega}}$ et $J_{\mathrm{unip}}^{T,\boldsymbol{\omega}}$.

Si $M\in\mathcal{L}(M_0)$, $\mathfrak{o}\in\mathcal{O}^G$ et $f\in C_c^\infty(M(\mathbb{A})^1)$, posons

$$J_{\mathfrak{o}}^{M,T,\boldsymbol{\omega}}(f) = \sum_{\substack{\mathfrak{o}'\in\mathcal{O}^M\\ \mathfrak{o}'\mapsto\mathfrak{o}}} J_{\mathfrak{o}'}^{M,T,\boldsymbol{\omega}}(f).$$

5.2 Comportement des distributions

Modification de troncature Le fait suivant sera utilisé à plusieurs reprises.

Proposition 5.2.1. *Si G est simplement connexe, alors $\boldsymbol{\omega} = 1$.*

Démonstration. Cela résulte immédiatement de la paramétrisation de tels caractères par Langlands, cf. [51, pp.122-123]. □

Corollaire 5.2.2. *Le caractère $\boldsymbol{\omega}$ est trivial sur $G_{\mathrm{unip}}(\mathbb{A})$.*

Démonstration. Notons $\pi : G_{\mathrm{SC}} \to G$ le revêtement simplement connexe de G_{der}, alors π induit un isomorphisme $(G_{\mathrm{SC}})_{\mathrm{unip}} \xrightarrow{\sim} G_{\mathrm{unip}}$ de F-schémas, d'où un homéomorphisme pour leurs points adéliques. □

Lemme 5.2.3. *Soit M un sous-groupe de Lévi de G. Alors $\boldsymbol{\omega}$ est trivial sur $A_{M,\infty} \cap G(\mathbb{A})^1$.*

Démonstration. L'application de Harish-Chandra adélique fournit un isomorphisme de groupes topologiques

$$H_M : A_{M,\infty} \cap G(\mathbb{A})^1 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_M^G. \tag{III.13}$$

Notons toujours $\pi : G_{\mathrm{SC}} \to G$ le revêtement simplement connexe de G_{der} et $M_{\mathrm{sc}} \to M$ sa fibre au-dessus de M. On obtient l'analogue de (III.13) pour G_{SC} et M_{sc}. Vu la description de $\mathfrak{a}_M^G$ en termes de coracines, on voit que π induit $\mathfrak{a}_{M_{\mathrm{sc}}}^{G_{\mathrm{SC}}} \simeq \mathfrak{a}_M^G$; l'identification est compatible avec H_M et $H_{M_{\mathrm{sc}}}$. Ainsi, on se ramène à prouver la même assertion pour G_{SC}, M_{sc} et $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{SC}} := \boldsymbol{\omega} \circ \pi$. Or $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{SC}}$ est encore un caractère automorphe, on conclut à l'aide de 5.2.1. □

La notion suivante facilitera l'étude du comportement des distributions $J_{\mathfrak{o}}^{T,\boldsymbol{\omega}}$.

Définition 5.2.4. Pour P_0 fixé, une modification de troncature est une famille des fonctions continues

$$\mathcal{Y} := \{Y_Q : Q(\mathbb{A}) \cap K \backslash K \to \mathfrak{a}_Q, \quad Q \in \mathcal{F}(M_0), Q \supset P_0\}$$

telle que le diagramme suivant commute pour tout $Q \supset P \supset P_0$:

$$\begin{tikzcd} P(\mathbb{A}) \cap K\backslash K \arrow[r, "Y_P"] \arrow[d] & \mathfrak{a}_P \arrow[d] \\ Q(\mathbb{A}) \cap K\backslash K \arrow[r, "Y_Q"'] & \mathfrak{a}_Q \end{tikzcd}$$

À une telle famille sont associées des fonctions

$$u_Q(\lambda, k; \mathcal{Y}) := e^{\langle \lambda, Y_Q(k) \rangle}, \quad \lambda \in i\mathfrak{a}_Q^*,$$

lisses en λ, dont $u'_Q(k; \mathcal{Y}) := u'_Q(0, k; \mathcal{Y})$ est la fonction associée via (III.9).

Soient $\mathcal{Y}$ une modification de troncature, $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A})^1)$ et $Q \supset P_0$, définissons une variante pondérée de la descente parabolique comme suit

$$f_{Q,\mathcal{Y}}^{\boldsymbol{\omega}}(m) := \delta_Q(m)^{\frac{1}{2}} \int\limits_K \int\limits_{U_Q(\mathbb{A})} \boldsymbol{\omega}(k) f(k^{-1}muk) u'_Q(k; \mathcal{Y}) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}k, \quad m \in M_Q(\mathbb{A})^1.$$

On vérifie que ceci définit une application continue $C_c^\infty(G(\mathbb{A})^1) \to C_c^\infty(M_Q(\mathbb{A})^1)$.

Théorème 5.2.5 (cf. [7, (2.4)]). *Soit $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$. Soit $\mathcal{Y}$ une modification de troncature. Posons*

$$k_{\mathfrak{o}}^{T,\boldsymbol{\omega}}(x;\mathcal{Y}) := \sum_{P \supset P_0} (-1)^{\dim A_P/A_G} \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} K_{P,\mathfrak{o}}^{\boldsymbol{\omega}}(\delta x, \delta x)\hat{\tau}_P(H_P(\delta x) - T - Y_P(k_P(\delta x))).$$

alors

$$J_{\mathfrak{o}}^{T,\boldsymbol{\omega}}(f;\mathcal{Y}) = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} k_{\mathfrak{o}}^{T,\boldsymbol{\omega}}(x;\mathcal{Y})\,\mathrm{d}x$$

est convergent pour $T \in \mathfrak{a}_0^+$ suffisamment régulier. De plus, on a

$$J_{\mathfrak{o}}^{T,\boldsymbol{\omega}}(f;\mathcal{Y}) = \sum_{Q \supset P_0} J_{\mathfrak{o}}^{M_Q,T,\boldsymbol{\omega}}(f_{Q;\mathcal{Y}}^{\boldsymbol{\omega}}).$$

On se débarrassera de la condition sur T dans 5.2.7.

Démonstration. Pour tout sous-groupe parabolique P, on a

$$\hat{\tau}_P(H_P(\delta x) - T - Y_P(k_P(\delta x))) = \sum_{Q \supset P} (-1)^{\dim A_Q/A_G} \hat{\tau}_P^Q(H_P(\delta x) - T)\Gamma_Q^G(H_Q(\delta x) - T, Y_Q(k_Q(\delta x))).$$

Via le changement de variables

$$(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1) \times (P(F)\backslash G(F)) \xrightarrow{\sim} (Q(F)\backslash G(\mathbb{A})^1) \times (P(F)\backslash Q(F))$$

la formule définissant $J_{\mathfrak{o}}^{T,\boldsymbol{\omega}}(f;\mathcal{Y})$ s'écrit

$$J_{\mathfrak{o}}^{T,\boldsymbol{\omega}}(f;\mathcal{Y}) = \sum_{Q \supset P_0} \int_{Q(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \sum_{P: Q \supset P \supset P_0} (-1)^{\dim A_P/A_Q} \sum_{\delta \in P(F)\backslash Q(F)} K_{P,\mathfrak{o}}^{\boldsymbol{\omega}}(\delta x, \delta x)\hat{\tau}_P^Q(H_P(\delta x) - T)\Gamma_Q^G(H_Q(\delta x) - T, Y_Q(k_Q(\delta x)))\,\mathrm{d}x.$$

Écrivons

$$\begin{aligned} Q(F)\backslash G(\mathbb{A})^1 &= (U_Q(F)\backslash U_Q(\mathbb{A})) \times (A_{M_Q,\infty} \cap G(\mathbb{A})^1) \times (M_Q(F)\backslash M_Q(\mathbb{A})^1) \times K, \\ x &= uamk, \\ \mathrm{d}x &= \delta_Q(a)^{-1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}k, \\ K_{P,\mathfrak{o}}^{\boldsymbol{\omega}}(\delta x, \delta x) &= \boldsymbol{\omega}(m)\boldsymbol{\omega}(k)K_{P,\mathfrak{o}}(\delta uamk, \delta uamk), \end{aligned}$$

où on a utilisé 5.2.3 qui assure $\boldsymbol{\omega}(a) = 1$. On vérifie de plus

$$\begin{aligned} Y_Q(k_Q(\delta uamk)) &= Y_Q(k), \\ K_{P,\mathfrak{o}}(\delta uamk, \delta uamk) &= \delta_Q(a)K_{P,\mathfrak{o}}(\delta mk, \delta mk), \\ H_Q(\delta uamk) &= H_Q(a), \\ H_P(\delta uamk) &\in H_P(\delta m) + \mathfrak{a}_Q. \end{aligned}$$

Rappelons que $A_{M_Q,\infty} \cap G(\mathbb{A})^1$ s'identifie à $\mathfrak{a}_Q^G$ via H_{M_Q}. Les équations ci-dessus entraînent que

$$J_{\mathfrak{o}}^{T,\boldsymbol{\omega}}(f;\mathcal{Y}) = \sum_{Q \supset P_0} \int_{M_Q(F)\backslash M_Q(\mathbb{A})^1} \boldsymbol{\omega}(m) \sum_{P: Q \supset P \supset P_0} (-1)^{\dim A_P/A_Q} \int_K \boldsymbol{\omega}(k) \sum_{\delta \in (P \cap M_Q)(F)\backslash M_Q(F)} \left(\int_{\mathfrak{a}_Q^G} \Gamma_Q^G(H, Y_P(k))\,\mathrm{d}H \right) K_{P,\mathfrak{o}}(\delta mk, \delta mk)\hat{\tau}_P^Q(H_P(\delta m) - T)\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}m.$$

Grâce à 4.1.4, l'intégrale sur $\mathfrak{a}_Q^G$ vaut $u'_Q(k;\mathcal{Y})$. L'application $P \mapsto P \cap M_Q$ induit une bijection entre $\{P : Q \supset P \supset P_0\}$ et l'ensemble de sous-groupes paraboliques standards de M_Q. On vérifie que, pour tous $m_1, m_2 \in M_Q(\mathbb{A})^1$ on a

$$\int_K \boldsymbol{\omega}(k) K_{P,\mathfrak{o}}(m_1 k, m_2 k) u'_Q(k;\mathcal{Y})\,\mathrm{d}k = \sum_{\gamma \in M_P(F)\cap \mathfrak{o}} \int_{(U_P \cap M_Q)(\mathbb{A})} f^{\boldsymbol{\omega}}_{Q;\mathcal{Y}}(m_1^{-1}\gamma u m_2)\,\mathrm{d}u,$$

cf. [7, p.17]. En l'appliquant à $m_1 = m_2 = \delta m$, on en déduit l'assertion. □

Dépendance de T Pour tout $Q \in \mathcal{F}(M_0)$, posons

$$f^{\boldsymbol{\omega}}_Q(m) := \delta_Q(m)^{\frac{1}{2}} \int_K \int_{U_Q(\mathbb{A})} \boldsymbol{\omega}(k) f(k^{-1} m u k)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}k, \quad m \in M_Q(\mathbb{A})^1; \tag{III.14}$$

ceci fournit une application continue $C_c^\infty(G(\mathbb{A})^1) \to C_c^\infty(M_Q(\mathbb{A})^1)$.

Corollaire 5.2.6 (cf. [7, (2.4)])**.** *Soient $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$, $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A})^1)$. Soient $T, T_1 \in \mathfrak{a}_0^+$ suffisamment réguliers, alors*

$$J_{\mathfrak{o}}^{T_1,\boldsymbol{\omega}}(f) = \sum_{Q \supset P_0} J_{\mathfrak{o}}^{M_Q,T,\boldsymbol{\omega}}(f^{\boldsymbol{\omega}}_Q) \cdot \int_{\mathfrak{a}_Q^G} \Gamma_Q^G(H, T_1 - T)\,\mathrm{d}H.$$

Démonstration. Prenons $Y_P(k) := T_1 - T \in \mathfrak{a}_P$ pour tout $P \supset P_0$ et tout $k \in K$, cela définit une modification de troncature. D'après 4.1.4, on a

$$f^{\boldsymbol{\omega}}_{Q,\mathcal{Y}} = f^{\boldsymbol{\omega}}_Q \int_{\mathfrak{a}_Q^G} \Gamma_Q^G(H, T_1 - T)\,\mathrm{d}H.$$

On a aussi $J_{\mathfrak{o}}^{T,\boldsymbol{\omega}}(f;\mathcal{Y}) = J_{\mathfrak{o}}^{T_1,\boldsymbol{\omega}}(f)$. L'assertion résulte immédiatement de 5.2.5. □

Corollaire 5.2.7. *La distribution $f \mapsto J_{\mathfrak{o}}^{T,\boldsymbol{\omega}}(f)$, définie au début pour $T \in \mathfrak{a}_0^+$ suffisamment régulier, est polynomiale en T de degré $\leq \dim \mathfrak{a}_0^G$. Par conséquent, la distribution est bien définie comme un polynôme en $T \in \mathfrak{a}_0$.*

La formule dans 5.2.5 reste valable pour tout $T \in \mathfrak{a}_0$.

Démonstration. La première assertion découle de 4.1.4. La deuxième en résulte en notant que les deux côtés de 5.2.5 sont tous polynomiaux en T. □

Non-invariance Fixons $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}^G$. Soient $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$, $y \in G(\mathbb{A})$, définissons

$$f^y(x) = f(yxy^{-1}), \quad x \in G(\mathbb{A})^1.$$

Définissons une modification de troncature $\mathcal{Y}_y$ en posant $Y_P(k) = -H_P(ky)$. Posons

$$u'_Q(k,y) := u'_Q(k;\mathcal{Y}_y), \tag{III.15}$$

$$f^{\boldsymbol{\omega}}_{Q,y} := f^{\boldsymbol{\omega}}_{Q,\mathcal{Y}_y}. \tag{III.16}$$

Théorème 5.2.8. *Avec les notations précédentes, on a*

$$J_{\mathfrak{o}}^{T,\boldsymbol{\omega}}(f^y) = \boldsymbol{\omega}(y) \sum_{Q \supset P_0} J_{\mathfrak{o}}^{M_Q,T,\boldsymbol{\omega}}(f^{\boldsymbol{\omega}}_{Q,y}).$$

Démonstration. Pour tout sous-groupe parabolique standard P, notons $K^{\boldsymbol{\omega}}_{P,\mathfrak{o},f^y}$ le noyau associé à f^y au lieu de f. Pour tout $\delta \in G(F)$, on vérifie que

$$K^{\boldsymbol{\omega}}_{P,\mathfrak{o},f^y}(\delta x, \delta x) = \boldsymbol{\omega}(y) K^{\boldsymbol{\omega}}_{P,\mathfrak{o}}(\delta x y^{-1}, \delta x y^{-1}).$$

D'où

$$\begin{aligned} J^{T,\boldsymbol{\omega}}_{\mathfrak{o}}(f^y) &= \boldsymbol{\omega}(y) \int\limits_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \sum_{P \supset P_0} (-1)^{\dim(A_P/A_G)} \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} K^{\boldsymbol{\omega}}_{P,\mathfrak{o}}(\delta x y^{-1}, \delta x y^{-1}) \hat{\tau}_P(H_P(\delta x) - T) \,\mathrm{d}x \\ &= \boldsymbol{\omega}(y) \int\limits_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \sum_{P \supset P_0} (-1)^{\dim(A_P/A_G)} \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} K^{\boldsymbol{\omega}}_{P,\mathfrak{o}}(\delta x, \delta x) \hat{\tau}_P(H_P(\delta x y) - T) \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Comme $H_P(\delta x y) = H_P(\delta x) + H_P(k_P(\delta x) y)$, on voit que $J^{T,\boldsymbol{\omega}}_{\mathfrak{o}}(f^y) = \boldsymbol{\omega}(y) J^{T,\boldsymbol{\omega}}_{\mathfrak{o}}(f; \mathcal{Y}_y)$. Cela permet de conclure d'après 5.2.5. □

Définition 5.2.9. Soit $w \in W^G_0$, prenons des représentants $\hat{w} \in G(F)$ et $\tilde{w} \in K$, alors $H_{P_0}(\hat{w}) = H_{M_0}(\hat{w}\tilde{w}^{-1})$; comme H_{M_0} est trivial sur $M_0(F)$, cela ne dépend que de w, M_0 et K. Notons-le $H_{P_0}(w)$ bien qu'il ne dépend pas de P_0.

Dans [7], Arthur définit un unique point $T_0 \in \mathfrak{a}^G_0$ tel que

$$H_{P_0}(w^{-1}) = T_0 - w^{-1} T_0, \quad w \in W^G_0. \tag{III.17}$$

On l'appelle le paramètre de troncature canonique pour (G, M_0, K). Définissons $J^{\boldsymbol{\omega}}_{\mathfrak{o}} := J^{T_0,\boldsymbol{\omega}}_{\mathfrak{o}}$. Nous allons démontrer que $J^{\boldsymbol{\omega}}_{\mathfrak{o}}$ ne dépend pas du choix de P_0.

Notons K_{sc} l'image réciproque de K par $\pi : G_{\mathrm{SC}}(\mathbb{A}) \to G(\mathbb{A})$.

Proposition 5.2.10. *Soient $L, L' \in \mathcal{L}(M_0)$ et $w \in W^G_0$ avec un représentant $\hat{w} \in G(F)$ tel que $L' = w^{-1} L w$. Soit $\tilde{w} \in \pi(K_{sc})$ un autre représentant, i.e. $\tilde{w}\hat{w}^{-1} \in M_0(\mathbb{A})$. Pour $f \in C^\infty_c(L(\mathbb{A})^1)$, posons*

$$f'(x') := f(\tilde{w} x' \tilde{w}^{-1}), \quad x' \in L'(\mathbb{A})^1.$$

Alors

$$J^{L',\boldsymbol{\omega}}_{\mathfrak{o}}(f') = J^{L,\boldsymbol{\omega}}_{\mathfrak{o}}(f)$$

où $J^{L,\boldsymbol{\omega}}_{\mathfrak{o}}$ (resp. $J^{L',\boldsymbol{\omega}}_{\mathfrak{o}}$) est défini par rapport à $K_L := K \cap L(\mathbb{A})$ (resp. $K_{L'} := K \cap L'(\mathbb{A})$) et $R_0 := P_0 \cap L$ (resp. $R'_0 := w^{-1}(P_0 \cap L) w$).

Démonstration. Le paramètre de troncature canonique pour L (resp. L') s'obtient en projetant T_0 via $\mathfrak{a}^G_0 \to \mathfrak{a}^L_0$ (resp. $\mathfrak{a}^G_0 \to \mathfrak{a}^{L'}_0$). Posons

$$\begin{aligned} f^\circ(x) &:= f(\tilde{w}\hat{w}^{-1} x \hat{w}\tilde{w}^{-1}), \quad x \in L(\mathbb{A})^1, \\ K^\circ &:= \hat{w} K_{L'} \hat{w}^{-1} \subset L(\mathbb{A}). \end{aligned}$$

Prenons $T \in (\mathfrak{a}^{L'}_{R'_0})^+$ suffisamment régulier. Par le transport de structure $x \mapsto \hat{w} x \hat{w}^{-1}$, on a

$$J^{L',T,\boldsymbol{\omega}}_{\mathfrak{o}}(f'; K_{L'}) = J^{L,wT,\boldsymbol{\omega}}_{\mathfrak{o}}(f^\circ; K^\circ).$$

Soit $R \supset R_0$, notons $K^{\boldsymbol{\omega}}_{R,\mathfrak{o}}$ le noyau associé à f et K. En utilisant le fait que $\boldsymbol{\omega}(\hat{w}) = \boldsymbol{\omega}(\tilde{w}) = 1$, dont la dernière égalité résulte de 5.2.2, l'argument pour 5.2.8 montre que

$$J^{L,wT,\boldsymbol{\omega}}_{\mathfrak{o}}(f^\circ; K^\circ) = \int\limits_{L(F)\backslash L(\mathbb{A})^1} \sum_{R \supset R_0} (-1)^{\dim(A_R/A_L)} \sum_{\delta \in R(F)\backslash L(F)} K^{\boldsymbol{\omega}}_{R,\mathfrak{o}}(\delta x, \delta x) \hat{\tau}_R(H_R(\delta x \tilde{w}\hat{w}^{-1}; K^\circ) - wT) \,\mathrm{d}x,$$

où $H_R(\cdot; K^\circ)$ désigne l'application de Harish-Chandra définie par rapport à K°.

D'autre part, considérons $J_{\mathfrak{o}}^{L,wT-wT_0+T_0,\boldsymbol{\omega}}(f;K_L)$; il s'exprime de la même manière sauf que le terme $\hat{\tau}_R(\cdots)$ est remplacé par

$$\hat{\tau}_R(H_R(\delta x;K)+wT_0-T_0-wT).$$

Soit $\delta x = umk$ une décomposition d'Iwasawa où $u \in U_R(\mathbb{A})$, $m \in M_R(\mathbb{A})$, $k \in K \cap L(\mathbb{A})$, alors $H_R(\delta x;K) = H_{M_R}(m)$. On a

$$\delta x \tilde{w}\hat{w}^{-1} = um \underbrace{\tilde{w}\hat{w}^{-1}}_{\in M_0(\mathbb{A})} \cdot \underbrace{\hat{w}\tilde{w}^{-1}k\tilde{w}\hat{w}^{-1}}_{\in K^\circ},$$

donc $H_R(\delta x\tilde{w}\hat{w}^{-1};K^\circ) = H_{M_R}(m) + H_{M_R}(\tilde{w}\hat{w}^{-1})$. Montrons que $H_{M_R}(\tilde{w}\hat{w}^{-1}) = wT_0 - T_0$. Il suffit de considérer le cas $M_R = M_0$. Posons $m_0 := \hat{w}\tilde{w}^{-1} \in M_0(\mathbb{A})$, i.e. $\hat{w} = m_0\tilde{w}$, alors

$$H_{P_0}(\hat{w}) = H_{M_0}(m_0) = -H_{M_0}(\tilde{w}\hat{w}^{-1});$$

or $H_{P_0}(\hat{w}) = T_0 - wT_0$ d'après la définition de T_0.

On en déduit que

$$J_{\mathfrak{o}}^{L',T,\boldsymbol{\omega}}(f';K_{L'}) = J_{\mathfrak{o}}^{L,wT-wT_0+T_0,\boldsymbol{\omega}}(f;K_L).$$

Les deux côtés sont polynomiaux en T. On conclut en prenant $T = T_0$. □

Corollaire 5.2.11 (cf. [7, §2])**.** *Les distributions $J_{\mathfrak{o}}^{\boldsymbol{\omega}}$ ne dépendent pas du choix de $P_0 \in \mathcal{P}(M_0)$.*

Démonstration. Soit $P_0' \in \mathcal{P}(M_0)$. Prenons $w \in W_0^G$ tel que $P_0' = w^{-1}P_0w$ et un représentant $\tilde{w} \in \pi(K_{\mathrm{sc}})$. Vu 5.2.10, il suffit de montrer que

$$J_{\mathfrak{o}}^{\boldsymbol{\omega}}(f) = J_{\mathfrak{o}}^{\boldsymbol{\omega}}(f^{\tilde{w}^{-1}}).$$

Soit $Q \supset P_0$. Puisque $\tilde{w}^{-1} \in K$, on a

$$u_Q'(\cdot,\tilde{w}^{-1}) = \int_{\mathfrak{a}_Q^G} \Gamma_Q^G(H,0)\,\mathrm{d}H = \begin{cases} 1, & \text{si } Q = G \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}.$$

En rappelant que $\boldsymbol{\omega}(\tilde{w}) = 1$, on conclut par 5.2.8. □

Corollaire 5.2.12. *Soit $y \in G(\mathbb{A})^1$, on a*

$$J_{\mathfrak{o}}^{\boldsymbol{\omega}}(f^y) = \boldsymbol{\omega}(y) \sum_{Q \in \mathcal{F}(M_0)} |W_0^{M_Q}||W_0^G|^{-1} J_{\mathfrak{o}}^{M_Q,\boldsymbol{\omega}}(f_{Q,y}^{\boldsymbol{\omega}}).$$

Démonstration. Nous allons le déduire de 5.2.8. Supposons que $Q' \in \mathcal{F}(M_0)$, alors il existe un unique $Q \supset P_0$ et un $w \in W_0^G$ tel que $Q' = w^{-1}Qw$. De plus, l'application $Q' \mapsto Q$ est à fibres de $|W_0^{M_Q}|^{-1}|W_0^G|$ éléments. Prenons un représentant $\tilde{w} \in \pi(K_{\mathrm{sc}})$ de w. On vérifie que

$$\forall k \in K, \quad u_{Q'}'(\tilde{w}^{-1}k,y) = u_Q'(k,y)$$

(cf. [7, p.21]), donc $f_{Q',y}^{\boldsymbol{\omega}}(\tilde{w}^{-1}x\tilde{w}) = f_{Q,y}^{\boldsymbol{\omega}}(x)$ pour tout $x \in M_Q(\mathbb{A})^1$. D'après 5.2.10, $J_{\mathfrak{o}}^{M_{Q'},\boldsymbol{\omega}}(f_{Q',y}^{\boldsymbol{\omega}}) = J_{\mathfrak{o}}^{M_Q,\boldsymbol{\omega}}(f_{Q,y}^{\boldsymbol{\omega}})$. Alors 5.2.8 permet de conclure. □

Dépendance de K Conservons les conventions du paragraphe précédent. Fixons un autre sous-groupe compact maximal K_1 de $G(\mathbb{A})$ en bonne position relativement de M_0 et notons T_0 (resp. T_1) le paramètre de troncature canonique pour K (resp. K_1).

Fixons $P_0 \in \mathcal{P}(M_0)$. Considérons la famille des fonctions continues $K \to \mathfrak{a}_P$ indexée par $Q \in \mathcal{F}(M_0)$

$$Y_Q(k) := -H_Q(k; K_1) + T_1 - T_0.$$

On vérifie que $\mathcal{Y} := (Y_Q)_{Q \supset P_0}$ est une modification de troncature. On définit ainsi

$$u'_Q(k; K_1|K) := u'_Q(k; \mathcal{Y}), \tag{III.18}$$

$$f^{\boldsymbol{\omega}}_{Q;K_1|K} := f^{\boldsymbol{\omega}}_{Q;\mathcal{Y}}. \tag{III.19}$$

Lemme 5.2.13. *Avec les notations précédentes, on a*

$$J^{\boldsymbol{\omega}}_{\mathfrak{o}}(f; K_1) = \sum_{Q \supset P_0} J^{M_Q, \boldsymbol{\omega}}_{\mathfrak{o}}(f^{\boldsymbol{\omega}}_{Q;K_1|K}).$$

Démonstration. Supposons $T \in \mathfrak{a}_0^+$ suffisamment régulier, on a

$$J^{T+T_1}(f; K_1) = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \sum_{P \supset P_0} (-1)^{\dim(A_P/A_G)} \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} K^{\boldsymbol{\omega}}_P(\delta x, \delta x)\hat{\tau}_P(H_P(\delta x; K_1) - T - T_1)\, \mathrm{d}x,$$

tandis que $J^{T+T_0}(f)$ est défini de la même façon sauf que le terme $\hat{\tau}_P(\cdots)$ est remplacé par $\hat{\tau}_P(H_P(\delta x) - T - T_0)$. Pour conclure, il suffit de noter

$$H_P(\delta x; K_1) - T - T_1 = H_P(\delta x) - T - T_0 + H_P(k_P(\delta x); K_1) + T_0 - T_1$$

puis appliquer 5.2.5 et évaluer des polynômes en $T = 0$. □

Lemme 5.2.14. *Soit $w \in W_0^G$. Si $\tilde{w}$ (resp. $\tilde{w}_1$) est un représentant de w dans K (resp. K_1), alors $H_{M_0}(\tilde{w}^{-1}\tilde{w}_1) = (w^{-1} - 1)(T_0 - T_1)$.*

Démonstration. Prenons un représentant rationnel $\hat{w} \in G(F)$ de w. La définition des paramètres T_0, T_1 affirme que

$$\begin{aligned}(1 - w)T_0 &= H_{P_0}(\hat{w}) = H_{M_0}(\hat{w}\tilde{w}^{-1}),\\ (1 - w)T_1 &= H_{P_0}(\hat{w}; K_1) = H_{M_0}(\hat{w}\tilde{w}_1^{-1}).\end{aligned}$$

En prenant la différence, on obtient $(1 - w)(T_0 - T_1) = H_{M_0}(\tilde{w}_1\tilde{w}^{-1})$, ce qui est égal à $wH_{M_0}(\tilde{w}^{-1}\tilde{w}_1)$. □

Théorème 5.2.15. *On a*

$$J^{\boldsymbol{\omega}}_{\mathfrak{o}}(f; K_1) = \sum_{Q \in \mathcal{F}(M_0)} |W_0^{M_Q}||W_0^G|^{-1} J^{M_Q, \boldsymbol{\omega}}_{\mathfrak{o}}(f^{\boldsymbol{\omega}}_{Q;K_1|K}).$$

Démonstration. D'abord, supposons que $w \in W_0^G$, $Q' \in \mathcal{F}(M_0)$ sont tels que $Q' = w^{-1}Qw$ avec $Q \supset P_0$. Prenons un représentant $\tilde{w} \in \pi(K_{\mathrm{sc}})$. D'après 5.2.10, on a

$$J^{M_{Q'}, \boldsymbol{\omega}}_{\mathfrak{o}}(f^{\boldsymbol{\omega}}_{Q';K_1|K}) = J^{M_Q, \boldsymbol{\omega}}_{\mathfrak{o}}((f^{\boldsymbol{\omega}}_{Q';K_1|K})^{\tilde{w}^{-1}}). \tag{III.20}$$

Pour tout $m \in M_Q(\mathbb{A})^1$, on a

(III.21)

$$f^{\boldsymbol{\omega}}_{Q';K_1|K}(\tilde{w}^{-1}m\tilde{w}) = \delta_{Q'}(\tilde{w}^{-1}m\tilde{w})^{\frac{1}{2}} \int\limits_K \int\limits_{U_{Q'}(\mathbb{A})} \boldsymbol{\omega}(k) f(k^{-1}\tilde{w}^{-1}m\tilde{w}u'k) u'_{Q'}(k;K_1|K)\,\mathrm{d}u'\,\mathrm{d}k$$

$$(\text{III.22}) \qquad = \delta_Q(m)^{\frac{1}{2}} \int\limits_K \int\limits_{U_Q(\mathbb{A})} \boldsymbol{\omega}(k) f(k^{-1}muk) u'_{Q'}(\tilde{w}^{-1}k;K_1|K).$$

Écrivons $k = qk_1$ avec $q \in Q(\mathbb{A})$ et $k_1 \in K_1$, alors $H_Q(k;K_1) = H_Q(q)$. D'autre part,

$$\tilde{w}^{-1}k = \underbrace{\tilde{w}^{-1}\tilde{w}}_{\in Q'(\mathbb{A})} \cdot \underbrace{\tilde{w}^{-1}\tilde{w}_1}_{\in M_0(\mathbb{A})} \cdot \underbrace{\tilde{w}_1^{-1}k_1}_{\in K_1}$$

entraîne que

$$\begin{aligned} -wH_{Q'}(\tilde{w}^{-1}k;K_1) &= -w(w^{-1}H_Q(k;K_1) + H_{M'_Q}(\tilde{w}^{-1}\tilde{w}_1)) \\ &= -H_Q(k;K_1) - (1-w)(T_0 - T_1), \\ w(-H_{Q'}(\tilde{w}^{-1}k;K_1) + T_1 - T_0) &= -H_Q(k;K_1) + T_1 - T_0. \end{aligned}$$

d'après le lemme précédent. D'où $u'_{Q'}(\tilde{w}^{-1}k;K_1|K) = u_Q(k;K_1|K)$, donc

$$(\text{III.23}) \qquad (f^{\boldsymbol{\omega}}_{Q';K_1|K})^{\tilde{w}^{-1}} = f^{\boldsymbol{\omega}}_{Q;K_1|K}.$$

Maintenant on fait varier Q et w. Les équations (III.21)-(III.23) entraînent que

$$\sum_{Q' \in \mathcal{F}(M_0)} |W_0^{M_{Q'}}||W_0^G|^{-1} J_{\mathfrak{o}}^{M_{Q'},\boldsymbol{\omega}}(f^{\boldsymbol{\omega}}_{Q';K_1|K}) = \sum_{Q \supset P_0} J_{\mathfrak{o}}^{M_Q,\boldsymbol{\omega}}(f^{\boldsymbol{\omega}}_{Q;K_1|K}).$$

Vu 5.2.13, cela achève la démonstration. □

5.3 Intégrales orbitales pondérées avec caractère

Fixons un ensemble fini S de places de F. Décomposons les objets en question comme $K = K_S \times K^S$, $G(\mathbb{A}) = G(F_S) \times G(F^S)$, $M(\mathbb{A}) = M(F_S) \times M(F^S)$, etc. Notons la restriction de $\boldsymbol{\omega}$ sur $M(F_S)$, où M est un sous-groupe de Lévi quelconque de G, par le même symbole $\boldsymbol{\omega}$. Fixons des mesures sur $G(F_S)$ et sur les $M(F_S)$ selon §2.5.

Remarque 5.3.1. Bien que ces objets-là sont supposés d'origine globale, ici il ne s'agit que d'une étude locale. Par exemple, la seule propriété de $\boldsymbol{\omega}$ qui interviendra est qu'il est un caractère unitaire de $G(F_S)$; il existe aussi des versions locales de 5.2.1 et 5.2.2.

Intégrales orbitales avec caractère Soient M un sous-groupe de Lévi de G, $f \in C_c^\infty(M(F_S))$ et $y \in M(F_S)$. Posons toujours

$$f^y(x) = f(yxy^{-1}), \quad x \in M(F_S).$$

Soit D une distribution sur $M(F_S)$, posons

$${}^yD : f \mapsto \langle D, f^y \rangle, \quad f \in C_c^\infty(M(F_S))$$

Cela définit une action à gauche (resp. à droite) de $M(F_S)$ sur l'espace des distributions (resp. des fonctions) sur $M(F_S)$.

Définition 5.3.2. Une fonction f (resp. distribution D) est dite $\boldsymbol{\omega}$-équivariante si $f^y = \boldsymbol{\omega}(y)f$ (resp. ${}^yD = \boldsymbol{\omega}(y)D$) pour tout y.

Par exemple, une fonction f localement intégrable est $\boldsymbol{\omega}$-équivariante si et seulement la distribution $\phi \mapsto \int_{M(F_S)} f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x$ l'est. Nous nous intéressons aux distributions $\boldsymbol{\omega}$-équivariantes.

Conventions sur la mesure On considère les paires $(\mathcal{O}, \mu)$, où
- $\mathcal{O}$ est une classe de conjugaison dans $M(F_S)$,
- μ est une mesure de Radon complexe non triviale sur $\mathcal{O}$ qui est $\boldsymbol{\omega}$-équivariante ; autrement dit $\mu(y^{-1}xy) = \boldsymbol{\omega}(y)\mu(x)$ pour tout $x \in \mathcal{O}$ et tout $y \in M(F_S)$.

Le groupe $M(F_S)$ opère sur ces paires par conjugaison ; la conjugaison ne change pas $\mathcal{O}$ mais elle transporte μ. On écrit $(\mathcal{O}_1, \mu_1) \sim (\mathcal{O}_2, \mu_2)$ si $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$. Notons

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}(M(F_S))^{\boldsymbol{\omega}} &:= \{(\mathcal{O}, \mu)\}, \\ \Gamma(M(F_S))^{\boldsymbol{\omega}} &:= \{(\mathcal{O}, \mu)\}/\sim . \end{aligned}$$

Alors $\dot{\Gamma}(M(F_S))^{\boldsymbol{\omega}} \to \Gamma(M(F_S))^{\boldsymbol{\omega}}$ est un $\mathbb{C}^\times$-torseur, ce qui permet de définir $\dot{\gamma}/\dot{\eta} \in \mathbb{C}^\times$ si $\dot{\gamma}$ et $\dot{\eta}$ ont la même classe de conjugaison sous-jacente.

Définition 5.3.3. Une classe de conjugaison $\mathcal{O}$ dans $M(F_S)$ est dite $\boldsymbol{\omega}$-bonne si elle admet une mesure de Radon $\boldsymbol{\omega}$-équivariante comme ci-dessus. Autrement dit, $\mathcal{O}$ est bonne si pour tout $\gamma \in \mathcal{O}$, on a $\boldsymbol{\omega}|_{M^\gamma(F_S)} = 1$. On dit que $\gamma \in M(F_S)$ est $\boldsymbol{\omega}$-bon si sa classe de conjugaison l'est.

Nous utilisons les symboles pointés pour désigner un élément dans $\dot{\Gamma}(M(F_S))^{\boldsymbol{\omega}}$, eg. $\dot{\gamma}$; la classe de conjugaison sous-jacente est notée $\mathrm{Supp}(\dot{\gamma})$.

Une paire $\dot{\gamma} = (\mathcal{O}, \mu)$ donne naissance à l'intégrale orbitale

$$J_M^{\boldsymbol{\omega}}(\dot{\gamma}, f) := |D^M(\gamma)|^{\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{O}} f \,\mathrm{d}\mu, \quad f \in C_c^\infty(M(F_S)) \tag{III.24}$$

avec $\gamma \in \mathcal{O}$ quelconque, où D^M est le discriminant de Weyl (voir 5.6.1). Pour montrer qu'elle converge, il suffit de remplacer μ par $|\mu|$. On obtient ainsi une mesure de Radon invariante sur $\mathcal{O}$, ce qui permet d'appliquer le résultat de Rao [69]. On vérifie que, pour tout $y \in M(F_S)$

$$J_M^{\boldsymbol{\omega}}(y\dot{\gamma}y^{-1}, f) = J_M^{\boldsymbol{\omega}}(\gamma, f^y) = \boldsymbol{\omega}(y) J_M^{\boldsymbol{\omega}}(\dot{\gamma}, f). \tag{III.25}$$

Cela permet d'immerger $\dot{\Gamma}(M(F_S))^{\boldsymbol{\omega}}$ dans l'espace de distributions $\boldsymbol{\omega}$-équivariantes.

Donnons-en une construction directe. Soit $\gamma \in M(F_S)$ bon et notons $\mathcal{O}$ sa classe de conjugaison. Fixons une mesure invariante sur $M_\gamma(F_S)\backslash M(F_S)$. Alors on peut choisir une unique mesure complexe $\mu[\gamma]$ sur $\mathcal{O}$ de sorte que

$$J_M^{\boldsymbol{\omega}}((\mathcal{O}, \mu[\gamma]), f) = \int_{M_\gamma(F_S)\backslash M(F_S)} \boldsymbol{\omega}(x) f(x^{-1}\gamma x) \,\mathrm{d}x. \tag{III.26}$$

Il serait tentant de l'écrire comme $J_M^{\boldsymbol{\omega}}(\gamma, f)$; cependant il faut prendre garde qu'il dépend du choix de γ dans sa classe de conjugaison.

Induction de classes unipotentes Supposons que $\gamma \in M(F_S)$ est $\boldsymbol{\omega}$-bon ; soit $\dot{\gamma} \in \dot{\Gamma}(M(F_S))^{\boldsymbol{\omega}}$ tel que $\gamma \in \mathrm{Supp}(\dot{\gamma})$.

Supposons pour l'instant que $M_\gamma = G_\gamma$. On peut regarder $\dot{\gamma}$ comme un élément de $\dot{\Gamma}(G(F_S))^{\boldsymbol{\omega}} \sqcup \{0\}$ (comme distributions sur $G(F_S)$) en choisissant l'unique mesure telle que

$$J_G^{\boldsymbol{\omega}}(\dot{\gamma}, f) = \int_{M(F_S)\backslash G(F_S)} \boldsymbol{\omega}(x) J_M^{\boldsymbol{\omega}}(\dot{\gamma}, f^{x^{-1}}) \,\mathrm{d}x, \quad f \in C_c^\infty(G(F_S)). \tag{III.27}$$

Si l'on fixe des choix comme dans (III.26), c'est tout simplement

$$|D^M(\gamma)|^{\frac{1}{2}} \int_{M_\gamma(F_S)\backslash G(F_S)} \boldsymbol{\omega}(x) f(x^{-1}\gamma x)\,\mathrm{d}x;$$

et on a $\dot{\gamma} = 0$ dans G si et seulement si γ n'est pas $\boldsymbol{\omega}$-bon dans $G(F_S)$.

En général, notons $A_{M,\mathrm{reg}}$ l'ouvert dense de A_M des éléments a tels que

$$\prod_{\beta \in \Sigma_P^{\mathrm{red}}} (\beta(a) - \beta(a)^{-1}) \text{ soit inversible }, \quad P \in \mathcal{P}(M);$$

alors pour $a \in A_{M,\mathrm{reg}}(F_S)$ en position générale, on a $M_\gamma = M_{a\gamma} = G_{a\gamma}$. Notons $a\dot{\gamma} \in \dot{\Gamma}(M(F_S))^{\boldsymbol{\omega}}$ l'élément obtenu via le transport de structure. D'après (III.27), on regarde $a\dot{\gamma}$ comme un élément de $\dot{\Gamma}(G(F_S))^{\boldsymbol{\omega}}$.

Soit maintenant $\gamma \in M(F_S)$ unipotent. Lusztig et Spaltenstein [58] ont défini une classe de conjugaison géométrique unipotente γ^G dans $G(F_S)$. C'est une réunion finie de classes de conjugaison dans $G(F_S)$, disons $\gamma^G = \sqcup_{i\in I}\gamma_i^G$. Notons I_0 l'ensemble des $i \in I$ tels que γ_i^G est $\boldsymbol{\omega}$-bon.

Lemme 5.3.4 (cf. [12, (6.6)]). *Il existe des uniques mesures de Radon $\boldsymbol{\omega}$-équivariantes non triviales sur $\{\gamma_i^G\}_{i\in I_0}$ telles que si l'on note*

$$J_G^{\boldsymbol{\omega}}(\dot{\gamma}^G, \cdot) := \sum_{i\in I_0} J_G^{\boldsymbol{\omega}}(\dot{\gamma}_i^G, \cdot)$$

alors

$$J_G^{\boldsymbol{\omega}}(\dot{\gamma}^G, \cdot) = \lim_{\substack{a\to 1 \\ a\in A_{M,reg}(F_S)}} J_G^{\boldsymbol{\omega}}(a\dot{\gamma}, \cdot)$$

où les a dans la limite sont supposés en position générale de sorte que $M_{a\gamma} = G_{a\gamma}$.

Démonstration. Le cas $\boldsymbol{\omega} = 1$ est démontré dans [12]. La même démonstration marche si l'on utilise les mesures $\boldsymbol{\omega}$-équivariantes sur les classes de conjugaison. □

Cela étant, on peut définir $\dot{\gamma}^G$ comme une combinaison linéaire des éléments dans $\dot{\Gamma}(G(F_S))^{\boldsymbol{\omega}}$.

Intégrales orbitales pondérées Soit M un sous-groupe de Lévi de G. Soient $\gamma \in M(F_S)$ bon et $\mathcal{O}$ sa classe de conjugaison, prenons une paire $\dot{\gamma} = (\mathcal{O}, \mu) \in \dot{\Gamma}(M(F_S))^{\boldsymbol{\omega}}$.

Définition 5.3.5. Supposons que $M_\gamma = G_\gamma$. Si γ n'est pas $\boldsymbol{\omega}$-bon dans $G(F_S)$, posons

$$J_M^{\boldsymbol{\omega}}(\dot{\gamma}, \cdot) = 0;$$

sinon, $\dot{\gamma}$ induit une paire $(\mathcal{O}', \mu') \in \dot{\Gamma}(G(F_S))^{\boldsymbol{\omega}}$ via (III.27). Arthur a défini une (G, M)-famille

$$v_P(\lambda, x) := e^{-\langle \lambda, H_P(x)\rangle}, \quad P \in \mathcal{P}(M), \lambda \in i\mathfrak{a}_M^*;$$

associée à l'ensemble (G, M)-orthogonal positif $Y_P(x) = -H_P(x)$. Notons $v_M(x)$ la fonction associée ; elle est une fonction sur $M(F_S)\backslash G(F_S)/K_S$. Pour tout $t \in \mathcal{O}'$, écrivons $t = x^{-1}\gamma x$ et définissons une nouvelle mesure en posant $\mu'_M(t) = v_M(x)\mu'(t)$ (avec abus de notations) ; cela ne dépend pas du choix de x.

Pour $f \in C_c^\infty(G(F_S))$, posons

$$J_M^{\boldsymbol{\omega}}(\dot{\gamma}, f) := |D^G(\gamma)|^{\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{O}'} f\,\mathrm{d}\mu'_M.$$

La convergence découle en remplaçant μ'_M par $|\mu'_M|$, ce qui nous ramène au cas usuel $\boldsymbol{\omega} = 1$. Si l'on fixe des choix comme dans (III.26), c'est tout simplement

$$|D^G(\gamma)|^{\frac{1}{2}} \int\limits_{G_\gamma(F_S)\backslash G(F_S)} \boldsymbol{\omega}(x) f(x^{-1}\gamma x) v_M(x)\, \mathrm{d}x.$$

Revenons au cas général. Soit $L \in \mathcal{L}(M)$, Arthur définit un facteur $r^L_M(\gamma, a)$ pour tous $\gamma \in M(F_S)$, $a \in A_{M,\mathrm{reg}}(F_S)$ ([12, §5]), par lequel est définie l'intégrale orbitale pondérée générale. Ce facteur ne dépend que de L, M, a et la classe de conjugaison de γ dans M. Dans le cas $M_\gamma = G_\gamma$, on a

$$r^L_M(\gamma, a) = \begin{cases} 1, & \text{si } L = M, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $a \in A_{M,\mathrm{reg}}(F_S)$ est en position générale, alors $M_\gamma = M_{a\gamma} = G_{a\gamma}$ et on sait définir $a\dot{\gamma} \in \dot{\Gamma}(G(F_S))^{\boldsymbol{\omega}}$ à l'aide de (III.27).

Théorème 5.3.6 (cf. [12, 5.2])**.** *Pour tout $f \in C^\infty_c(G(F_S))$, la limite*

$$J^{\boldsymbol{\omega}}_M(\dot{\gamma}, f) := \lim_{\substack{a \to 1 \\ a \in A_{M,reg}(F_S)}} \sum_{L \in \mathcal{L}(M)} r^L_M(\gamma, a) J^{\boldsymbol{\omega}}_L(a\dot{\gamma}, f)$$

existe, où les a dans la limite sont supposés en position générale de sorte que $M_{a\gamma} = G_{a\gamma}$. Si $M_\gamma = G_\gamma$, elle coïncide avec la définition 6.3.1. On a

$$\forall y \in M(F_S), \quad J^{\boldsymbol{\omega}}_M(y\dot{\gamma}y^{-1}, f) = \boldsymbol{\omega}(y) J^{\boldsymbol{\omega}}_M(\dot{\gamma}, f).$$

Démonstration. Les termes à droite sont bien définis. La démonstration de l'existence de la limite est pareille que celle dans [12] : il suffit de tordre les mesures invariantes sur $G(F_S)$, K_S ou sur les orbites par $\boldsymbol{\omega}$, et on vérifie que cela n'affecte pas les démonstrations car $\boldsymbol{\omega}$ est unitaire. L'assertion sur l'équivariance est claire si $M_\gamma = G_\gamma$; le cas général s'en suit par définition. □

Lorsqu'une ambiguïté sur G sera à craindre, nous noterons les objets par $J^{G,\boldsymbol{\omega}}_M(\dot{\gamma}, f)$, etc.

Proposition 5.3.7 (cf. [12, 6.2])**.** *Soit $\dot{u} \in \dot{\Gamma}(M(F_S))^{\boldsymbol{\omega}}$ supporté sur une classe de conjugaison unipotente. Alors $f \mapsto J^{\boldsymbol{\omega}}_M(\dot{u}, f)$ définie une mesure complexe $\boldsymbol{\omega}$-équivariante sur l'induite u^G qui est absolument continue par rapport à la mesure définie dans 5.3.4.*

Le cas non ramifié Fixons G et M comme précédemment. Supposons que S consiste en places non archimédiennes et fixons $K_S := \prod_{v \in S} K_v$ tel que K_v est un sous-groupe hyperspécial de $G(F_v)$ en bonne position relativement à M pour chaque $v \in S$. Notons $\mathbb{1}_{K_S}$ la fonction caractéristique de K_S.

Définition 5.3.8. Les intégrales orbitales pondérées non ramifiées sont définies par

$$r^{\boldsymbol{\omega}}_{M,K_S}(\dot{\gamma}) = r^{G,\boldsymbol{\omega}}_{M,K_S}(\dot{\gamma}) := J^{\boldsymbol{\omega}}_M(\dot{\gamma}, \mathbb{1}_{K_S}), \quad \dot{\gamma} \in \dot{\Gamma}(G(F_S))^{\boldsymbol{\omega}}.$$

Lorsque γ est fortement régulier dans G, notre définition est celle dans [85].

5.4 Comportement des intégrales orbitales pondérées avec un caractère

Soient $\gamma \in M(F_S)$ $\boldsymbol{\omega}$-bon et prenons $\dot{\gamma} \in \dot{\Gamma}(M(F_S))^{\boldsymbol{\omega}}$ (i.e. on fixe la mesure) comme précédemment.

$(M,\sigma)^{\boldsymbol{\omega}}$-équivalence Soient $\sigma \in M(F_S)_{\mathrm{ss}}$ et $\Sigma \subset \sigma M_\sigma(F_S)$ un ouvert invariant par $M_\sigma(F_S)$. Notons

$$\dot{\Gamma}(\Sigma)^{\boldsymbol{\omega}} := \{\dot{\gamma} \in \dot{\Gamma}(M(F_S))^{\boldsymbol{\omega}} : \mathrm{Supp}(\dot{\gamma}) \subset \Sigma\}.$$

Supposons désormais que l'adhérence de Σ dans $\sigma M_\sigma(F_S)$ contient un voisinage invariant de σ. Suivant [12, p.235], on dit que deux fonctions ϕ_1, ϕ_2 sur $\dot{\Gamma}(\Sigma)^{\boldsymbol{\omega}}$ sont $(M,\sigma)^{\boldsymbol{\omega}}$-équivalentes s'il existe $f \in C_c^\infty(M(F_S))$ et un voisinage U de σ dans $M(F_S)$ tels que

$$(\phi_1 - \phi_2)(\dot{\gamma}) = J_M^{M,\boldsymbol{\omega}}(\dot{\gamma}, f)$$

pour tout $\dot{\gamma} \in \dot{\Gamma}(\Sigma)^{\boldsymbol{\omega}}$ tel que $\mathrm{Supp}(\dot{\gamma}) \subset U$. Si cette condition est vérifiée, on écrit

$$\phi_1 \overset{(M,\sigma)^{\boldsymbol{\omega}}}{\sim} \phi_2.$$

Proposition 5.4.1 (cf. [12, 2.2])**.** *Si $M_\sigma = G_\sigma$, alors pour tout $f \in C_c^\infty(M(F_S))$ on a*

$$J_M^{\boldsymbol{\omega}}(\dot{\gamma}, f) \overset{(M,\sigma)^{\boldsymbol{\omega}}}{\sim} 0$$

pour tout $\dot{\gamma} \in \dot{\Gamma}(M(F_S))^{\boldsymbol{\omega}}$ assez proche de σ modulo conjugaison.

Démonstration. La démonstration est identique à celle du cas $\boldsymbol{\omega} = 1$. □

Formules de descente

Proposition 5.4.2 (cf. [12, 6.2])**.** *Supposons γ unipotent. Soit $L_1 \in \mathcal{L}(M)$, alors pour tout $f \in C_c^\infty(G(F_S))$, on a*

$$J_{L_1}^{\boldsymbol{\omega}}(\dot{\gamma}^{L_1}, f) = \lim_{\substack{a \to 1 \\ a \in A_{M,reg}(F_S)}} \sum_{L \in \mathcal{L}(L_1)} r_{L_1}^L(\gamma, a) J_L^{\boldsymbol{\omega}}(a\dot{\gamma}, f).$$

Soit $Q = LU_Q \in \mathcal{F}(M)$. Définissons la version locale de (III.14) :

$$f_Q^{\boldsymbol{\omega}}(m) := \delta_Q(m)^{\frac{1}{2}} \int\limits_{K_S} \int\limits_{U_Q(F_S)} \boldsymbol{\omega}(k) f(k^{-1}muk)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}k, \quad m \in L(F_S).$$

Corollaire 5.4.3 (cf. [10, §8])**.** *Conservons les notations précédentes et fixons $\xi \in \mathfrak{a}_M^{L_1}$ en position générale comme dans* (III.11)*, ce qui permet d'associer à chaque $L \in \mathcal{L}(M)$ tel que $d_M^G(L_1, L) \neq 0$ un $Q_L \in \mathcal{P}(L)$. Alors*

$$J_{L_1}^{\boldsymbol{\omega}}(\dot{\gamma}^{L_1}, f) = \sum_{L \in \mathcal{L}(M)} d_M^G(L_1, L) J_M^{L,\boldsymbol{\omega}}(\dot{\gamma}, f_{Q_L}^{\boldsymbol{\omega}}).$$

Démonstration. L'énoncé dans [10] est pour les distributions invariantes ; or le cas $\boldsymbol{\omega} = 1$ du résultat voulu y est implicite. Les arguments d'Arthur s'adaptent de façon usuelle au cas général. □

De même, on a la formule de déploiement pour intégrales orbitales pondérées. Prenons $\xi \in \mathfrak{a}_{\mathcal{M}}^M$ en position générale comme dans (III.12), ce qui permet de définir une application $(L_1, L_2) \mapsto (Q_1, Q_2)$ avec $Q_i \in \mathcal{P}(L_i)$ $(i = 1, 2)$ pourvu que $d_M^G(L_1, L_2) \neq 0$.

Proposition 5.4.4 (cf. [11, 9.1])**.** *Supposons $S = S_1 \sqcup S_2$. Soit $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_1\dot{\gamma}_2$, où $\dot{\gamma}_i \in \dot{\Gamma}(M(F_{S_i}))^{\boldsymbol{\omega}}$ pour $i = 1, 2$. Soit $f = f_1 f_2 \in C_c^\infty(G(F_S))$ où $f_i \in C_c^\infty(G(F_{S_i}))$ pour $i = 1, 2$. Alors*

$$J_M^{\boldsymbol{\omega}}(\dot{\gamma}, f) = \sum_{L_1, L_2 \in \mathcal{L}(M)} d_M^G(L_1, L_2) J_M^{L_1}(\dot{\gamma}_1, f_{Q_1}^{\boldsymbol{\omega}}) J_M^{L_2}(\dot{\gamma}_2, f_{Q_2}^{\boldsymbol{\omega}}).$$

Non-invariance Conservons les mêmes notations. Soit $Q \in \mathcal{F}(M_0)$. On a la (G, M_Q)-famille

$$u_P(\lambda, x, y) = e^{-\langle \lambda, H_P(k_P(x)y)\rangle}, \quad x, y \in G(F_S).$$

On définit la version locale de (III.16)

$$f^{\boldsymbol{\omega}}_{Q,y}(m) = \delta_Q(m)^{\frac{1}{2}} \iint\limits_{K_S \times U_Q(F_S)} \boldsymbol{\omega}(k) f(k^{-1}muk) u'_Q(k, y) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}k, \quad m \in M_Q(F_S).$$

Proposition 5.4.5 (cf. [7, (8.2)])**.** *Pour tout $y \in G(F_S)$, on a*

$$J^{\boldsymbol{\omega}}_M(\dot{\gamma}, f^y) = \boldsymbol{\omega}(y) \sum_{Q \in \mathcal{F}(M)} J^{M_Q, \boldsymbol{\omega}}_M(\dot{\gamma}, f^{\boldsymbol{\omega}}_{Q,y}).$$

Démonstration. Prenons $\gamma \in \mathrm{Supp}(\dot{\gamma})$. Traitons d'abord le cas $M_\gamma = G_\gamma$. Fixons des mesures comme dans (III.26), alors

$$\begin{aligned} J^{\boldsymbol{\omega}}_M(\dot{\gamma}, f^y) &= |D^M(\gamma)|^{\frac{1}{2}} \int\limits_{M_\gamma(F_S)\backslash G(F_S)} \boldsymbol{\omega}(x) f(yx^{-1}\gamma x y^{-1}) v_M(x) \, \mathrm{d}x \\ &= |D^M(\gamma)|^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\omega}(y) \int\limits_{M_\gamma(F_S)\backslash G(F_S)} \boldsymbol{\omega}(x) f(x^{-1}\gamma x) v_M(xy) \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

On a $v_P(\lambda, xy) = v_P(\lambda) u_P(\lambda, x, y)$, donc 4.2.4 entraîne que

$$v_M(xy) = \sum_{Q \in \mathcal{F}(M)} v^Q_M(x) u'_Q(x, y).$$

Pour u fixé, on a

$$\begin{aligned} &\int\limits_{M_\gamma(F_S)\backslash G(F_S)} \boldsymbol{\omega}(x) f(x^{-1}\gamma x) v^Q_M(x) u'_Q(x, y) \, \mathrm{d}x = \\ &\iiint\limits_{U_Q(F_S) \times M_Q(F_S) \times K_S} \boldsymbol{\omega}(k)\boldsymbol{\omega}(m)\delta_Q(m)^{-1} f(k^{-1}m^{-1}u^{-1}\gamma umk) v^Q_M(m) u'_Q(k, y) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}m \, \mathrm{d}k = \\ &\int\limits_{M_Q(F_S)} \boldsymbol{\omega}(m) v^Q_M(m) \iint\limits_{K_S \times U_Q(F_S)} \boldsymbol{\omega}(k) \delta_Q(m)^{\frac{1}{2}} f(k^{-1}m^{-1}\gamma muk) u'_Q(k, y) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}k \, \mathrm{d}m. \end{aligned}$$

La (M_Q, M)-famille $v^Q_M(\lambda, m)$ ne dépend que de M et M_Q lorsque $m \in M_Q(F_S)$ (cf. [7, p.41]), on peut la noter $v^{M_Q}_M(\lambda, m)$ et on vérifie qu'elle donne la fonction de poids pour M_Q, M, K_S. Cela conclut le cas $M_\gamma = G_\gamma$.

En général, on en déduit

$$\begin{aligned} J^{\boldsymbol{\omega}}_M(\dot{\gamma}, f^y) &= \lim_{a \to 1} \sum_{L \in \mathcal{L}(M)} r^L_M(\gamma, a) \boldsymbol{\omega}(y) \sum_{Q \in \mathcal{F}^G(L)} J^{M_Q, \boldsymbol{\omega}}_L(a\dot{\gamma}, f^{\boldsymbol{\omega}}_{Q,y}) \\ &= \boldsymbol{\omega}(y) \sum_{Q \in \mathcal{F}^G(M)} \lim_{a \to 1} \left(\sum_{L \in \mathcal{L}^{M_Q}(M)} r^L_M(\gamma, a) J^{M_Q, \boldsymbol{\omega}}_L(a\dot{\gamma}, f^{\boldsymbol{\omega}}_{Q,y}) \right) \\ &= \boldsymbol{\omega}(y) \sum_{Q \in \mathcal{F}^G(M)} J^{M_Q, \boldsymbol{\omega}}_M(f^{\boldsymbol{\omega}}_{Q,y}). \end{aligned}$$

□

Proposition 5.4.6. *Soit* $y \in G(F_S)$ *tel que* $yMy^{-1} \in \mathcal{L}(M_0)$ *, alors*

$$J^{\boldsymbol{\omega}}_{yMy^{-1}}(y\dot{\gamma}y^{-1}, f) = \boldsymbol{\omega}(y) J^{\boldsymbol{\omega}}_M(\dot{\gamma}, f).$$

Démonstration. Comme K_S est spécial, on peut écrire $y = km$ où $k \in \pi((K_S)_{\mathrm{sc}})$ (i.e. k provient du revêtement simplement connexe de G_{der}) et $m \in M(F_S)$. Le problème se divise ainsi en deux cas : $y \in M(F_S)$ et $y \in \pi((K_S)_{\mathrm{sc}})$.

Si $y \in M(F_S)$, l'assertion découle de la proposition précédente. Si $y \in \pi((K_S)_{\mathrm{sc}})$, un transport de structure donne

$$J^{\boldsymbol{\omega}}_{yMy^{-1}}(y\dot{\gamma}y^{-1}, f) = J^{\boldsymbol{\omega}}_M(\dot{\gamma}, f^y).$$

Comme $\boldsymbol{\omega}(y) = 1$, il suffit de montrer que $f^{\boldsymbol{\omega}}_{Q,y} = 0$ si $Q \neq G$. Or c'est clair que $u_Q(k, y) = 0$ si $Q \neq G$, ce qui permet de conclure. □

Dépendance de K_S Soit $K_{1,S}$ un sous-groupe compact maximal de $G(F_S)$ en bonne position relativement à M_0. Ajoutons l'affixe K_1 aux objets définis par rapport à $K_{1,S}$. Soient $M \in \mathcal{L}(M_0)$, $T \in \mathfrak{a}_M$. Définissons les (G, M)-familles

$$\begin{aligned} v_P(\lambda, x, T) &:= e^{\langle \lambda, -H_P(x) + T \rangle}, \\ v_P(\lambda, x, T; K_1) &:= e^{\langle \lambda, -H_P(x; K_1) + T \rangle}, \quad P \in \mathcal{P}(M). \end{aligned}$$

La définition originelle des fonctions poids correspond au cas $T = 0$, mais T n'affecte pas les fonctions $v_M(x; K_1) = v_M(x, T; K_1)$ et $v_M(x) = v_M(x, T)$.

Définissons la (G, M)-famille

$$u_P(\lambda, x; K_1 | K, T) := e^{\langle \lambda, -H_P(k_P(x); K_1) + T \rangle}, \quad P \in \mathcal{P}(M).$$

Posons

$$f^{\boldsymbol{\omega}}_{Q, K_1|K,T}(m) := \delta_Q(m)^{\frac{1}{2}} \int\limits_{K_S} \int\limits_{U_Q(F_S)} \boldsymbol{\omega}(k) f(k^{-1}muk) u'_Q(k; K_1|K, T) \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}k.$$

Proposition 5.4.7 (cf. [18, 3.4])**.** *Soit* $T \in \mathfrak{a}_M$*. On a*

$$J^{\boldsymbol{\omega}}_M(\dot{\gamma}, f; K_1) = \sum_{Q \in \mathcal{F}(M)} J^{M_Q, \boldsymbol{\omega}}_M(\dot{\gamma}, f^{\boldsymbol{\omega}}_{Q, K_1|K,T}).$$

Démonstration. Il suffit de comparer les fonctions de poids : nous avons remarqué que celle associée à K_1 se déduit de la (G, M)-famille $v_P(x, T; K_1)$. Or

$$-H_P(x; K_1) + T = -H_P(x) - H_P(k_P(x); K_1) + T, \quad P \in \mathcal{P}(M).$$

D'où

$$v_P(\lambda, x, T; K_1) = v_P(\lambda, x, 0) u_P(\lambda, x; K_1|K, T), \quad P \in \mathcal{P}(M).$$

On peut reprendre la preuve de 5.4.5 à partir de maintenant. □

5.5 Développement fin du terme unipotent

Fixons S un sous-ensemble fini de places de F. Supposons que
– S contient toutes les places archimédiennes ;
– K_v est hyperspécial pour tout $v \notin S$;
– $\boldsymbol{\omega}$ est trivial sur K^S.
Désignons par f_{K^S} la fonction caractéristique de K^S. On définit un homomorphisme continu injectif

$$\begin{aligned} C_c^\infty(G(F_S)) &\to C_c^\infty(G(\mathbb{A})) \\ f &\mapsto f \cdot f_{K^S}, \end{aligned}$$

par lequel on identifie $C_c^\infty(G(F_S))$ à un sous-espace de $C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$.

Soit M un sous-groupe de Lévi de G, notons

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_{\text{unip}}(M(F_S))^{\boldsymbol{\omega}} &:= \{\dot{u} \in \dot{\Gamma}(M(F_S))^{\boldsymbol{\omega}} : \operatorname{Supp}(\dot{u}) \subset M_{\text{unip}}(F_S)\}, \\ \dot{\Gamma}_{\text{unip}}(M(F), S)^{\boldsymbol{\omega}} &:= \{\dot{u} \in \dot{\Gamma}_{\text{unip}}(M(F_S))^{\boldsymbol{\omega}} : \operatorname{Supp}(\dot{u}) \cap M(F) \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

En oubliant les mesures, on définit $\Gamma_{\text{unip}}(M(F_S))^{\boldsymbol{\omega}}$ et $\Gamma_{\text{unip}}(M(F), S)^{\boldsymbol{\omega}}$ de la même manière.

Théorème 5.5.1 (cf. [8])**.** *Il existe une unique application $a^{M,\boldsymbol{\omega}}(S, \cdot) : \dot{\Gamma}_{\text{unip}}(M(F), S))^{\boldsymbol{\omega}} \to \mathbb{C}$ pour tout $M \in \mathcal{L}(M_0)$, satisfaisant à l'équivariance*

$$a^{M,\boldsymbol{\omega}}(S, y\dot{u}y^{-1}) = \boldsymbol{\omega}(y)^{-1} a^{M,\boldsymbol{\omega}}(S, \dot{u}), \quad y \in M(F_S),$$

telle que, pour tout $f \in C_c^\infty(G(F_S) \cap G(\mathbb{A})^1)$, on a

$$J^{\boldsymbol{\omega}}_{\text{unip}}(f) = \sum_{M \in \mathcal{L}(M_0)} |W_0^M||W_0^G|^{-1} \sum_{u \in \Gamma_{\text{unip}}(M(F),S)^{\boldsymbol{\omega}}} a^{M,\boldsymbol{\omega}}(S, \dot{u}) J^{\boldsymbol{\omega}}_M(\dot{u}, f)$$

où $\dot{u} \in \dot{\Gamma}_{\text{unip}}(M(F), S)$ est une image réciproque de u quelconque. De plus, $a^{M,\boldsymbol{\omega}}(S, \cdot)$ ne dépend pas de K_S.

Les coefficients $a^{M,\boldsymbol{\omega}}(S, \cdot)$ dépendent encore de M, M_0 et K^S. La dépendance de M_0 sera enlevée plus tard par 5.5.4. L'équivariance des coefficients affirme que le produit $a^{M,\boldsymbol{\omega}}(S, \dot{u}) J^{\boldsymbol{\omega}}_M(\dot{u}, f)$ ne dépend que de u.

Démonstration. C'est le résultat principal de [8]. Il n'y a rien à prouver si G est anisotrope modulo son centre. Supposons donc par récurrence que l'assertion est vérifiée pour tout sous-groupe de Lévi propre. Posons

$$T^{\boldsymbol{\omega}}(f) := J^{\boldsymbol{\omega}}_{\text{unip}}(f) - \sum_{\substack{M \in \mathcal{L}(M_0) \\ M \neq G}} |W_0^M||W_0^G|^{-1} \sum_{u \in \Gamma_{\text{unip}}(M(F),S)^{\boldsymbol{\omega}}} a^{M,\boldsymbol{\omega}}(S, \dot{u}) J^{\boldsymbol{\omega}}_M(\dot{u}, f).$$

Soit $y \in G(\mathbb{A})$. La formule de non-invariance 5.2.8 entraîne que

$$J^{\boldsymbol{\omega}}_{\text{unip}}(f^y) - \boldsymbol{\omega}(y) J^{\boldsymbol{\omega}}_{\text{unip}}(f) = \boldsymbol{\omega}(y) \sum_{\substack{Q \in \mathcal{F}(M_0) \\ Q \neq G}} |W_0^{M_Q}||W_0^G|^{-1} J^{M_Q,\boldsymbol{\omega}}_{\text{unip}}(f^{\boldsymbol{\omega}}_{Q,y}),$$

tandis que 5.4.5 entraîne que

$$\sum_{\substack{M\in\mathcal{L}(M_0)\\ M\neq G}} |W_0^M||W_0^G|^{-1}\sum_u a^{M,\boldsymbol{\omega}}(S,\dot u)(J_M^{\boldsymbol{\omega}}(\dot u, f^y)-\boldsymbol{\omega}(y)J_M^{\boldsymbol{\omega}}(\dot u,y))$$
$$=\boldsymbol{\omega}(y)\sum_{\substack{M\in\mathcal{L}(M_0)\\ M\neq G}} |W_0^M||W_0^G|^{-1}\sum_{\substack{Q\in\mathcal{F}(M)\\ Q\neq G}}\sum_u a^{M,\boldsymbol{\omega}}(S,\dot u)J_M^{M_Q,\boldsymbol{\omega}}(\dot u, f_{Q,y}^{\boldsymbol{\omega}})$$
$$=\boldsymbol{\omega}(y)\sum_{\substack{Q\in\mathcal{F}(M_0)\\ Q\neq G}} |W_0^{M_Q}||W_0^G|^{-1}\sum_{M\in\mathcal{L}^{M_Q}(M_0)}|W_0^M||W_0^{M_Q}|^{-1}\sum_u a^{M,\boldsymbol{\omega}}(S,\dot u)J_M^{M_Q,\boldsymbol{\omega}}(\dot u, f_{Q,y}^{\boldsymbol{\omega}}).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit $T^{\boldsymbol{\omega}}(f^y)=\boldsymbol{\omega}(y)T^{\boldsymbol{\omega}}(f)$. Par conséquent $T^{\boldsymbol{\omega}}$ est $\boldsymbol{\omega}$-équivariant. D'autre part, on montre (cf. [8, 4.2]) que si f s'annule sur $G_{\mathrm{unip}}(\mathbb{A})$, alors $J^{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{unip}}(f)=0$. La même propriété est satisfaite par les distributions $J_M^{\boldsymbol{\omega}}(\dot u,\cdot)$ d'après 5.3.7, donc par $T^{\boldsymbol{\omega}}(\cdot)$. Par conséquent, il existe des coefficients $a^{G,\boldsymbol{\omega}}(S,\dot u)$ satisfaisant à la condition d'équivariance telle que

$$T^{\boldsymbol{\omega}}(f)=\sum_{u\in\Gamma_{\mathrm{unip}}(M(F_S))^{\boldsymbol{\omega}}} a^{G,\boldsymbol{\omega}}(S,\dot u)J_G^{\boldsymbol{\omega}}(\dot u,f).$$

pour tout f. Si l'on sélectionne une image réciproque $\dot u$ pour chaque u, alors la famille de distributions $\{J_G^{\boldsymbol{\omega}}(\dot u,f): u\in\Gamma_{\mathrm{unip}}(M(F_S))^{\boldsymbol{\omega}}\}$ est libre. L'unicité de $a^{G,\boldsymbol{\omega}}(S,\cdot)$ en découle.

Il reste à montrer que les classes qui contribuent sont celles rencontrant $G(F)$. C'est l'ingrédient technique de [8, §2 - §7]. On vérifie que les troncatures et estimations d'Arthur dans [8] demeurent valables si l'on utilise la mesure complexe $\boldsymbol{\omega}(x)\,\mathrm{d}x$ sur $G(\mathbb{A})$ et les autres groupes en question.

Montrons l'indépendance de K_S. Soit $K_{1,S}$ un autre sous-groupe compact de $G(F_S)$ en bonne position relativement à M_0. Ajoutons l'affixe K_1 aux objets associés au sous-groupe compact maximal $K_1=K_{1,S}\times K^S$ de $G(\mathbb{A})$. On reprend les arguments ci-dessus en utilisant 5.2.15 et 5.4.7 avec $T=T_1-T_0$ où T_1 (resp. T_0) est le paramètre de troncature canonique pour K_1 (resp. K), pour obtenir

$$T^{\boldsymbol{\omega}}(f;K_1)=T^{\boldsymbol{\omega}}(f).$$

Comme la distribution $J_G^{\boldsymbol{\omega}}(\dot u,\cdot)$ ne dépend que de $\dot u$, on tire du développement de $T^{\boldsymbol{\omega}}$ que $a^{G,\boldsymbol{\omega}}(S,\dot u;K_1)=a^{G,\boldsymbol{\omega}}(S,\dot u)$. Ceci est aussi valable pour tout $M\in\mathcal{L}(M_0)$ au lieu de G, ce qu'il fallait démontrer. □

Maintenant, prenons un sous-ensemble fini S_+ de places tel que $S_+\supset S$. Fixons $M\in\mathcal{L}(M_0)$ et posons $K^\#:=K\cap M(F^S_{S_+})$. Si $\dot u\in\dot\Gamma(L(F),S_+)^{\boldsymbol{\omega}}$, on choisit une décomposition $\dot u_S:=\prod_{v\in S}\dot u_v$ (resp. $\dot u^S_{S_+}:=\prod_{v\in S_+\setminus S}\dot u_v$) ; c'est bien déterminé à multiplication près par $\{(\lambda_v)_{v\in S}\in(\mathbb{C}^\times)^S:\prod_v\lambda_v=1\}$ (resp. $(\lambda_v)_{v\in S_+\setminus S}$, etc). Soit $D=\sum_{i\in I}\dot u_i$ une somme finie d'éléments dans $\dot\Gamma(G(F_S))^{\boldsymbol{\omega}}$; pour $\dot u\in\dot\Gamma(G(F_S))^{\boldsymbol{\omega}}$, écrivons

$$\frac{D}{\dot u}:=\sum_{\substack{i\in I\\ \dot u_i\sim\dot u}}\frac{\dot u_i}{\dot u}\in\mathbb{C}.$$

Proposition 5.5.2. *Soit $\dot v\in\dot\Gamma_{\mathrm{unip}}(M(F),S)^{\boldsymbol{\omega}}$, alors*

$$a^{M,\boldsymbol{\omega}}(S,\dot v)=\sum_{L\in\mathcal{L}^M(M_0)}|W_0^L||W_0^M|^{-1}\sum_{u\in\Gamma_{\mathrm{unip}}(L(F),S_+)^{\boldsymbol{\omega}}}\frac{(\dot u_S)^M}{\dot v}\cdot a^{L,\boldsymbol{\omega}}(S_+,\dot u)\cdot r^{M,\boldsymbol{\omega}}_{L,K^\#}(\dot u^S_{S_+}).$$

On vérifie sans peine que l'expression dans la somme ne dépend pas du choix de $\dot{u}$.

Démonstration. Prenons $\xi \in \mathfrak{a}^M_{\mathcal{M}} := \{(H,-H) : H \in \mathfrak{a}_M\}$ en position générale comme dans (III.12) tel que sa projection dans $\mathfrak{a}^G_M$ vérifie aussi les conditions pour (III.11). On dispose alors d'une application $(L_1, L_2) \mapsto (Q_1, Q_2)$ pour $d^G_M(L_1, L_2) \neq 0$.

Notons $\mathbb{1}^S_{S_+} \in C^\infty_c(G(F^S_{S_+}))$ la fonction caractéristique de $K^S_{S_+}$. On déduit de 5.5.1 (appliqué à S_+) et de 5.4.4 que pour tout $f \in C^\infty_c(G(F_S) \cap G(\mathbb{A})^1)$,

$$\begin{aligned} J^{\boldsymbol{\omega}}_{\text{unip}}(f) &= \sum_{L \in \mathcal{L}(M_0)} |W^L_0||W^G_0|^{-1} \sum_{u \in \Gamma_{\text{unip}}(L(F), S_+)^{\boldsymbol{\omega}}} a^{L,\boldsymbol{\omega}}(S_+, \dot{u}) J^{\boldsymbol{\omega}}_L(\dot{u}, f \cdot \mathbb{1}^S_{S_+}) \\ &= \sum_L |W^L_0||W^G_0|^{-1} \sum_{u \in \Gamma_{\text{unip}}(L(F), S_+)^{\boldsymbol{\omega}}} a^{L,\boldsymbol{\omega}}(S_+, \dot{u}) \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{M, M' \in \mathcal{L}(L)} d^G_L(M', M) J^{M',\boldsymbol{\omega}}_L(\dot{u}_S, f^{\boldsymbol{\omega}}_{Q'}) J^{M,\boldsymbol{\omega}}_L(\dot{u}^S_{S_+}, (\mathbb{1}^S_{S_+})^{\boldsymbol{\omega}}_Q). \end{aligned}$$

Comme $\boldsymbol{\omega}$ est supposé trivial sur K^S, on a

$$\begin{aligned} (\mathbb{1}^S_{S_+})^{\boldsymbol{\omega}}_Q(m) &= \delta_Q(m)^{\frac{1}{2}} \int_{K^S_{S_+}} \int_{U_Q(F^S_{S_+})} \mathbb{1}^S_{S_+}(k^{-1}muk) \,\mathrm{d}k \,\mathrm{d}u \\ &= \delta_Q(m)^{\frac{1}{2}} \int_{U_Q(F^S_{S_+})} \mathbb{1}^S_{S_+}(mu) \,\mathrm{d}u = \mathbb{1}_{K^\#}(m), \quad m \in M(F^S_{S_+}). \end{aligned}$$

Donc 5.4.3 entraîne que

$$\begin{aligned} J^{\boldsymbol{\omega}}_{\text{unip}}(f) &= \sum_{L,u} |W^L_0||W^G_0|^{-1} a^{L,\boldsymbol{\omega}}(S_+, \dot{u}) \sum_{M \in \mathcal{L}(L)} r^{M,\boldsymbol{\omega}}_{L,K^\#}(\dot{u}^S_{S_+}) \left(\sum_{M' \in \mathcal{L}(M)} d^G_L(M', M) J^{M',\boldsymbol{\omega}}_L(\dot{u}_S, f^{\boldsymbol{\omega}}_{Q'}) \right) \\ &= \sum_{L,u} |W^L_0||W^G_0|^{-1} a^{L,\boldsymbol{\omega}}(S_+, \dot{u}) \sum_{M \in \mathcal{L}(L)} r^{M,\boldsymbol{\omega}}_{L,K^\#}(\dot{u}^S_{S_+}) J^{\boldsymbol{\omega}}_M((\dot{u}_S)^M, f). \end{aligned}$$

On l'écrit comme

$$\begin{aligned} &\sum_{M \in \mathcal{L}(M_0)} |W^M_0||W^G_0|^{-1} \sum_{v \in \Gamma_{\text{unip}}(M(F), S)^{\boldsymbol{\omega}}} J^{\boldsymbol{\omega}}_M(\dot{v}, f) \cdot \\ &\quad \cdot \left(\sum_{L \in \mathcal{L}^M(M_0)} |W^L_0||W^M_0|^{-1} \sum_{u \in \Gamma_{\text{unip}}(L(F), S_+)^{\boldsymbol{\omega}}} \frac{(\dot{u}_S)^M}{\dot{v}} \cdot a^{L,\boldsymbol{\omega}}(S_+, \dot{u}) r^{M,\boldsymbol{\omega}}_{L,K^\#}(\dot{u}^S_{S_+}) \right). \end{aligned}$$

Vu le développement 5.5.1 appliqué à S et l'unicité des coefficients, l'assertion en découle. □

Ci-dessous un interlude élémentaire de la théorie de Bruhat-Tits. Soit E un corps local non archimédien.

Lemme 5.5.3. *Soient H un E-groupe réductif connexe et L un sous-groupe de Lévi. Soit K_H un sous-groupe compact maximal de $H(E)$ en bonne position relativement à L. Si K'_H est un sous-groupe compact maximal en bonne position relativement à L et conjugué à K_H par $H(E)$, alors K'_H est conjugué par K_H par $L(E)$.*

Démonstration. Supposons d'abord que L est minimal, alors c'est le centralisateur d'un E-tore déployé maximal T_0. D'après la définition de l'immeuble de Bruhat-Tits [25, 7.4.1], K_H et K'_H sont conjugués par $N_H(T_0)(E)$. Comme K_H est spécial, il contient des représentants du groupe de Weyl de T_0. Par conséquent K_H et K'_H sont conjugués par $L(E)$.

En général, K_H et K'_H sont associés à des points dans l'immeuble élargi de L, qui se plonge dans celui de H de façon équivariante. Quitte à les conjuguer par $L(E)$, on peut supposer qu'ils appartiennent au même appartement, ce qui nous ramène au cas précédent. □

Proposition 5.5.4. *Soient M'_0 un autre sous-groupe de Lévi minimal en bonne position relativement à K. Si $M \supset M_0$ et $M \supset M'_0$, alors les coefficients $a^{M,\boldsymbol{\omega}}(S,\cdot)$ associés à M'_0 coïncident avec ceux associés à M_0.*

Démonstration. Afin de souligner la dépendance en question, notons $a^{M,\boldsymbol{\omega}}(S,\cdot;K^S,M_0)$ (resp. $a^{M,\boldsymbol{\omega}}(S,\cdot;K^S,M'_0)$) les coefficients associés à K^S et M_0 (resp. M'_0). Notons $\pi : M_{\mathrm{SC}} \to M$ le revêtement simplement connexe de M_{der} ; si $L \in \mathcal{L}^M(M_0)$, notons L_{sc} son image réciproque par π. Prenons $y \in \pi(M_{\mathrm{SC}}(F))$ tel que $yM'_0y^{-1} = M_0$, alors yK^Sy^{-1} est en bonne position relativement à M_0 et $\boldsymbol{\omega}(y_v) = 1$ pour tout v.

Le transport de structure induit par $x \mapsto yxy^{-1}$ donne

$$a^{M,\boldsymbol{\omega}}(S,\dot{v};K^S,M'_0) = a^{M,\boldsymbol{\omega}}(S,y\dot{v}y^{-1};(yKy^{-1})^S,M_0) = a^{M,\boldsymbol{\omega}}(S,\dot{v};(yKy^{-1})^S,M_0)$$

pour tout $\dot{v} \in \dot{\Gamma}_{\mathrm{unip}}(M(F),S)^{\boldsymbol{\omega}}$. On peut oublier M'_0 dès maintenant et se ramener à montrer que $a^{M,\boldsymbol{\omega}}(S,\cdot;(yKy^{-1})^S) = a^{M,\boldsymbol{\omega}}(S,\cdot;(yKy^{-1})^S)$.

Prenons $S_+ \supset S$ de sorte que $y_v \in K_v$ pour $v \notin S_+$. Vu 5.5.2, il suffit de montrer que pour tout $L \in \mathcal{L}^M(M_0)$,

$$r^{M,\boldsymbol{\omega}}_{L,K^\#}(\dot{u}^S_{S_+}) = r^{M,\boldsymbol{\omega}}_{L,yK^\#y^{-1}}(\dot{u}^S_{S_+})$$

pour tout $\dot{u} \in \dot{\Gamma}_{\mathrm{unip}}(M(F),S_+)^{\boldsymbol{\omega}}$, où $K^\# := K \cap M(F^S_{S_+})$ comme dans 5.5.2 et la notation y est quelque peu abusive pour signifier aussi $y^S_{S_+}$. D'après 5.5.3, il existe $z \in \pi(L_{\mathrm{sc}}(F^S_{S_+}))$ tel que $yK^\#y^{-1} = zK^\#z^{-1}$. Le transport de structure via $x \mapsto zxz^{-1}$ donne

$$r^{M,\boldsymbol{\omega}}_{L,K^\#}(\dot{u}^S_{S_+}) = r^{M,\boldsymbol{\omega}}_{L,zK^\#z^{-1}}(z\dot{u}^S_{S_+}z^{-1}) = \boldsymbol{\omega}(z)r^{M,\boldsymbol{\omega}}_{L,zK^\#z^{-1}}(\dot{u}) = \boldsymbol{\omega}(z)r^{M,\boldsymbol{\omega}}_{L,yK^\#y^{-1}}(\dot{u}).$$

Or $\boldsymbol{\omega}(z) = 1$, ce qui achève la démonstration. □

Remarque 5.5.5. Le bilan est que les coefficients $a^{M,\boldsymbol{\omega}}(S,\cdot)$ sont déterminés par les données M, $\boldsymbol{\omega}$, S, et le sous-groupe compact maximal K^S de $M(F^S)$ tels que

– il existe un sous-groupe de Lévi minimal M_0 de M, défini sur F, qui est en bonne position relativement à K^S ;
– $\boldsymbol{\omega}$ est trivial sur K^S.

5.6 Interlude : S-admissibilité

Pour l'instant, soit M un F-groupe réductif connexe quelconque, et soit S un ensemble fini de places tel que M est non ramifié en dehors de S. La définition suivante fournit une façon explicite de dire que S est suffisamment grand.

Définition 5.6.1 (cf. [20, §1])**.** Définissons un morphisme invariant $\mathcal{D} = (D_0,\ldots,D_d) : M \to \mathbb{G}_{\mathrm{a}}^{d+1}$ avec $d := \dim M$, par

$$\det(1 + t - \mathrm{Ad}\,(x)|\mathfrak{m}) = \sum_{k=0}^{d} D_k(x)t^k \in F[t].$$

Observons que $D_d = 1$. Pour $X = (X_0, \ldots, X_d) \in F^{d+1}$, notons $X_{\min}$ sa première coordonnée non nulle. Alors le discriminant de Weyl est $D^M(x) = \mathcal{D}(x)_{\min}$.

– Un sous-ensemble $C_S \subset F_S^{d+1} \setminus \{0\}$ est dit admissible si pour tout $X \in F^{d+1} \cap (C_S \times (\mathfrak{o}^S)^{d+1})$, on a $|X_{\min}|_v = 1$ pour toute place $v \notin S$.
– Un sous-ensemble $\Delta_S \in M(F_S)$ est dit admissible si $\mathcal{D}(\Delta_S) \subset F_S^{d+1}$ l'est.
– Un sous-ensemble $\Delta \in M(\mathbb{A})$ est dit S-admissible s'il existe $C_S \subset F_S^{d+1}$ admissible tel que $\mathcal{D}(\Delta) \subset C_S \times (\mathfrak{o}^S)^{d+1}$.

En particulier, on peut parler de la S-admissibilité d'un élément ou d'une classe de conjugaison dans $M(F)$ ou dans $M(\mathbb{A})$. Étant donné un sous-ensemble compact Δ de $M(\mathbb{A})$, on peut toujours agrandir S de sorte que Δ est S-admissible.

Nous utiliserons souvent le lemme suivant dû à Kottwitz.

Proposition 5.6.2. *Fixons $K^S = \prod_{v \notin S} K_v$ où K_v est un sous-groupe hyperspécial de $M(F_v)$ pour tout $v \notin S$. Soit $\sigma \in M(F)$ semi-simple. Si σ est S-admissible et $\sigma^S \in K^S$, alors pour tout $v \notin S$, on a*
– *$K_v \cap M_\sigma(F_v)$ est un sous-groupe hyperspécial de $M_\sigma(F_v)$;*
– *soit $y \in M(\overline{F_v})$ tel que $y^{-1}\sigma y \in K_v$, alors il existe $y_1 \in M_\sigma(\overline{F_v})$ et $k \in K_v$ tels que $y = y_1 k$.*

Démonstration. La première assertion résulte de [47, 7.1]. Quant à la deuxième assertion, ledit lemme de Kottwitz fournit une décomposition $y = y_1 k$ avec $y_1 \in M^\sigma(\overline{F_v})$ et $k \in K_v$. Si M_{der} est simplement connexe alors $M^\sigma = M_\sigma$ et cela achève la démonstration. Le cas général en résulte à l'aide d'une z-extension non ramifiée de $M \times_F F_v$ (cf. [47, p.386]). □

5.7 Transport de structure

On se donne les objets suivants
– S un ensemble fini de places de F tel que $S \supset V_\infty$ et K_v est hyperspécial pour tout $v \notin S$;
– $M, M' \in \mathcal{L}^G(M_0)$;
– $\sigma \in M(F)$ semi-simple tel que $\sigma^S \in K^S$ et que σ est S-admissible ;
– idem pour $\sigma' \in M'(F)$;
– $\boldsymbol{\omega}$: caractère automorphe de $M_\sigma(\mathbb{A})$, trivial sur $K_\sigma^S := K^S \cap M_\sigma(\mathbb{A})$;
– $\boldsymbol{\omega}'$: caractère automorphe de $M'_{\sigma'}(\mathbb{A})$, trivial sur $K_{\sigma'}^S := K^S \cap M'_{\sigma'}(\mathbb{A})$.

Quitte à conjuguer σ, σ' et à agrandir S, on peut supposer de plus que :
– il existe un sous-groupe de Lévi standard M_1 tel que $\sigma \in M_1(F)$ mais σ n'appartient à aucun sous-groupe de Lévi propre de M_1, cela entraîne que $M_{1,\sigma}$ est un sous-groupe de Lévi minimal de M_σ ;
– idem, il existe un sous-groupe de Lévi standard M_1' vérifiant ladite condition avec σ', M' au lieu de σ, M.

Écrivons $K_\sigma^S = \prod_{v \notin S} K_{\sigma,v}$ et $K_{\sigma'}^S = \prod_{v \notin S} K_{\sigma',v}$. Le lemme de Kottwitz 5.6.2 affirme que pour tout $v \notin S$, $K_{\sigma,v}$ est un sous-groupe hyperspécial de $M_\sigma(F_v)$; c'est aussi clair que $K_{\sigma,v}$ est en bonne position relativement à $M_{1,\sigma}$. Idem pour $K_{\sigma',v} \subset M'_\sigma(F_v)$ et $M'_{1,\sigma'}$.

Vu 5.5.5, à ces données sont associés les coefficients du développement géométrique fin

$$a^{M_\sigma, \boldsymbol{\omega}}(S, \cdot), a^{M'_{\sigma'}, \boldsymbol{\omega}'}(S, \cdot).$$

On se propose de comparer ces coefficients. Définissons d'abord le transporteur

$$\mathcal{T}(\sigma, \sigma') := \{y \in G : y\sigma y^{-1} = \sigma',\ yMy^{-1} = M'\}.$$

C'est une sous-variété de G définie sur F sur laquelle M_σ (resp. $M'_{\sigma'}$) opère à droite (resp. à gauche) par multiplication.

Hypothèse 5.7.1. Supposons que

– $\mathcal{T}(\sigma, \sigma')(F) \neq \emptyset$;

– pour toute place v de F, on fixe une application $\Omega_v : \mathcal{T}(\sigma, \sigma')(F_v) \to \mathbb{C}^\times$, telle que

  – $\Omega_v(x'yx) = \boldsymbol{\omega}'(x')\Omega_v(y)\boldsymbol{\omega}(x)$ pour tout $x' \in M'_{\sigma'}(F_v)$, $x \in M_\sigma(F_v)$ et $y \in \mathcal{T}(\sigma, \sigma')(F_v)$;

  – si $v \notin S$, alors $\Omega_v(x_v) = 1$ pour tout $x_v \in K_v \cap \mathcal{T}(\sigma, \sigma')(F_v)$.

Soit $V \subset V_F$ (éventuellement infini). Par abus de notation, on note $\Omega : \mathcal{T}(\sigma, \sigma')(F_V) \to \mathbb{C}^\times$ l'application donnée par $\prod_{v \in V} \Omega_v$, ce qui est bien définie d'après la dernière condition. En particulier, on sait définir $\Omega : \mathcal{T}(\sigma, \sigma')(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$. On demande de plus que

– $\Omega|_{\mathcal{T}(\sigma,\sigma')F)} = 1$.

Exemple 5.7.2. Supposons que $\mathcal{T}(\sigma, \sigma')(F) \neq \emptyset$ et qu'il existe un caractère automorphe $\bar{\boldsymbol{\omega}} : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$ qui est trivial sur K^S, tel que $\boldsymbol{\omega} = \bar{\boldsymbol{\omega}}|_{M_\sigma(\mathbb{A})}$, $\boldsymbol{\omega}' = \bar{\boldsymbol{\omega}}|_{M'_{\sigma'}(\mathbb{A})}$. Prenons $\Omega_v := \bar{\boldsymbol{\omega}}|_{\mathcal{T}(\sigma,\sigma')(F_v)}$ pour tout v. Alors les conditions sur Ω sont satisfaites.

Le résultat suivant dit qu'un élément dans $\mathcal{T}(\sigma, \sigma')$ transporte les caractères automorphes.

Lemme 5.7.3. *Si 5.7.1 est vérifiée, alors pour tout $y \in \mathcal{T}(\sigma, \sigma')(\mathbb{A})$, on a*

$$\boldsymbol{\omega}'(yxy^{-1}) = \boldsymbol{\omega}(x), \quad x \in M_\sigma(\mathbb{A}).$$

Démonstration. Pour $x \in M_\sigma(\mathbb{A})$, on a $yxy^{-1} \in M'_{\sigma'}(\mathbb{A})$. Donc

$$\Omega(yxy^{-1}y) = \boldsymbol{\omega}'(yxy^{-1})\Omega(y).$$

Or c'est aussi égal à $\Omega(yx) = \Omega(y)\boldsymbol{\omega}(x)$, d'où l'assertion. □

Proposition 5.7.4. *Supposons que 5.7.1 est vérifiée. Soit $y \in \mathcal{T}(\sigma, \sigma')(F)$, alors pour tout $\dot{u} \in \dot{\Gamma}_{\mathrm{unip}}(M_\sigma(F), S)^{\boldsymbol{\omega}}$, on a*

$$a^{M_\sigma, \boldsymbol{\omega}}(S, \dot{u}) = \Omega(y^S)^{-1} a^{M'_{\sigma'}, \boldsymbol{\omega}'}(S, y\dot{u}y^{-1}).$$

Démonstration. On peut translater y par $M'_{\sigma'}(F)$ à gauche, donc on se ramène au cas où $yM_{1,\sigma}y^{-1} = M'_{1,\sigma}$. Par transport de structure, on a

$$a^{M'_{\sigma'}, \boldsymbol{\omega}'}(S, y\dot{u}y^{-1}) = a^{M_\sigma, \boldsymbol{\omega}}(S, \dot{u}; y^{-1}(K^S \cap M'_{\sigma'}(F^S))y).$$

Posons

$$\begin{aligned} K_1 &:= K^S \cap M_\sigma(F^S), \\ K_2 &:= y^{-1}(K^S \cap M'_{\sigma'}(F^S))y. \end{aligned}$$

Alors K_1, K_2 sont des sous-groupes compacts maximaux de $M_\sigma(F^S)$ en bonne position relativement à $M_{1,\sigma}$. On doit prouver que

$$a^{M_\sigma, \boldsymbol{\omega}}(S, \dot{u}; K_2) = \Omega(y^S) a^{M_\sigma, \boldsymbol{\omega}}(S, \dot{u}; K_1) \tag{III.28}$$

On prend $S_+ \supset S$ assez grand de sorte que $K_{2,v} = K_{1,v}$ et $y \in K_v$ pour $v \notin S_+$. On applique 5.5.2 avec le Lévi minimal $M_{1,\sigma}$ et $S_+ \supset S$. Ainsi, on est ramené à prouver

$$r^{M_\sigma, \boldsymbol{\omega}}_{L, K_2}(\dot{t}) = \Omega(y^S) r^{M_\sigma, \boldsymbol{\omega}}_{L, K_1}(\dot{t}), \qquad \forall L \in \mathcal{L}^{M_\sigma}(M_{1,\sigma}), \dot{t} \in \dot{\Gamma}(M_\sigma(F^S_{S_+}))^{\boldsymbol{\omega}}. \tag{III.29}$$

Pour tout v, W_0^G est représenté par des éléments de K_v. Donc il existe $k_1 \in K^S$ et $m \in M(F^S)$ tels que $y^S = k_1 m$. Alors $m\sigma^S m^{-1} = k_1^{-1}(\sigma')^S k_1 \in K^S \cap M(F^S)$. D'après 5.6.2 appliqué à M et $K^S \cap M(F^S)$, il existe $k_2 \in K^S \cap M(F^S)$ et $m_\sigma \in M_\sigma(F^S)$ tels que $m = k_1 m_\sigma$. Posons $k := k_1 k_2$, on a

$$y^S = k m_\sigma,$$
$$K_2 = y^{-1} K^S y \cap M_\sigma(F^S) = m_\sigma^{-1} K_1 m_\sigma.$$

On applique 5.5.3 avec $H = M_\sigma$, $L = M_{1,\sigma}$ et les sous-groupes ouverts compacts maximaux K_1, K_2. Pour $v \in S_+ \setminus S$, il existe donc $x_v \in M_{1,\sigma}(F_v)$ tel que $K_{2,v} = x_v^{-1} K_{1,v} x_v$; on prend $x_v = 1$ pour $v \notin S_+$. Posons $x := (x_v)_{v \notin S} \in M_{1,\sigma}(F^S)$, alors $K_2 = x^{-1} K_1 x$. Or on a aussi $K_2 = m_\sigma^{-1} K_1 m_\sigma$. Parce que K_1 est hyperspécial, on a $m_\sigma \in K_1 x$ quitte à multiplier x par un élément de $Z_{M_{1,\sigma}}(F^S)$. Alors $y^S \in K^S x$, d'où $\Omega(y^S) = \boldsymbol{\omega}(x)$.

La relation cherchée (III.29) résulte du transport du structure :

$$r^{M_\sigma,\boldsymbol{\omega}}_{L,K_2}(\dot{t}) = r^{M_\sigma,\boldsymbol{\omega}}_{L,x^{-1}K_1 x}(\dot{t}) = r^{M_\sigma,\boldsymbol{\omega}}_{L,K_1}(x\dot{t}x^{-1}) = \boldsymbol{\omega}(x) r^{M_\sigma,\boldsymbol{\omega}}_{L,K_1}(\dot{t}).$$

□

6 La formule des traces pour les revêtements

La plupart de cette section est une paraphrase des travaux fondamentaux d'Arthur [5, 6].

Soit F un corps de nombres, G un F-groupe réductif connexe et un revêtement à m feuillets

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mu_m \arrow[r] & \tilde{G} \arrow[r, "\mathbf{p}"] & G(\mathbb{A}) \arrow[r] & 1 \\ & & & G(F) \arrow[ul, hook] \arrow[u, hook] & \end{tikzcd}$$

où nous supprimons le nom de l'immersion $G(F) \hookrightarrow \tilde{G}$; par abus de notation, nous regardons $G(F)$ comme un sous-groupe discret de $\tilde{G}^1$.

On considéra deux cas.

1 *Le cas global* : fixons les objets suivants
   – M_0 : un sous-groupe de Lévi minimal de G ;
   – $P_0 \in \mathcal{P}(M_0)$;
   – $K = \prod_v K_v$: un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbb{A})$ en bonne position relativement à M_0, tel que pour tout $v \notin V_{\mathrm{ram}}$, K_v est le sous-groupe compact maximal fixé dans (G1), qui s'identifie à un sous-groupe de $\tilde{G}_v$.

   Si P est un sous-groupe parabolique semi-standard, on note $P = M_P U_P$ sa décomposition de Lévi canonique. Comme d'habitude, si H est un sous-groupe de $G(\mathbb{A})$, on note $\tilde{H}$ son image réciproque par $\mathbf{p}$.

2 *Le cas local* : fixons un ensemble fini S de places de F. Considérons le revêtement à m feuillets $\mathbf{p}_S : \tilde{G}_S \to G(F_S)$. Fixons
   – M_0 comme précédemment ;
   – $K_S = \prod_{v \in S} K_v$ un sous-groupe compact maximal de $G(F_S)$ en bonne position relativement à M_0.

   Si H est un sous-groupe de $G(F_S)$, notons $\tilde{H}_S$ son image réciproque par $\mathbf{p}_S$.

Soit $M \in \mathcal{L}(M_0)$, on note K^M (resp. K^M_S) son intersection avec $M(\mathbb{A})$ (resp. avec $M(F_S)$). La convention de mesures §2.5 s'applique ici. Rappelons en particulier que, soit ϕ est une fonction intégrable sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$, alors $\int_{G(F)\backslash \tilde{G}^1} (\phi \circ \mathbf{p}) \,\mathrm{d}\tilde{x}$ est égale à $\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \phi \,\mathrm{d}x$ selon notre convention.

6.1 La formule des traces grossière

Plaçons-nous dans le cadre global.

Le noyau tronqué Définissons la représentation régulière $(R, L^2(G(F)\backslash\tilde{G}^1))$ par

$$(R(\tilde{y})\phi)(\tilde{x}) = \phi(\tilde{x}\tilde{y})$$

pour tout $\phi \in L^2(G(F)\backslash\tilde{G}^1)$, $\tilde{x}, \tilde{y} \in G(F)\backslash\tilde{G}^1$. On peut d'ailleurs la regarder comme une représentation sur $L^2(G(F)A_{G,\infty}\backslash\tilde{G})$. Fixons $f \in C_c^\infty(\tilde{G}^1)$. Alors l'opérateur $R(f)$ a pour noyau

$$K_f(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{\gamma \in G(F)} f(\tilde{x}^{-1}\gamma\tilde{y}).$$

L'indice f sera supprimé dans la suite. À cause du procédé de troncature, la formule des traces grossière dépendra des choix de M_0, P_0 et K.

Pour tout $P \in \mathcal{F}(M_0)$, posons

$$K_P(\tilde{x}, \tilde{y}) := \int\limits_{U_P(\mathbb{A})} \sum_{\gamma \in M_P(F)} f(\tilde{x}^{-1}\gamma u\tilde{y}) \,\mathrm{d}u$$

avec $\tilde{x}, \tilde{y} \in U_P(\mathbb{A})M_P(F)\backslash\tilde{G}$. On constate que pour tout $\tilde{x} \in \tilde{G}^1$, $K_P(\tilde{x}, \tilde{x})$ ne dépend que de $x := \mathbf{p}(\tilde{x}) \in G(\mathbb{A})^1$; on l'écrit aussi $K_P(x, x)$.

Pour $T \in \mathfrak{a}_0^+$ qui est suffisamment régulier, définissons le noyau tronqué

$$k^T(x) := \sum_{P \supset P_0} (-1)^{\dim A_P/A_G} \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} K_P(\delta x, \delta x)\hat{\tau}_P(H_P(\delta x) - T),$$

où P décrit les sous-groupes paraboliques standards.

Il sera démontré que k^T est intégrable sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$, et on en obtiendra les développements géométrique et spectral. Or c'est déjà clair que l'aspect "géométrique" de la troncature, c'est-à-dire celui qui s'agit des classes de conjugaison rationnelles et des objets dans §4, est identique à celui de la formule des traces grossière de G : le revêtement n'y intervient pas.

Le $\mathfrak{o}$-développement Rappelons que dans §5.1 l'on a défini la notion de $\mathcal{O}$-équivalence des éléments dans $G(F)$. Adoptons les mêmes notations ici. Pour tout $M \in \mathcal{L}(M_0)$, on a défini une application canonique $\mathcal{O}^M \to \mathcal{O}^G$ à fibres finies.

Pour tout $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}^G$ et $P \in \mathcal{F}(M_0)$, posons comme précédemment

$$K_{P,\mathfrak{o}}(\tilde{x}, \tilde{y}) := \sum_{\gamma \in M_P(F)\cap\mathfrak{o}} \int\limits_{U_P(\mathbb{A})} f(\tilde{x}^{-1}\gamma u\tilde{y}) \,\mathrm{d}u,$$

$$k_{\mathfrak{o}}^T(x) := \sum_{P \subset P_0} (-1)^{\dim A_P/A_G} \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} K_{P,\mathfrak{o}}(\delta x, \delta x)\hat{\tau}_P(H_P(\delta x) - T),$$

alors $K_P = \sum_{\mathfrak{o}} K_{P,\mathfrak{o}}$ et $k^T = \sum_{\mathfrak{o}} k_{\mathfrak{o}}$.

Théorème 6.1.1 (cf. [5, 7.1])**.** *Si $T \in \mathfrak{a}_0^+$ est suffisamment régulier, alors*

$$J^T(f) := \sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}^G} \int\limits_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} k_{\mathfrak{o}}^T(x) \,\mathrm{d}x$$

converge absolument.

Démonstration. Comme nous avons remarqué, le revêtement n'intervient pas dans la troncature, et les arguments de [5] marchent de la même manière. □

C'est donc loisible de poser $J_{\mathfrak{o}}^T(f) := \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} k_{\mathfrak{o}}^T(x)\,\mathrm{d}x$ pourvu que $T \in \mathfrak{a}_0^+$ est suffisamment régulier.

Le χ-développement Soit $f \in L^2(G(F)\backslash\tilde{G}^1)$, le terme constant de f le long d'un sous-groupe parabolique P est défini par

$$f_P : \tilde{x} \mapsto \int\limits_{U_P(F)\backslash U_P(\mathbb{A})} f(u\tilde{x})\,\mathrm{d}u$$

pour presque tout $\tilde{x} \in U_P(\mathbb{A})G(F)\backslash\widetilde{G}^1$, à l'aide du scindage unipotent. On dit que f est cuspidale si $f_P = 0$ pour tout $P \subsetneq G$. Cela permet de définir l'espace des fonctions L^2 cuspidales $L^2_{\text{cusp}}(G(F)\backslash\tilde{G}^1)$. D'après le théorème de Gelfand et Piatetski-Shapiro, $L^2_{\text{cusp}}(G(F)\backslash\tilde{G}^1)$ est inclus dans $L^2_{\text{disc}}(G(F)\backslash\tilde{G}^1)$, la sous-représentation maximale de $L^2(G(F)\backslash\tilde{G}^1)$ qui se décompose discrètement. Posons $\Pi_{\text{cusp}}(\tilde{G}^1)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles intervenant dans $L^2_{\text{cusp}}(G(F)\backslash\tilde{G}^1)$. La théorie de décomposition spectrale est parallèle à celle pour les groupes réductifs et est bien établie dans [66].

Le groupe central μ_m agit par translation sur de telles représentations. Notons la partie ξ-équivariante par $\Pi_{\text{cusp},\xi}(\widetilde{G}^1)$ pour tout $\xi \in \widehat{\mu_m}$. En particulier, on peut parler de la partie spécifique $\Pi_{\text{cusp},-}(\tilde{G}^1)$.

Le groupe de Weyl W_0^G agit sur les paires (P,σ) où $P \in \mathcal{F}(M_0)$ et σ est une représentation automorphe cuspidale de $M_P(\mathbb{A})^1$. L'ensemble des orbites $[P,\sigma]$ ainsi obtenues est noté $\mathfrak{X}$, ou $\mathfrak{X}^{\tilde{G}}$ si une confusion sur $\tilde{G}$ est à craindre. Comme les sous-groupes paraboliques semi-standards ayant la même composante de Lévi sont conjugués par W_0^G, on peut aussi bien représenter les éléments de $\mathfrak{X}$ comme W_0^G-orbites des paires (M,σ) où $M \in \mathcal{L}(M_0)$ et σ est comme précédemment.

Soit M un sous-groupe de Lévi de G, on a une application canonique $\mathfrak{X}^{\tilde{M}} \to \mathfrak{X}^{\tilde{G}}$ donnée par $[M_1,\sigma_1]^M \mapsto [M_1,\sigma_1]^G$ (où $M_1 \in \mathcal{L}^M(M_0)$). Elle est à fibres finies.

Soient $\chi = [P,\sigma] \in \mathfrak{X}^{\tilde{G}}$, $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}$. Notons $R_{\widetilde{M_P},\text{disc}}$ la représentation régulière sur $L^2_{\text{disc}}(M_P(F)\backslash\widetilde{M_P}^1)$. Puisque $\widetilde{M_P} = \widetilde{M_P}^1 \times A_{M_P,\infty}$, on peut la regarder comme une représentation de $\widetilde{M_P}$. Notons $R_{\widetilde{M_P},\text{disc},\lambda}$ la représentation de $\widetilde{M_P}$ définie par

$$R_{\widetilde{M_P},\text{disc},\lambda}(\tilde{m}) = R_{\widetilde{M_P},\text{disc}}(\tilde{m})e^{\langle\lambda,H_M(m)\rangle}.$$

Notons $\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\lambda)$ l'induite parabolique normalisée de $R_{\widetilde{M_P},\text{disc},\lambda}$. Définissons l'espace hilbertien $\mathcal{H}_{\tilde{P}}$ des fonctions mesurables $\phi : U_P(\mathbb{A})M_P(F)A_{M,\infty}\backslash\tilde{G} \to \mathbb{C}$ telles que

- pour presque tout $\tilde{x} \in \tilde{G}$, $\phi_{\tilde{x}} : \tilde{m} \mapsto \phi(\tilde{m}\tilde{x})$ appartient à $L^2_{\text{disc}}(M_P(F)\backslash\widetilde{M_P}^1)$,
- $\|\phi\|_2^2 = \iint\limits_{\tilde{K}\times(M_P(F)\backslash\widetilde{M_P}^1)} |\phi(\tilde{m}\tilde{k})|^2\,\mathrm{d}\tilde{m}\,\mathrm{d}\tilde{k} < +\infty.$

Alors $\mathcal{H}_{\tilde{P}}$ peut être vu comme l'espace sous-jacent de $\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\lambda)$ muni de l'action

$$(\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\lambda,\tilde{y})\phi)(\tilde{x}) = \phi(\tilde{x}\tilde{y})e^{\langle\lambda+\rho_P,H_P(xy)-H_P(x)\rangle}.$$

Remarquons que $\mathcal{H}_{\tilde{P}}$ et la restriction de $\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\lambda)$ à $\tilde{K}$ ne dépendent pas de λ. Notons $\mathcal{H}_{\tilde{P},\text{cusp}}$ le sous-espace des fonctions $\phi \in \mathcal{H}_{\tilde{P}}$ telle que $\phi_{\tilde{x}} \in L^2_{\text{cusp}}(M_P(F)\backslash\widetilde{M_P}^1)$ pour presque tout $\tilde{x}$. Notons $\mathcal{H}^0_{\tilde{P}}$ le sous-espace dense de vecteurs $\tilde{K}$-finis et $\mathcal{H}^0_{\tilde{P},\text{cusp}}$ son intersection avec $\mathcal{H}_{\tilde{P},\text{cusp}}$.

Passons en revue la théorie de la décomposition spectrale.

1 On sait construire un sous-espace fermé invariant $L^2_\chi(G(F)\backslash\tilde{G})$, engendré par les séries d'Eisenstein attachées à χ ([66, II.2.4]). Il existe une décomposition orthogonale

$$L^2(G(F)\backslash\tilde{G}^1) = \bigoplus_{\chi\in\mathfrak{X}^{\tilde{G}}} L^2_\chi(G(F)\backslash\tilde{G}^1).$$

2 Soient $Q \in \mathcal{P}(M_P)$, $w \in W(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_Q)$. On définit l'opérateur d'entrelacement suivant la recette de Mackey ([66, II.1.6]) :

$$M_{Q|P}(w,\lambda) : \mathcal{H}_{\tilde{P}} \to \mathcal{H}_{\tilde{Q}} \quad (\lambda \in \mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}})$$
$$(M_{Q|P}(w,\lambda)\phi)(\tilde{x}) = \int_{U_{Q|P}(\hat{w},\mathbb{A})} \phi(\hat{w}^{-1}u\tilde{x})e^{\langle\lambda+\rho_P, H_P(\hat{w}^{-1}ux)\rangle}e^{\langle -w\lambda+\rho_Q, H_Q(x)\rangle}\,\mathrm{d}u,$$

où $\hat{w} \in G(F)$ est un représentant quelconque de w et

$$U_{Q|P}(\hat{w},\mathbb{A}) := (U_Q(\mathbb{A}) \cap \hat{w}U_P(\mathbb{A})\hat{w}^{-1})\backslash U_Q(\mathbb{A}).$$

Notons $(\mathfrak{a}^*_P)_+$ le cône dual à ${}^+\mathfrak{a}_P$, alors cette intégrale est convergente et holomorphe en λ si $\mathrm{Re}(\lambda) \in \rho_P + (\mathfrak{a}^*_P)^+$. Elle admet une prolongement méromorphe sur $\mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$.

À l'aide de la décomposition spectrale, on définit les espaces $\mathcal{H}_{\tilde{P},\chi}$, $\mathcal{H}^0_{\tilde{P},\chi}$ et l'opérateur $\mathcal{I}_{\tilde{P},\chi}(\lambda)$ en prenant l'intersection avec L^2_χ. On en déduit des décompositions $\mathcal{H}_{\tilde{P}} = \bigoplus_\chi \mathcal{H}_{\tilde{P},\chi}$ et $\mathcal{H}^0_{\tilde{P}} = \bigoplus_\chi \mathcal{H}^0_{\tilde{P},\chi}$.

Soit Q un sous-groupe parabolique standard de G. Posons $n_Q = n^G_Q := \sum_{Q'} |W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_{Q'})|$, la somme portant sur les sous-groupes paraboliques standards Q'. La même définition s'applique aux sous-groupes de Lévi de G, d'où les versions relatives $n^P_{P_1} := n^{M_P}_{P_1\cap M_P}$ pour $P_1 \subset P$ sous-groupes paraboliques standards. Choisissons une base orthonormée $\mathcal{B}_{\tilde{P}_1,\chi}$ pour $\mathcal{H}_{\tilde{P}_1,\chi}$ formée de vecteurs $\tilde{K}$-finis pour tout χ, alors $\mathcal{B}_{\tilde{P}_1} := \bigsqcup_\chi \mathcal{B}_{\tilde{P}_1,\chi}$ est une base orthonormée de $\mathcal{H}_{\tilde{P}_1}$ contenue dans $\mathcal{H}^0_{\tilde{P}_1}$. Posons

$$K_{P,\chi}(\tilde{x},\tilde{y}) := \sum_{P_1\subset P} (n^P_{P_1})^{-1} \int_{i\mathfrak{a}^*_{P_1}} \sum_{\phi\in\mathcal{B}_{\widetilde{P_1},\chi}} E^{\widetilde{P}}_{\widetilde{P_1}}(\tilde{x}, \mathcal{I}_{\widetilde{P_1},\chi}(\lambda,f)\phi,\lambda)\overline{E^{\widetilde{P}}_{\widetilde{P_1}}(\tilde{y},\phi,\lambda)}\,\mathrm{d}\lambda,$$
$$k^T_\chi(x) := \sum_{P\supset P_0} (-1)^{\dim A_P/A_G} \sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)} K_{P,\chi}(\delta x,\delta x)\hat{\tau}_P(H_P(\delta x)-T),$$

où

$$E^{\widetilde{P}}_{\widetilde{P_1}}(\tilde{x},\phi,\lambda) = \sum_{\gamma\in P_1(F)\backslash P(F)} \phi(\gamma\tilde{x})e^{\langle\lambda+\rho_{P_1}, H_{P_1}(x)\rangle}$$

est la “série d'Eisenstein” ; elle est convergente si $\mathrm{Re}(\lambda) \in \rho_{P_1} + (\mathfrak{a}^*_{P_1})^+$, et elle admet un prolongement méromorphe à tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{M_1,\mathbb{C}}$. La définition de $K_{P,\chi}$ ne dépend évidemment pas du choix des bases $\mathcal{B}_{\tilde{P}_1,\chi}$. La décomposition spectrale affirme que $K_P = \sum_\chi K_{P,\chi}$ et $k^T = \sum_\chi k^T_\chi$.

Théorème 6.1.2 (cf. [6, 2.1]). *Si $T \in \mathfrak{a}^+_0$ est suffisamment régulier, alors*

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^{\tilde{G}}} \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} k^T_\chi(x)\,\mathrm{d}x$$

converge absolument.

Démonstration. On peut reprendre [6]. On a déjà remarqué que la troncature est pareille que dans le cas des groupes réductifs. L'aspect spectral des arguments d'Arthur repose sur la théorie de décomposition spectrale, dont la généralisation aux revêtements est faite dans [66]. □

C'est donc loisible de poser $J^T_\chi(f) := \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} k^T_\chi(x)\,\mathrm{d}x$, pour tout $\chi \in \mathfrak{X}^{\tilde{G}}$.

Selon l'action de μ_m, on a une décomposition $\mathfrak{X} = \bigsqcup_{\xi \in \widehat{\mu_m}} \mathfrak{X}_\xi$. Fixons $\xi \in \widehat{\mu_m}$, alors la ξ-équivariance de représentations est préservée par induction parabolique. Le résultat suivant en découle.

Proposition 6.1.3. *Soient $\xi, \eta \in \widehat{\mu_m}$. Si $\chi \in \mathfrak{X}_\xi$, $f \in C^\infty_{c,\eta}(\tilde{G}^1)$, alors $K_{P,\chi,f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ pour tout $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{G}^1$ sauf si $\xi = \bar{\eta}$. Idem pour $k^T_\chi(f)$ et $J^T_\chi(f)$.*

Par conséquent, on peut se ramener à l'étude de la partie spécifique du côté spectral de la formule des traces grossière, ie. les termes associés à $\chi \in \mathfrak{X}_-$, appliqués à fonctions tests anti-spécifiques.

Conclusions Vu les résultats de convergence géométrique et spectral, on est arrivé à l'identité

$$J^T(f) = \sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}^G} J^T_{\mathfrak{o}}(f) = \sum_{\chi \in \mathfrak{X}^{\tilde{G}}} J^T_\chi(f)$$

pour $T \in \mathfrak{a}_0^+$ suffisamment régulier, où $J^T(f) := \int_{G(F)\backslash \tilde{G}^1} k^T(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x}$. L'intégrabilité résulte des théorèmes que nous venons d'obtenir. Dans la suite, $\mathfrak{o}$ (resp. χ) désigne un élément dans $\mathcal{O}^G$ (resp. $\mathfrak{X}^{\tilde{G}}$) quelconque.

Théorème 6.1.4. *Supposons que le paramètre de troncature $T \in \mathfrak{a}_0^+$ est suffisamment régulier, alors*

1. *$J^T(f)$ est un polynôme en T de degré $\leq \dim \mathfrak{a}_0^G$. Idem pour les termes $J^T_{\mathfrak{o}}(f)$, $J^T_\chi(f)$. Ces distributions se prolongent ainsi en polynômes en tout $T \in \mathfrak{a}_0$ de façon unique ;*
2. *notons $T_0 \in \mathfrak{a}_0$ le paramètre de troncature canonique défini dans* (III.17), *alors les distributions $J := J^{T_0}$, $J_\chi := J^{T_0}_\chi$ et $J_{\mathfrak{o}} := J^{T_0}_{\mathfrak{o}}$ ne dépendent pas du choix de $P_0 \in \mathcal{P}(M_0)$.*

Démonstration. Les démonstrations sont pareilles que celles du cas des groupes réductifs, cf 5.2.6, 5.2.11. □

La formule des traces grossière s'écrit ainsi

$$J(f) = \sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}^G} J_{\mathfrak{o}}(f) = \sum_{\chi \in \mathfrak{X}^{\tilde{G}}} J_\chi(f). \tag{III.30}$$

Étudions la non-invariance des distributions. Soient $f \in C^\infty_c(\tilde{G}^1)$ et $y \in G(\mathbb{A})$. Notons f^y la fonction $\tilde{x} \mapsto f(y\tilde{x}y^{-1})$. Soit $Q \in \mathcal{F}(M_0)$, posons

$$f_{Q,y}(\tilde{m}) := \delta_Q(x)^{\frac{1}{2}} \iint_{K \times U_Q(\mathbb{A})} f(k^{-1}\tilde{m}uk) u'_Q(k, y)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}k, \quad \tilde{m} \in \widetilde{M_Q}^1,$$

où $u'_Q(k, y)$ est la fonction définie dans (III.15). Cela définit une application linéaire $C^\infty_c(\tilde{G}^1) \to C^\infty_c(\widetilde{M_Q}^1)$ qui préserve l'équivariance par μ_m.

Nous indiquons le groupe en question en exposant dans les notations, eg. $J^{G,T}(f) = J^T(f)$. Si $M \in \mathcal{L}(M_0)$, $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}^G$ et $f \in C_c^\infty(\widetilde{M}^1)$, posons

$$J_{\mathfrak{o}}^{M,T}(f) = \sum_{\substack{\mathfrak{o}' \in \mathcal{O}^M \\ \mathfrak{o}' \mapsto \mathfrak{o}}} J_{\mathfrak{o}'}^{M,T}(f).$$

Idem pour $J_\chi^{M,T}$ et $J^{M,T}$.

Théorème 6.1.5 (cf. [7, §3] et 5.2.12)**.** *Soit $T \in \mathfrak{a}_0$, alors*

$$J^T(f^y) = \sum_{Q \in \mathcal{F}(M_0)} |W_0^{M_Q}||W_0^G|^{-1} J^{\widetilde{M_Q},T}(f_{Q,y}),$$
$$J_{\mathfrak{o}}^T(f^y) = \sum_{Q \in \mathcal{F}(M_0)} |W_0^{M_Q}||W_0^G|^{-1} J_{\mathfrak{o}}^{\widetilde{M_Q},T}(f_{Q,y}),$$
$$J_\chi^T(f^y) = \sum_{Q \in \mathcal{F}(M_0)} |W_0^{M_Q}||W_0^G|^{-1} J_\chi^{\widetilde{M_Q},T}(f_{Q,y}).$$

En particulier, on peut mettre $T = T_0$ dans les formules ci-dessus et supprimer les symboles T.

6.2 Réduction au cas unipotent

Plaçons-nous toujours dans le cas global. Fixons les objets suivants
- $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}^G$;
- $\sigma \in \mathfrak{o}$: semi-simple ;
- $P_1 \in \mathcal{F}(M_0)$: un sous-groupe parabolique standard tel que $\sigma \in M_{P_1}(F)$, mais σ n'appartient à aucun sous-groupe parabolique propre de M_{P_1} ;
- $M_1 := M_{P_1}$;
- $K_\sigma = \prod_v K_{\sigma,v}$: un sous-groupe compact maximal de $G_\sigma(\mathbb{A})$ en bonne position relativement à $M_{1,\sigma}$.

Afin d'éviter toute confusion, indiquons l'image de σ via $G(F) \hookrightarrow \tilde{G}^1$ par $\tilde{\sigma}$. Posons $\mathfrak{a}_0^{G_\sigma} := \mathfrak{a}_{M_{1,\sigma}}^{G_\sigma}$, on dispose d'une application linéaire canonique $\mathfrak{a}_0^G \to \mathfrak{a}_0^{G_\sigma}$. À ces données est associé un paramètre de troncature canonique $T_{0,\sigma} \in \mathfrak{a}_0^{G_\sigma}$ pour G_σ.

Fixons aussi un ensemble de places $S \supset V_{\mathrm{ram}}$ et supposons que
- $\sigma^S \in K^S$;
- σ est S-admissible ;
- pour tout $v \notin S$, on a $K_{\sigma,v} = K \cap G_\sigma(F_v)$.

Le lemme de Kottwitz 5.6.2 assure que $K_{\sigma,v}$ est un sous-groupe hyperspécial de $G_\sigma(F_v)$ pour tout $v \notin S$.

Lemme 6.2.1. *Le caractère $[\cdot, \sigma] : G_\sigma(\mathbb{A}) \to \mu_m$ est un caractère automorphe. Il est trivial sur K_σ^S.*

Démonstration. La continuité de $[\cdot, \sigma]$ est claire. Le reste résulte des scindages de $\mathbf{p}$ au-dessus de K^S et de $G(F)$. □

Posons

$$\iota^G(\sigma) := G_\sigma(F) \backslash G^\sigma(F),$$
$$T_1 := T_0 - T_{0,\sigma} \in \mathfrak{a}_0^{G_\sigma},$$

où, avec abus de notation, on a projeté le paramètre de troncature canonique T_0 de G via $\mathfrak{a}_0^G \to \mathfrak{a}_0^{G_\sigma}$.

Rappelons une construction d'Arthur [9, §6]. Soit $R \in \mathcal{F}^{G_\sigma}(M_{1,\sigma})$, on note

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_R^0(M_1) &:= \{P \in \mathcal{F}(M_1) : P_\sigma = R, \mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_R\},\\ \mathcal{F}_R(M_1) &:= \{P \in \mathcal{F}(M_1) : P_\sigma = R\}.\end{aligned}$$

Pour tout $z \in G(\mathbb{A})$ et tout $Q \in \mathcal{F}(M_1)$, posons

$$v_Q(\lambda, z, T) := e^{\langle \lambda, -H_Q(z)+T\rangle}, \quad \lambda \in i\mathfrak{a}_Q^*, T \in \mathfrak{a}_Q.$$

On lui associe la fonction $v'_Q(z,T)$ via (III.9). Si $R \in \mathcal{F}^{G_\sigma}(M_{1,\sigma})$, posons

$$v'_R(z,T) := \sum_{Q \in \mathcal{F}_R^0(M_1)} v'_Q(z,T).$$

Soit $f \in C^\infty_{c,--}(\tilde{G}^1)$. Pour R et $y \in G(\mathbb{A})$ fixés, on obtient une application linéaire $f \mapsto \Phi_{R,y,T_1} \in C^\infty_{c,--}(\widetilde{M_R}^1)$ définie par

$$\Phi_{R,y,T_1}(\tilde{m}) := \delta_R(m)^{\frac{1}{2}} \iint_{K_\sigma \times U_R(\mathbb{A})} [k,\sigma] f(y^{-1}\tilde{\sigma}k^{-1}\tilde{m}uky) v'_R(ky, T_1)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}k.$$

Alors $f \mapsto \Phi_{R,y,T_1}$ est aussi continue en y. Notre définition et celle dans [9, p.201] ne diffèrent que par le commutateur $[k,\sigma]$, dont la raison d'être sera expliquée dans la procédure de descente.

Théorème 6.2.2 (cf. [9, 6.2])**.** *Pour $f \in C^\infty_{c,--}(\tilde{G}^1)$, on a*

$$J_{\mathfrak{o}}(f) = |\iota^G(\sigma)|^{-1} \int_{G_\sigma(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} \sum_{R \in \mathcal{F}^{G_\sigma}(M_{1,\sigma})} |W_0^{M_R}||W_0^{G_\sigma}|^{-1} J^{M_R,[\cdot,\sigma]}_{\mathrm{unip}}(\Phi_{R,y,T_1})\, \mathrm{d}y.$$

L'expression est loisible car la distribution $J^{M_R,[\cdot,\sigma]}_{\mathrm{unip}}$ est supportée sur $(M_R)_{\mathrm{unip}}(\mathbb{A})$, et le scindage unipotent adélique permet de restreindre Φ_{R,y,T_1} sur ce sous-ensemble fermé de façon canonique.

Démonstration. La preuve est presque identique à celle dans [9] à l'exception du caractère $[\cdot,\sigma]$ qui apparaît dans $J^{M_R,[\cdot,\sigma]}_{\mathrm{unip}}$ et dans notre définition de Φ_{R,y,T_1}. Expliquons-le. Prenons $T \in \mathfrak{a}_0^+$ suffisamment régulier. On part de la formule [9, 3.1]

$$\text{(III.31)}\quad J^T_{\mathfrak{o}}(f) = |\iota^G(\sigma)|^{-1} \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \sum_{\substack{R \subset G_\sigma \\ \text{parabolique} \\ \text{standard}}} \sum_{\xi \in R(F)\backslash G(F)} \left(\sum_{u \in (M_R)_{\mathrm{unip}}(F)} \int_{U_R(\mathbb{A})} f(x^{-1}\xi^{-1}\tilde{\sigma}un\xi x)\, \mathrm{d}n \right) \cdot \left(\sum_{P \in \mathcal{F}_R(M_1)} (-1)^{\dim A_P/A_G} \hat{\tau}_P(H_P(\xi x) - Z_P(T - T_0) - T_0) \right) \mathrm{d}x,$$

où $Z_P(T-T_0) \in \mathfrak{a}_0$ est défini dans [9, (3.3)]. La démonstration ne fait intervenir que l'action adjointe de $G(F)$ sur les sous-groupes de Lévi et paraboliques sur F, et sur $G(F)$ lui-même, donc est valable sur un revêtement.

Changeons l'intégrale ci-dessus prise sur

$$(\xi, x) \in (R(F)\backslash G(F)) \times (G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$$

à une intégrale prise sur

$$(\delta, x, y) \in (R(F)\backslash G_\sigma(F)) \times (G_\sigma(F)\backslash G_\sigma(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^1) \times (G_\sigma(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A}))$$

à l'aide du fait $G_\sigma(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A}) = G_\sigma(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^1 \backslash G(\mathbb{A})^1$. L'intégrale sur $U_R(\mathbb{A})$ dans (III.31) devient

$$\int\limits_{U_R(\mathbb{A})} f(y^{-1}x^{-1}\delta^{-1}\tilde{\sigma}un\delta xy)\,\mathrm{d}n$$

en remplaçant l'expression ξx par δxy. Or

$$y^{-1}x^{-1}\delta^{-1}\tilde{\sigma}un\delta xy = [\sigma, x]y^{-1}\tilde{\sigma}x^{-1}\delta^{-1}un\delta xy,$$

donc l'intégrale en question vaut

$$\int\limits_{U_R(\mathbb{A})} [x,\sigma] f(y^{-1}\tilde{\sigma}x^{-1}\delta^{-1}un\delta xy)\,\mathrm{d}n$$

car f est anti-spécifique.

À partir de maintenant, on peut reprendre la démonstration de [9]. L'expression $[x,\sigma]$ se décompose en le caractère $[\cdot,\sigma]$ dans le terme $J^{M_R,[\cdot,\sigma]}_{\mathrm{unip}}$ et le caractère $[k,\sigma]$ dans la définition de Φ_{R,y,T_1} via une décomposition d'Iwasawa. Le bilan est l'analogue de [9, (6.8)] :

$$J_{\mathfrak{o}}(f) = |\iota^G(\sigma)|^{-1} \int\limits_{G_\sigma(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{F}^{G_\sigma}(M_{1,\sigma}) \\ Q \supset P_{1,\sigma}}} J^{M_Q,[\cdot,\sigma]}_{\mathrm{unip}}(\Phi_{Q,y,T_1})\,\mathrm{d}y.$$

La dernière étape est d'enlever la dépendance de $P_{1,\sigma}$. Soit $R \in \mathcal{F}^{G_\sigma}(M_{1,\sigma})$, alors il existe $w \in W_0^{G_\sigma}$ et $Q \supset P_{1,\sigma}$ tel que $R = w^{-1}Qw$. Notons comme d'habitude $\pi : G_{\sigma,\mathrm{SC}} \to G_\sigma$ le revêtement simplement connexe de $G_{\sigma,\mathrm{der}}$ et $K_{\sigma,\mathrm{sc}} := \pi^{-1}(K_\sigma)$. Prenons un représentant $\tilde{w} \in \pi(K_{\sigma,\mathrm{sc}})$ de w. Comme $v'_Q(\tilde{w}ky, T_1) = v'_R(ky, T_1)$ (voir [9, p.201]), on voit que $\Phi_{Q,y,T_1}(\tilde{m}) = \Phi_{R,y,T_1}(\tilde{w}^{-1}\tilde{m}\tilde{w})$ pour tout $\tilde{m} \in \widetilde{M_Q}^1$. Vu 5.2.10, on en déduit que

$$J^{M_Q,[\cdot,\sigma]}_{\mathrm{unip}}(\Phi_{Q,y,T_1}) = J^{M_R,[\cdot,\sigma]}_{\mathrm{unip}}(\Phi_{R,y,T_1}).$$

Alors un argument similaire à celui de 5.2.11 permet de conclure. □

6.3 Intégrales orbitales pondérées anti-spécifiques

Plaçons-nous dans le cas local. Les conventions de §2.6 (qui correspond au cas $|S| = 1$) se généralisent de façon évidente à ce cadre. En particulier, on peut parler des bons éléments dans $G(F_S)$.

Conventions sur la mesure Soit $M \in \mathcal{L}^G(M_0)$. La situation est similaire à celle de §5.3 : on considère les paires $(\mathcal{O}, \mu)$, où

– $\mathcal{O}$ est une bonne classe de conjugaison dans $\widetilde{M_S}$,
– μ est une mesure de Radon invariante non triviale sur $\mathcal{O}$.

Nous préférons une construction directe comme suit. Prenons $\tilde{\gamma} \in \mathcal{O}$, alors la mesure invariante μ est déterminée par le choix d'une mesure de Haar sur $M_\gamma(F_S)$, et réciproquement.

Le groupe $M(F_S)$ opère sur ces paires par conjugaison. On écrit $(\mathcal{O}, \mu) \sim (\mathcal{O}', \mu')$ si $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$. Notons

$$\dot{\Gamma}(\widetilde{M_S}) := \{(\mathcal{O}, \mu)\},$$
$$\Gamma(\widetilde{M_S}) := \{(\mathcal{O}, \mu)\}/\sim .$$

Alors $\dot{\Gamma}(\widetilde{M_S}) \to \Gamma(\widetilde{M_S})$ est un $\mathbb{R}_{>0}$-torseur.

Nous utilisons les symboles pointés pour désigner un élément dans $\dot{\Gamma}(\widetilde{M_S})$, eg. $\dot{\tilde{\gamma}}$; la classe de conjugaison sous-jacente est notée $\mathrm{Supp}(\dot{\tilde{\gamma}})$.

Une paire $\dot{\tilde{\gamma}} = (\mathcal{O}, \mu)$ donne naissance à l'intégrale orbitale

$$J_{\tilde{M}}(\dot{\tilde{\gamma}}, f) := |D^M(\gamma)|^{\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{O}} f \,\mathrm{d}\mu, \quad f \in C^\infty_{c,-}(\widetilde{M_S}) \tag{III.32}$$

avec $\gamma \in \mathbf{p}(\mathcal{O})$ quelconque. Si l'on fixe $\tilde{\gamma} \in \mathcal{O}$ et une mesure de Haar sur $M_\gamma(F_S)$, alors on a tout simplement

$$J_{\tilde{M}}(\dot{\tilde{\gamma}}, f) = |D^M(\gamma)|^{\frac{1}{2}} \int_{M_\gamma(F_S)\backslash M(F_S)} f(x^{-1}\tilde{\gamma}x) \,\mathrm{d}x.$$

Pour montrer qu'elle converge, il suffit de remplacer f par $|f|$. On obtient ainsi une intégrale orbitale pour un groupe réductif, dont la convergence est connue d'après Rao [69]. Cela permet d'immerger $\dot{\Gamma}(\widetilde{M_S})$ dans l'espace de distributions spécifiques. On a

$$J_{\tilde{M}}(y\dot{\tilde{\gamma}}y^{-1}, f) = J_{\tilde{M}}(\dot{\tilde{\gamma}}, f), \quad \text{pour tout } y \in M(F_S).$$

Indiquons quelques opérations élémentaires.

1 Le sous-groupe central μ_m opère de manière évidente sur $\dot{\Gamma}(\widetilde{M_S})$.

2 Si $\dot{\tilde{\gamma}}$ est tel que $M_\gamma = G_\gamma$, alors il s'identifie canoniquement à un élément de $\dot{\Gamma}(\widetilde{G_S}) \sqcup \{0\}$, cf. (III.27). Plus précisément, $\dot{\tilde{\gamma}}$ s'envoie à 0 si et seulement si γ n'est pas bon dans $G(F_S)$.

3 Un élément $\dot{\tilde{\gamma}} \in \dot{\Gamma}(\widetilde{M_S})$ admet une unique décomposition de Jordan

$$\dot{\tilde{\gamma}} = \tilde{\sigma}\dot{u}, \quad \tilde{\sigma} \in \widetilde{M_S},\ \dot{u} \in \dot{\Gamma}(M_\sigma(F_S))^{[\cdot,\sigma]}$$

correspondant à la décomposition de Jordan $\tilde{\gamma} = \tilde{\sigma}u$.

4 On a défini un sous-groupe ouvert fermé $A_M(F_S)^\dagger \subset A_M(F_S)$ dans 2.6.2. Supposons fixé un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de 1 dans $A_M(F_S)^\dagger$ muni d'un scindage $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathbf{p}^{-1}(\mathcal{U})$ de $\mathbf{p}$ qui envoie 1 à 1. Soit $a \in \mathcal{U}$, on peut définir l'application $\dot{\tilde{\gamma}} \mapsto a\dot{\tilde{\gamma}}$ de translation par a à l'aide de ce scindage.

5 On peut définir l'induction de classes unipotentes de M à G à la 5.3.4. Vu le scindage unipotent, on peut supprimer le $\sim$ et le noter $\dot{\gamma} \mapsto \dot{\gamma}^G$.

Nous laissons ces yogas de mesures invariantes au lecteur.

Intégrales orbitales pondérées Commençons par définir l'intégrale orbitale pondérée anti-spécifiques pour les éléments $\dot{\tilde{\gamma}} \in \dot{\Gamma}(\widetilde{M_S})$ tels que $M_\gamma = G_\gamma$. Rappelons que cette donnée équivaut au choix d'une mesure de Haar sur $M_\gamma(F_S) = G_\gamma(F_S)$.

Définition 6.3.1. Supposons que $M_\gamma = G_\gamma$. Pour tout $f \in C^\infty_{c,--}(\widetilde{G_S})$, posons

$$J_{\tilde{M}}(\dot{\tilde{\gamma}}, f) := |D^M(\gamma)|^{\frac{1}{2}} \int\limits_{G_\gamma(F_S)\backslash G(F_S)} f(x^{-1}\tilde{\gamma}x) v_M(x)\, \mathrm{d}x.$$

Si γ n'est pas bon dans $G(F_S)$, alors $J_{\tilde{M}}(\dot{\tilde{\gamma}}, f) = 0$.

Revenons au cas général. L'intégrale orbitale pondérée est définie comme suit.

Théorème 6.3.2 (cf. [12, 5.2])**.** *Pour tout $f \in C^\infty_{c,--}(\widetilde{G_S})$, la limite*

$$J_{\tilde{M}}(\dot{\tilde{\gamma}}, f) := \lim_{\substack{a \to 1 \\ a \in A_{M,reg}(F_S)^\dagger}} \sum_{L \in \mathcal{L}(M)} r^L_M(\gamma, a) J_{\tilde{L}}(a\dot{\tilde{\gamma}}, f)$$

existe, où les a dans la limite sont supposés en position générale de sorte que $M_{a\gamma} = G_{a\gamma}$.

Si $M_\gamma = G_\gamma$, elle coïncide avec la définition 6.3.1. On a

$$\forall y \in M(F_S), \quad J_{\tilde{M}}(y\dot{\tilde{\gamma}}y^{-1}, f) = J_{\tilde{M}}(\dot{\tilde{\gamma}}, f^y) = J_{\tilde{M}}(\dot{\tilde{\gamma}}, f).$$

Pour que l'expression $a\dot{\tilde{\gamma}}$ dans l'énoncé soit loisible, il faut fixer un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de 1 dans $A_M(F_S)^\dagger$, un scindage de $\mathbf{p}$ au-dessus de $\mathcal{U}$ qui envoie 1 à 1, et supposer que $a \in \mathcal{U}$; comme on ne regarde que la limite $a \to 1$, ces choix n'importent pas.

Notons tout d'abord que $J_{\tilde{M}}(\dot{\tilde{\gamma}}, f) = 0$ si γ n'est pas bon dans $G(F_S)$. Les définitions entraînent aussi que $J_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\varepsilon}\dot{\tilde{\gamma}}, f) = \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} J_{\tilde{M}}(\dot{\tilde{\gamma}}, f)$ pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mu_m$.

Démonstration. On peut supposer γ bon dans $M(F_S)$ d'après l'observation précédente, alors $a\gamma$ l'est aussi pour $a \in A_M(F_S)^\dagger$. On se ramène à l'étude de

$$|D^G(a\gamma)|^{\frac{1}{2}} \int\limits_{M_\gamma(F_S)\backslash G(F_S)} f(x'^{-1}a\tilde{\gamma}x') \left(\sum_{L \in \mathcal{L}(M)} r^L_M(\gamma, a) v_L(x') \right) \mathrm{d}x'$$

lorsque $a \to 1$. Soit $\tilde{\gamma} = \tilde{\sigma}u$ la décomposition de Jordan. On décompose la variable $x' = mxy$ avec $m \in M_\gamma(F_S)\backslash M_\sigma(F_S)$, $x \in M_\sigma(F_S)\backslash G_\sigma(F_S)$, $y \in G_\sigma(F_S)\backslash G(F_S)$. Alors l'intégrale ci-dessus s'écrit

$$|D^G(a\gamma)|^{\frac{1}{2}} \iiint f(y^{-1}x^{-1}m^{-1}a\tilde{\sigma}umxy) \left(\sum_{L \in \mathcal{L}(M)} r^L_M(\gamma, a) v_L(xy) \right) \mathrm{d}m\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Comme a est central dans $\tilde{M}$, on a

$$\begin{gathered} y^{-1}x^{-1}m^{-1}a\tilde{\sigma}umxy = [\sigma, m][\sigma, x] y^{-1}\tilde{\sigma}x^{-1}am^{-1}umxy, \\ f(y^{-1}x^{-1}m^{-1}a\tilde{\sigma}umxy) = [m, \sigma][x, \sigma] f(y^{-1}\tilde{\sigma}x^{-1}am^{-1}umxy) \end{gathered}$$

par l'anti-spécificité de f. Posons $g_{\tilde{\sigma},a,x,y}(\tilde{m}) := [x, \sigma] f(y^{-1}\tilde{\sigma}x^{-1}a\tilde{m}xy)$, alors l'intégrale sur x devient

$$\int\limits_{M_\gamma(F_S)\backslash M_\sigma(F_S)} [m, \sigma] g_{\tilde{\sigma},a,x,y}(m^{-1}um)\, \mathrm{d}m,$$

une intégrale orbitale unipotente avec le caractère $[\cdot,\sigma]$. Elle est bien définie car γ est bon.

Ce que l'on a fait est la première étape de la démonstration dans [12, §6] ; en fait c'est la seule part où intervient le revêtement. Après l'argument de descente ci-dessus, le revêtement disparaît au prix de rajouter le caractère $[\cdot,\sigma]$. Le reste de la démonstration marche de la même façon qu'en [12] si l'on remplace les mesures $\mathrm{d}x$ par $[x,\sigma]\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}m$ par $[m,\sigma]\,\mathrm{d}m$. Cela n'affecte pas les estimations dans [12] ; en particulier, la clef [12, 6.1] et sa démonstration, qui repose sur une technique géométrique de Langlands, restent les mêmes. Cela permet de reprendre les arguments d'Arthur. □

Le cas non ramifié Fixons G et M comme précédemment. Supposons que S consiste en places non archimédiennes et supposons K_v hyperspécial de pour chaque $v \in S$. Notons $f_{K_S} = \prod_{v\in S} f_{K_v}$, où f_{K_v} est l'unité de l'algèbre de Hecke sphérique anti-spécifique en v (voir §3.1).

Définition 6.3.3. Les intégrales orbitales pondérées anti-spécifiques non ramifiées sont définies par

$$r_{\tilde{M},K_S}(\dot{\tilde{\gamma}}) = r^{\tilde{G}}_{\tilde{M},K_S}(\dot{\tilde{\gamma}}) := J_{\tilde{M}}(\dot{\tilde{\gamma}}, f_{K_S}), \quad \dot{\tilde{\gamma}} \in \dot{\Gamma}(\widetilde{M_S}).$$

Lorsqu'il n'y a pas de confusion sur K_S, on l'écrit aussi $r^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\dot{\tilde{\gamma}})$.

Descente semi-simple Fixons $\dot{\tilde{\gamma}} \in \dot{\Gamma}(\widetilde{M_S})$ comme précédemment avec la décomposition de Jordan $\dot{\tilde{\gamma}} = \tilde{\sigma}\dot{u}$. Supposons que

- $\tilde{\sigma} \in M(F)$;
- σ est F-elliptique dans M.

Prenons un sous-groupe compact maximal K_σ de $G_\sigma(F_S)$ en bonne position relativement à M_σ. Il faut rappeler une construction parallèle à celle pour 6.2.2 (cf. [12, §8]). Soit $\dot{\tilde{\gamma}} = \tilde{\sigma}\dot{u}$ la décomposition de Jordan. Soit $R \in \mathcal{F}^{G_\sigma}(M_\sigma)$. Prenons aussi $T \in \mathfrak{a}_M$ et posons

$$v_P(\lambda, z, T) := v_P(\lambda, z) e^{\langle \lambda, T\rangle}, \quad P \in \mathcal{P}(M),$$

où $v_P(\lambda, z)$ est la (G,M)-famille définissant le poids. Les fonctions $v_P(\lambda, z, T)$ forment encore une (G,M)-famille.

Avec le formalisme de 6.2.2, posons

$$v'_R(z,T) := \sum_{Q \in \mathcal{F}^0_R(M)} v'_Q(z,T), \quad z \in G(F_S);$$

$$\Phi_{R,y,T}(\tilde{m}) := \delta_R(m)^{\frac{1}{2}} \iint_{K_\sigma \times U_R(F_S)} [k,\sigma] f(y^{-1}\tilde{\sigma}k^{-1}\tilde{m}uky) v'_R(ky,T)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}k$$

$$\text{où} \quad \tilde{m} \in (\widetilde{M_R})_S, \; y \in G(F_S).$$

Proposition 6.3.4 (cf. [12, 8.6])**.** *On a*

$$J_{\tilde{M}}(\dot{\tilde{\gamma}}, f) = |D^G(\sigma)|^{\frac{1}{2}} \int_{G_\sigma(F_S)\backslash G(F_S)} \sum_{R \in \mathcal{F}^{G_\sigma}(M_\sigma)} J^{M_R,[\cdot,\sigma]}_{M_\sigma}(\dot{u}, \Phi_{R,y,T})\,\mathrm{d}y,$$

Démonstration. On reprend l'argument dans [12]. Ici le caractère $[\cdot,\sigma]$ intervient pour la même raison que dans la démonstration de 6.3.2. □

6.4 Comportement des intégrales orbitales pondérées anti-spécifiques

Les résultats ci-dessous sont parallèles à ceux de §5.4. Vu 6.3.2, leurs démonstrations sont aussi similaires et nous ne les répéterons pas.

$(\tilde{M},\sigma)$-équivalence Soient $\sigma \in M(F_S)_{\mathrm{ss}}$ et $\Sigma \subset \sigma M_\sigma(F_S)$ un ouvert invariant par $M_\sigma(F_S)$. Notons

$$\dot{\Gamma}(\tilde{\Sigma}) := \{\dot{\tilde{\gamma}} \in \dot{\Gamma}(\widetilde{M_S}) : \mathrm{Supp}(\dot{\tilde{\gamma}}) \subset \mathbf{p}^{-1}(\Sigma)\}.$$

Supposons désormais que l'adhérence de Σ dans $\sigma M_\sigma(F_S)$ contient un voisinage invariant de σ. On dit que deux fonctions ϕ_1, ϕ_2 sur $\dot{\Gamma}(\tilde{\Sigma})$ sont $(\tilde{M},\sigma)$-équivalentes s'il existe $f \in C^\infty_{c,\text{-}\text{-}}(\widetilde{M_S})$ et un voisinage U de σ dans $M(F_S)$ tels que

$$(\phi_1 - \phi_2)(\dot{\tilde{\gamma}}) = J^{\tilde{M}}_{\tilde{M}}(\dot{\tilde{\gamma}}, f)$$

pour tout $\dot{\tilde{\gamma}} \in \dot{\Gamma}(\tilde{\Sigma})$ tel que $\mathrm{Supp}(\dot{\tilde{\gamma}}) \subset \mathbf{p}^{-1}(U)$. Si cette condition est vérifiée, on écrit

$$\phi_1 \overset{(\tilde{M},\sigma)}{\sim} \phi_2.$$

Proposition 6.4.1. *Si $M_\sigma = G_\sigma$, alors pour tout $f \in C^\infty_{c,\text{-}\text{-}}(\widetilde{M_S})$ on a*

$$J_{\tilde{M}}(\dot{\tilde{\gamma}}, f) \overset{(\tilde{M},\sigma)}{\sim} 0$$

pour tout $\dot{\tilde{\gamma}} \in \dot{\Gamma}(\widetilde{M_S})$ assez proche de $\tilde{\sigma}$ modulo conjugaison.

Formules de descente Fixons $\dot{\tilde{\gamma}} \in \dot{\Gamma}(\widetilde{M_S})$. Soit $Q = LU_Q \in \mathcal{F}(M_0)$. Définissons

$$f_Q(\tilde{m}) := \delta_Q(m)^{\frac{1}{2}} \int\limits_{K_S} \int\limits_{U_Q(F_S)} f(k^{-1}\tilde{m}uk)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}k, \quad m \in L(F_S).$$

Ceci fournit une application linéaire $C^\infty_{c,\text{-}\text{-}}(\widetilde{G_S}) \to C^\infty_{c,\text{-}\text{-}}(\widetilde{L}_S)$.

Proposition 6.4.2. *Supposons que $\gamma \in M_{\mathrm{unip}}(F_S)$. Avec les choix effectués dans 5.4.3, on a*

$$J_{\widetilde{L_1}}(\dot{\gamma}^{L_1}, f) = \sum_{L \in \mathcal{L}(M)} d^G_M(L_1, L) J^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(\dot{\gamma}, f_{Q_L}).$$

Proposition 6.4.3. *Supposons $S = S_1 \sqcup S_2$. Soient $\dot{\tilde{\gamma}} = \dot{\tilde{\gamma}}_1\dot{\tilde{\gamma}}_2$, et $f = f_1 f_2 \in C^\infty_{c,\text{-}\text{-}}(\widetilde{G_S})$. En conservant le formalisme de 5.4.4, on a*

$$J_{\tilde{M}}(\dot{\tilde{\gamma}}, f) = \sum_{L_1, L_2 \in \mathcal{L}(M)} d^G_M(L_1, L_2) J^{\widetilde{L_1}}_{\tilde{M}}(\dot{\tilde{\gamma}}_1, f_{Q_1}) J^{\widetilde{L_2}}_{\tilde{M}}(\dot{\tilde{\gamma}}_2, f_{Q_2}).$$

Remarquons que la décomposition $\dot{\tilde{\gamma}} = \dot{\tilde{\gamma}}_1\dot{\tilde{\gamma}}_2$ n'est unique qu'à l'action près du groupe $\{(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{-1}) : \boldsymbol{\varepsilon} \in \mu_m\}$.

Non-invariance Soient $Q = LU_Q \in \mathcal{F}(M_0)$ et $y \in G(F_S)$. On définit

$$f_{Q,y}(\tilde{m}) = \delta_Q(m)^{\frac{1}{2}} \iint\limits_{K_S \times U_Q(F_S)} f(k^{-1}\tilde{m}uk) u'_Q(k, y)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}k, \quad \tilde{m} \in \widetilde{L},$$

où u'_Q est la fonction définie en 5.4.5. Ceci fournit une application linéaire $C^\infty_{c,\text{-}\text{-}}(\widetilde{G_S}) \to C^\infty_{c,\text{-}\text{-}}(\widetilde{L}_S)$. Rappelons aussi que f^y est la fonction $\tilde{x} \mapsto f(y\tilde{x}y^{-1})$.

Proposition 6.4.4. *On a*

$$J_{\tilde{M}}(\dot{\tilde{\gamma}}, f^y) = \sum_{Q \in \mathcal{F}(M)} J_{\tilde{M}}^{\widetilde{M_Q}}(\dot{\tilde{\gamma}}, f_{Q,y}).$$

Proposition 6.4.5. *Soit $y \in G(F_S)$ tel que $yMy^{-1} \in \mathcal{L}(M_0)$, alors*

$$J_{y\tilde{M}y^{-1}}(y\dot{\tilde{\gamma}}y^{-1}, f) = J_{y\tilde{M}y^{-1}}(\dot{\tilde{\gamma}}, f).$$

Démonstration. C'est le même argument qu'en 5.4.6. □

Remarque 6.4.6. L'intégrale orbitale pondérée satisfait à d'autres propriétés importantes, par exemple le développements en germes au voisinage d'un élément $\tilde{\sigma}$ d'image semi-simple (pas forcément bon). Les détails se trouvent dans [12]. Par ailleurs, le cas $G = M = \mathrm{GL}(n)$ est déjà étudié dans [35].

6.5 Développement géométrique fin

Passage à une situation locale Revenons au cas global. Nous considérons S un ensemble fini de places de F tel que $S \supset V_{\mathrm{ram}}$.

Rappelons une définition d'Arthur dans [9, §8].

Définition 6.5.1. On dit que deux éléments $\gamma_1, \gamma_2 \in M(F)$ avec décompositions de Jordan $\gamma_i = \sigma_i u_i$ (où $i = 1, 2$) sont (M, S)-équivalents s'il existe $x \in M(F)$ et $y \in M_{\sigma_2}(F_S)$ tels que
- $x^{-1}\sigma_1 x = \sigma_2$,
- $y^{-1}x^{-1}u_1 xy = u_2$.

On vérifie que c'est une relation d'équivalence. Une classe de $\mathcal{O}^M$-équivalence se découpe en un nombre fini de classes de (M, S)-équivalence.

Définition 6.5.2. Posons

$$\begin{aligned}
(M(F)) &:= \{\text{classes de conjugaison dans } M(F)\},\\
(M(F))_{M,S} &:= \{\text{classes de } (M,S)\text{-équivalence dans } M(F)\},\\
(M(F))^K_{M,S} &:= \left\{ \begin{array}{rl} c \in (M(F))_{M,S}: & \exists \gamma = \sigma u \in c \text{ (décomposition de Jordan), où} \\ & \sigma \text{ est } S\text{-admissible}, \\ & \sigma^S \in K^S. \end{array} \right\},\\
(M(F))^{K,\mathrm{bon}}_{\tilde{M},S} &:= \{c \in (M(F))^K_{M,S} : c \text{ est bon dans } M(F_S)\}.
\end{aligned}$$

Soient $c \in (M(F))^K_{M,S}$ et $\gamma = \sigma u \in c$ un représentant vérifiant les conditions dans cette définition. On dit que γ est un représentant admissible de c. Par abus de notation, on désignera une classe dans $(M(F))^K_{M,S}$ par un représentant admissible.

Notons

$$K_M = \prod_v K_{M,v} := K \cap M(\mathbb{A}).$$

Afin de compléter le raffinement géométrique d'Arthur, il faut compléter les fonctions test locales en celles globales comme dans §5.5. Comme $S \supset V_{\mathrm{ram}}$, on sait définir $f_{K_{M,v}} \in C^\infty_{c,\text{--}}(\tilde{M}_v)$ l'unité de $\mathcal{H}_{\text{--}}(\tilde{M}_v // K_{M,v})$, pour tout $v \notin S$. D'où un homomorphisme injectif

$$\begin{aligned} C^\infty_{c,\text{--}}(\tilde{M}_S) &\to C^\infty_{c,\text{--}}(\tilde{M}) \\ f_S &\mapsto f_S \cdot \prod_{v \notin S} f_{K_{M,v}}. \end{aligned} \tag{III.33}$$

Il faut aussi extraire la part locale d'une classe dans $(M(F))^{K,\text{bon}}_{M,S}$. Précisons. Soit $c \in (M(F))^{K}_{\tilde{M},S}$ avec un représentant admissible $\gamma = \sigma u$. Le scindage au-dessus de K^S_M fournit une identification

$$\text{(III.34)} \qquad \mathbf{p}^{-1}(M(F_S) \times K^S_M) = \tilde{M}_S \times K^S_M.$$

Notons $(\widetilde{\sigma_S}, \sigma^S) \in \tilde{M}_S \times K^S_M$ l'élément auquel σ s'identifie. Posons $\widetilde{\gamma_S} = \widetilde{\sigma_S} u_S$, où u_S est relevé à l'aide du scindage unipotent. On vérifie que u_S est $[\cdot, \sigma]$-bon dans $M_\sigma(F_S)$ si et seulement si $c \in (M(F))^{K,\text{bon}}_{\tilde{M},S}$.

Définition 6.5.3. Soient $\gamma \in (M(F))^{K,\text{bon}}_{\tilde{M},S}$, $\widetilde{\gamma_S} \in \tilde{M}_S$. On écrit

$$\gamma \rightsquigarrow \widetilde{\gamma_S}$$

si γ est un représentant admissible qui donne $\widetilde{\gamma_S}$ comme ci-dessus. Il faut prendre garde qu'en général, les représentants admissibles d'une classe de (M, S)-équivalence ne sont pas conjugués par $M(F) \cap (M(F_S) \times K^S_M)$, par conséquent $\rightsquigarrow$ n'a aucune raison d'être une application bien définie de $(M(F))^{K,\text{bon}}_{\tilde{M},S}$ dans $\Gamma(\tilde{M}_S)$!

Exprimer $J_{\mathfrak{o}}$ par intégrales orbitales pondérées anti-spécifiques Nous nous proposons de remonter la formule descendue pour $J_{\mathfrak{o}}$ dans 6.2.2 en termes des intégrales orbitales pondérées anti-spécifiques ; nous n'en donnerons qu'une esquisse car les arguments complets se trouvent dans [9, §8].

Plaçons-nous dans le cas global. Fixons $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}^G$ et prenons les objets σ, M_1, K_σ, T_1 et $S \subset V_F$ comme dans §6.2. Quitte à agrandir S, on peut aussi supposer que

– pour tout $v \notin S$ et tout $y_v \in G(F_v)$, on a $(y_v^{-1} \sigma G_{\sigma,\text{unip}}(F_v) y_v) \cap \sigma K_v \neq \emptyset$ seulement si $y_v \in G_\sigma(F_v) K_v$ (voir [9, 6.1]).

Alors 6.2.2 se lit

$$J_{\mathfrak{o}}(f) = |\iota^G(\sigma)|^{-1} \int\limits_{G_\sigma(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})} \sum_{R \in \mathcal{F}^{G_\sigma}(M_{1,\sigma})} |W_0^{M_R}| |W_0^{G_\sigma}|^{-1} J^{M_R,[\cdot,\sigma]}_{\text{unip}}(\Phi_{R,y,T_1}) \,\mathrm{d}y.$$

L'expression dans l'intégrale est nulle sauf si

$$y = y_S y', \qquad y_S \in G_\sigma(F_S) \backslash G(F_S),\ y' \in \prod_{v \notin S} G_\sigma(F_v) \backslash G_\sigma(F_v) K_v.$$

Pour un tel y, on a l'identification $\Phi_{R,y,T_1} = \Phi_{R,y_S,T_1} \in C^\infty_c(M_R(F_S)^1)$ via $C^\infty_c(M_R(F_S)^1) \hookrightarrow C^\infty_c(M_R(\mathbb{A})^1)$, où Φ_{R,y_S,T_1} est la fonction associée à f_S par 6.3.4, car $v'_R(ky, T_1) = v'_R(k_S y_S, T_1)$ et $[K^S, \sigma] = 1$; toutes ces assertions sont démontrées dans [9, §7] sauf la dernière, qui résulte du fait que $\sigma^S \in K^S$ et $S \supset V_{\text{ram}}$.

Donc $J_{\mathfrak{o}}(f)$ est égal à

$$|\iota^G(\sigma)|^{-1} \int\limits_{G_\sigma(F_S) \backslash G(F_S)} \sum_{R \in \mathcal{F}^{G_\sigma}(M_{1,\sigma})} |W_0^{M_R}| |W_0^{G_\sigma}|^{-1} J^{M_R,[\cdot,\sigma]}_{\text{unip}}(\Phi_{R,y_S,T_1}) \,\mathrm{d}y_S.$$

Posons $\mathcal{L}^\sigma := \mathcal{L}^{G_\sigma}(M_{1,\sigma})$. D'après 5.5.1,

$$\begin{aligned} &|W_0^{M_R}| |W_0^{G_\sigma}|^{-1} J^{M_R,[\cdot,\sigma]}_{\text{unip}}(\Phi_{R,y_S,T_1}) \\ &\qquad = \sum_{\substack{L \in \mathcal{L}^\sigma \\ L \subset M_R}} |W_0^L| |W_0^{G_\sigma}|^{-1} \sum_{u \in \Gamma_{\text{unip}}(L(F),S)^{[\cdot,\sigma]}} a^{L,[\cdot,\sigma]}(S, \dot{u}) J^{M_R,[\cdot,\sigma]}_L(\dot{u}, \Phi_{R,y_S,T_1}). \end{aligned}$$

Posons $\mathcal{L}^0_\sigma(M_1) := \{M \in \mathcal{L}(M_1) : A_M = A_{M_\sigma}\}$, on a une bijection

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^0_\sigma(M_1) &\to \mathcal{L}^\sigma \\ M &\mapsto M_\sigma. \end{aligned}$$

Il en résulte que $J_{\mathfrak{o}}(f)$ est égale à

$$|\iota^G(\sigma)|^{-1} \sum_{M \in \mathcal{L}^0_\sigma(M_1)} \sum_{u \in \Gamma_{\mathrm{unip}}(M_\sigma(F),S)^{[\cdot,\sigma]}} |W_0^{M_\sigma}||W_0^{G_\sigma}|^{-1} a^{M_\sigma,[\cdot,\sigma]}(S,\dot{u})$$
$$\int_{G_\sigma(F_S)\backslash G(F_S)} \left(\sum_{R \in \mathcal{F}^{G_\sigma}(M_\sigma)} J^{M_R,[\cdot,\sigma]}_{M_\sigma}(\dot{u}, \Phi_{R,y_S,T_1}) \right) \mathrm{d}y.$$

Rappelons qu'un relèvement $\widetilde{\sigma_S} \in \tilde{M}_S$ de σ est défini dans 6.5.3. Soit $u \in \Gamma_{\mathrm{unip}}(M_\sigma(F),S)^{[\cdot,\sigma]}$, alors $\widetilde{\sigma_S} u_S$ est bon dans $\tilde{M}_S$. D'autre part, $\prod_{v \in S} |D^G(\sigma)|_v = |D^G(\sigma)| = 1$ d'après la S-admissibilité de σ. En multipliant la formule ci-dessus par $\prod_{v \in S} |D^G(\sigma)|_v$, on peut appliquer 6.3.4 et obtient ainsi

Lemme 6.5.4 (cf. [9, 7.1]). *Soit $f \in C^\infty_{c,\text{-}}(\tilde{G}_S)$, alors*

$$J_{\mathfrak{o}}(f) = |\iota^G(\sigma)|^{-1} \sum_{M \in \mathcal{L}^0_\sigma(M_1)} |W_0^{M_\sigma}||W_0^{G_\sigma}|^{-1}$$
$$\sum_{u \in \Gamma_{\mathrm{unip}}(M_\sigma(F),S)^{[\cdot,\sigma]}} a^{M_\sigma,[\cdot,\sigma]}(S,\dot{u}) J_{\tilde{M}}(\tilde{\sigma}\dot{u}, f).$$

Les coefficients

Définition 6.5.5. Soit $\gamma \in M(F)$ avec décomposition de Jordan $\gamma = \sigma u$. Supposons que γ est un représentant admissible d'une classe dans $(M(F))^{K,\mathrm{bon}}_{\tilde{M},S}$ (voir 6.5.2), alors un élément $\widetilde{\gamma_S} = \widetilde{\sigma_S} u \in \tilde{M}_S$ lui est associé selon la construction de 6.5.3. Prenons un élément $\dot{\widetilde{\gamma_S}} \in \dot{\Gamma}(\tilde{M}_S)$ supporté sur la classe de conjugaison contenant $\widetilde{\gamma_S}$ avec la décomposition de Jordan $\dot{\widetilde{\gamma_S}} = \widetilde{\sigma_S}\dot{u}$.
Posons

$$\epsilon^M(\sigma) := \begin{cases} 1, & \text{si } \sigma \text{ est } F\text{-elliptique dans } M, \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases},$$
$$\mathrm{Stab}(\sigma,u) := \{t \in \iota^M(\sigma) : tut^{-1} \overset{\mathrm{conj}}{\sim} u \text{ dans } M_\sigma(F_S)\},$$
$$a^{\tilde{M}}(S, \dot{\widetilde{\gamma_S}}) := \epsilon^M(\sigma) |\mathrm{Stab}(\sigma,u)|^{-1} a^{M_\sigma,[\cdot,\sigma]}(S,\dot{u}).$$

C'est la définition d'Arthur (voir [20, (2.4)]) lorsque le revêtement est trivial. On vérifie que $a^{\tilde{M}}(S,\dot{\widetilde{\gamma_S}}) J_{\tilde{M}}(\dot{\widetilde{\gamma_S}}, f)$ ne dépend pas des choix des mesures, et il est invariant par conjugaison par $M_\sigma(F_S)$ d'après 5.5.1.

Remarque 6.5.6. D'après 5.5.5, les coefficients $a^{\tilde{M}}(S,\cdot)$ sont déterminés par les données $\mathbf{p} : \tilde{M} \to M(\mathbb{A})$, S, et le sous-groupe compact maximal K^S de $M(F^S)$ tels que

– il existe un sous-groupe de Lévi minimal M_0 de M, défini sur F, qui est en bonne position relativement à K^S_M ;
– $S \supset V_{\mathrm{ram}}$.

Lemme 6.5.7. *Soient $M, M' \in \mathcal{L}(M_0)$ et $\gamma \in M(F)$ (resp. $\gamma' \in M'(F)$) avec la décomposition de Jordan $\gamma = \sigma u$ (resp. $\gamma' = \sigma' u' \in M'(F)$) satisfaisant aux conditions dans 6.5.5. S'il existe $y \in G(F)$ tel que $yMy^{-1} = M'$, $y\gamma y^{-1} = \gamma'$, alors*

$$a^{\tilde{M}}(S, \dot{\widetilde{\gamma_S}}) J_{\tilde{M}}(\dot{\widetilde{\gamma_S}}, f) = a^{\tilde{M}'}(S, \dot{\widetilde{\gamma_S}}') J_{\tilde{M}'}(\dot{\widetilde{\gamma_S}}', f),$$
$$a^{M_\sigma, [\cdot, \sigma]}(S, \dot{u}) J_{\tilde{M}}(\dot{\widetilde{\gamma_S}}, f) = a^{M'_{\sigma'}, [\cdot, \sigma']}(S, \dot{u}') J_{\tilde{M}'}(\dot{\widetilde{\gamma_S}}', f)$$

pour tout f.

En particulier, le produit $a^{\tilde{M}}(S, \dot{\widetilde{\gamma_S}}) J_{\tilde{M}}(\dot{\widetilde{\gamma_S}}, f)$ ne dépend que de f et de la classe de γ dans $(M(F))^{K,\mathrm{bon}}_{M,S}$.

Démonstration. Sélectionnons les mesures de sorte que

$$\dot{\widetilde{\gamma_S}}' = \widetilde{\sigma'_S} \cdot (y\dot{u}y^{-1}). \tag{III.35}$$

On a les caractères automorphes $\boldsymbol{\omega} = [\cdot, \sigma]$ sur $M_\sigma(\mathbb{A})$ et $\boldsymbol{\omega}' = [\cdot, \sigma']$ sur $M'_{\sigma'}(\mathbb{A})$. On va appliquer 5.7.4. Pour satisfaire aux hypothèses dans 5.7.1, il reste à construire les fonctions Ω_v sur $\mathcal{T}(\sigma, \sigma')(F_v)$ pour toute place v.

Sélectionnons $\tilde{\sigma}_v \in \mathbf{p}^{-1}(\sigma_v)$ pour toute place v de sorte que $\tilde{\sigma}_v \in K_v$ si $v \notin S$ et $[\tilde{\sigma}_v]_v = \tilde{\sigma}$; alors on a aussi $\prod_{v \in S} \tilde{\sigma}_v = \tilde{\sigma}_S$. Idem pour $\tilde{\sigma}'_v$.

Fixons une place v. Définissons $\Omega_v : \mathcal{T}(\sigma, \sigma')(F_v) \to \mu_m$ par la formule

$$z\tilde{\sigma}_v z^{-1} = \Omega_v(z) \tilde{\sigma}'_v.$$

Alors $\Omega_v(x'zx) = \boldsymbol{\omega}'(x') \Omega_v(z) \boldsymbol{\omega}(x)$ pour tout $x \in M_\sigma(F_v)$ et tout $x' \in M'_{\sigma'}(F_v)$. Si $v \notin S$ et $z \in \mathcal{T}(\sigma, \sigma')(F_v) \cap K_v$, alors $\Omega_v(z) = 1$ grâce au fait que $\sigma^S, {\sigma'}^S \in K^S$ et au scindage de $\mathbf{p}$ au-dessus de K_v. Comme $\mathbf{p}$ se scinde au-dessus de $G(F)$, on a aussi $\Omega|_{\mathcal{T}(\sigma, \sigma')(F)} = 1$.

Alors 5.7.4 implique

$$a^{M_\sigma, [\cdot, \sigma]}(S, \dot{u}) = \Omega(y^S)^{-1} a^{M'_{\sigma'}, [\cdot, \sigma']}(S, \dot{u}'),$$
$$\text{d'où} \quad a^{\tilde{M}}(S, \dot{\widetilde{\gamma_S}}) = \Omega(y^S)^{-1} a^{\tilde{M}'}(S, \dot{\widetilde{\gamma_S}}').$$

D'autre part, 6.4.5 implique

$$J_{\tilde{M}'}(y\dot{\widetilde{\gamma_S}}y^{-1}, f) = J_{\tilde{M}}(\dot{\widetilde{\gamma_S}}, f).$$

Comme $y\widetilde{\sigma_S}y^{-1} = \Omega(y_S)\widetilde{\sigma'_S}$, on déduit de (III.35) que

$$J_{\tilde{M}}(\dot{\widetilde{\gamma_S}}, f) = \Omega(y_S)^{-1} J_{\tilde{M}'}(\dot{\widetilde{\gamma_S}}', f).$$

Or $\Omega(y_S)\Omega(y^S) = \Omega(y) = 1$ car $y \in G(F)$, cela conclut la démonstration pour le premier énoncé. On a déjà remarqué que $\widetilde{\gamma_S} \mapsto a^{\tilde{M}}(S, \dot{\widetilde{\gamma_S}}) J_{\tilde{M}}(\dot{\widetilde{\gamma_S}}, f)$ est invariant par conjugaison par $M_\sigma(F_S)$, donc le dernier énoncé résulte de la définition de (M, S)-équivalence. $\square$

Notons $(M(F) \cap \mathfrak{o})^{K,\mathrm{bon}}_{M,S}$ le sous-ensemble des classes dans $(M(F))^{K,\mathrm{bon}}_{M,S}$ qui rencontrent $\mathfrak{o}$.

Théorème 6.5.8 (cf. [9, 8.1])**.** *Avec les mêmes notations, on a*

$$J_{\mathfrak{o}}(f) = \sum_{M \in \mathcal{L}(M_0)} |W_0^M||W_0^G|^{-1} \sum_{\substack{\gamma \in (M(F) \cap \mathfrak{o})^{K,\mathrm{bon}}_{M,S} \\ \gamma \rightsquigarrow \widetilde{\gamma_S}}} a^{\tilde{M}}(S, \dot{\widetilde{\gamma_S}}) J_{\tilde{M}}(\dot{\widetilde{\gamma_S}}, f).$$

La somme ne porte que sur un nombre fini de classes.

Ici l'expression signifie que, pour chaque classe dans $(M(F) \cap \mathfrak{o})_{M,S}^{K,\text{bon}}$, on en prend un représentant admissible γ quelconque, puis un $\dot{\widetilde{\gamma_S}}$ quelconque tel que $\gamma \rightsquigarrow \widetilde{\gamma_S}$ via la correspondance définie dans 6.5.3. Le produit $a^{\tilde{M}}(S, \dot{\widetilde{\gamma_S}}) J_{\tilde{M}}(\dot{\widetilde{\gamma_S}}, f)$ est bien défini grâce au lemme précédent.

Démonstration. Reprenons les notations de 6.5.4. Le groupe $\iota^M(\sigma)$ opère sur $\Gamma_{\text{unip}}(M_\sigma(F), S)^{[\cdot,\sigma]}$, et le groupe d'isotropie d'une classe u est $\text{Stab}(\sigma, u)$. Vu le lemme précédent et 6.5.4, $J_{\mathfrak{o}}(f)$ est égal à

$$\sum_{M \in \mathcal{L}(M_1)} |W_0^{M_\sigma}||W_0^{G_\sigma}|^{-1} |\iota^M(\sigma)||\iota^G(\sigma)|^{-1} \sum_{\substack{\gamma \in (M(F) \cap \mathfrak{o})_{M,S}^{K,\text{bon}} \\ \gamma_s = \sigma}} a^{\tilde{M}}(S, \dot{\widetilde{\gamma_S}}) J_{\tilde{M}}(\dot{\widetilde{\gamma_S}}, f). \tag{III.36}$$

où $\gamma_s = \sigma$ signifie que l'on prend les représentants admissibles ayant partie semi-simple σ.

Traitons maintenant le côté à droite de l'assertion. Tous les regroupements ci-dessous sont justifiés par le lemme précédent. La somme sur γ se décompose en une somme double sur les classes semi-simples et des classes unipotentes. On peut combiner la somme sur les classes semi-simples avec la somme sur M et on obtient une somme sur

$$\Pi := \{(M, \sigma_M) : M \in \mathcal{L}(M_0),\ \sigma_M \in (M(F)),\ \sigma_M \overset{\text{conj}}{\sim} \sigma \text{ dans } G(F)\}$$

suivie par une somme sur des classes unipotentes. Cette somme double est évidemment finie. De plus, W_0^G opère sur Π et on peut sommer sur le quotient Π / W_0^G pourvu que l'on multiplie les coefficients par l'ordre du groupe d'isotropie.

Toute classe dans Π / W_0^G contient une paire de la forme (M, σ) avec $M \supset M_1$ (cf. [9, p.186]). Arthur en a calculé l'ordre du groupe d'isotropie (cf. [9, pp.206-207]) : c'est $|W_0^{M^\sigma(F)}||W_0^{G^\sigma(F)}|^{-1}$, où

$$W_0^{G^\sigma(F)} := M_1^\sigma(F) \backslash N_{G^\sigma}(A_{M_1})(F).$$

Idem pour M au lieu de G. Donc le terme à droite de l'assertion est égal à

$$\sum_{M \in \mathcal{L}(M_1)} |W_0^{M^\sigma(F)}||W_0^{G^\sigma(F)}|^{-1} \sum_{\substack{\gamma \in (M(F) \cap \mathfrak{o})_{M,S}^{K,\text{bon}} \\ \gamma_s = \sigma}} a^{\tilde{M}}(S, \dot{\widetilde{\gamma_S}}) J_{\tilde{M}}(\dot{\widetilde{\gamma_S}}, f). \tag{III.37}$$

En comparant (III.36) et (III.37), on se ramène à prouver que

$$|W_0^{M_\sigma}||W_0^{G_\sigma}|^{-1} |\iota^M(\sigma)||\iota^G(\sigma)|^{-1} = |W_0^{M^\sigma(F)}||W_0^{G^\sigma(F)}|^{-1}, \quad M \in \mathcal{L}(M_1),$$

ce qui est exactement (8.5) de [9]. □

Étant donné Δ un voisinage compact de 1 dans $G(\mathbb{A})^1$, posons $\tilde{\Delta} := \mathbf{p}^{-1}(\Delta)$. Notons $C^\infty_{\Delta,--}(\tilde{G}^1)$ l'espace des fonctions dans $C^\infty_{c,--}(\tilde{G}^1)$ à support dans $\tilde{\Delta}$. Posons

$$C^\infty_{\Delta,--}(\tilde{G}^1_S) := C^\infty_{\Delta,--}(\tilde{G}^1) \cap C^\infty_{c,--}(\tilde{G}^1_S)$$

via (III.33). On arrive ainsi au développement géométrique fin.

Théorème 6.5.9 (cf. [9, 9.2]). *Il existe un sous-ensemble fini de places $S_\Delta \supset V_{\text{ram}}$ tel que*
– *il existe $\Delta_S \subset G(F_S)$ tel que $\Delta = \Delta_{S_\Delta} \times K^{S_\Delta}$;*
– *pour tout $S \supset S_\Delta$ et tout $f \in C^\infty_{\Delta,--}(\tilde{G}^1_S)$, on a*

$$J(f) = \sum_{M \in \mathcal{L}(M_0)} |W_0^M||W_0^G|^{-1} \sum_{\substack{\gamma \in (M(F))_{M,S}^{K,\text{bon}} \\ \gamma \rightsquigarrow \widetilde{\gamma_S}}} a^{\tilde{M}}(S, \dot{\widetilde{\gamma_S}}) J_{\tilde{M}}(\dot{\widetilde{\gamma_S}}, f);$$

les termes dans la somme ci-dessus sont nuls pour presque tout γ.

Démonstration. Pour $\mathfrak{o}$ fixé, on peut toujours prendre S de sorte que la condition pour 6.5.8 soit satisfaite. Puisque $J = \sum_{\mathfrak{o}} J_{\mathfrak{o}}$, il suffit de montrer qu'il n'y qu'un nombre fini de $\mathfrak{o}$ qui rencontre Δ, ce qu'assure [9, 9.1]. $\square$

Chapitre IV

Analyse harmonique locale

1 Introduction

Cet article fait suite à [Chapitre III] qui vise à établir une formule des traces invariante à la Arthur [11] pour une grande classe de revêtements des groupes réductifs connexes. Afin d'arriver à la formule des traces invariante, Arthur a besoin des résultats profonds d'analyse harmonique locale. Tandis qu'ils sont admis par certains mathématiciens, il s'avère que les modifications nécessaires ne sont pas toujours triviales. Notre objet est donc d'établir, ou plutôt de justifier, de tels résultats. Plus précisément, nous visons à établir

- la formule de Plancherel [83] ;
- la normalisation des opérateurs d'entrelacement [13], avec formules explicites dans le cas archimédien ;
- la régularité et le développement local de caractères dans le cas non archimédien [40] ;
- la formule des traces locale invariante [14].
- le théorème à la Kazhdan de la densité de caractères tempérés dans le cas non archimédien [42].

Le Graal de cet article est la formule des traces locale invariante sous la forme présentée dans [21, Proposition 6.1] :

$$I_{\mathrm{disc}}(f) = \sum_{M \in \mathcal{L}(M_0)} |W_0^M||W_0^G|^{-1}(-1)^{\dim A_M/A_G} \int_{\Gamma_{G-\mathrm{reg,ell}}(M(F))^{\mathrm{bon}}} I_{\tilde{M}}(\gamma, f)\,\mathrm{d}\gamma$$

pour tout $f \in \mathcal{C}_{--}(\tilde{G} \times \tilde{G})$, où

- $\mathcal{C}_{--}(\tilde{G} \times \tilde{G})$ est la "composante anti-spécifique" de l'espace des fonctions de Schwartz-Harish-Chandra sur $\tilde{G} \times \tilde{G}$;
- $I_{\mathrm{disc}}(\cdot)$ est la "partie discrète" du côté spectral spécifique de la formule des traces locale non invariante ;
- $I_{\tilde{M}}(\gamma, \cdot)$ est la distribution invariante fabriquée des intégrales orbitales pondérées et des caractères pondérés, c'est l'intégrale orbitale usuelle lorsque $M = G$. Cette distribution est reliée aux distributions apparaissant dans la formule des traces globale par une formule de scindage (le Lemme 5.8.4).

Voir §5 pour les détails. Il peut paraître curieux car ce n'est pas un ingrédient dans la preuve originelle d'Arthur de la formule des traces globale. Néanmoins, Arthur fait usage d'un argument global pour compléter son argument de récurrence (voir [11, §5]), ce qui est problématique sur les revêtements car il faudrait une propriété d'approximation faible des bons éléments. Un cas particulier du résultat d'Arthur est la densité de caractères tempérés due à Kazhdan [42] qui est indispensable dans toute application de la formule des traces. Donc il faut les établir à tout prix.

Ici la formule des traces locale en fournit une approche contournée mais purement locale, cf. [15, Corollary 5.3]. D'ailleurs, la formule des traces locale interviendra dans toute étude sérieuse d'analyse harmonique locale, e.g. la théorie de représentations tempérées elliptiques.

Vu les travaux de Harish-Chandra, il est tentant de penser que les théories archimédiennes s'adaptent aux revêtements sans peine. Bien au contraire ! Par exemple, le théorème de Paley-Wiener invariant pour les fonctions de Schwartz-Harish-Chandra fait l'usage de la théorie de K-types minimaux de Vogan, notamment la multiplicité 1, ce qui dépend des hypothèses d'algébricité ou de connexité du groupe de Lie en question.

Organisation de cet article Dans le §2, nous recueillons des définitions de base pour l'analyse harmonique locale non archimédienne pour les revêtements et nous établissons la théorie de Harish-Chandra pour les revêtements : fonctions de Schwartz-Harish-Chandra, représentations tempérées, opérateurs d'entrelacement, fonction c et μ, la formule de Plancherel. Les preuves sont plus ou moins identiques au cas des groupes réductifs connexes et nous adoptons les notations de [83] ; le but de cette section est plutôt de fixer les notations et les choix de mesures. Une exception : il faut choisir un sous-groupe ouvert d'indice fini $A_M(F)^\dagger$ de $A_M(F)$, où M est un sous-groupe de Lévi semi-standard de G (voir la Proposition 2.1.1). Afin de compenser cette ambiguïté, les intégrales concernant $A_M(F)^\dagger$ sont multipliées par le facteur ι_M défini dans (IV.1).

Dans le §3, nous étudions la normalisation des opérateurs d'entrelacement satisfaisant aux conditions d'Arthur, cf. [13, §2] et [16, §2]. Nous en donnons des formules explicites similaires à celles d'Arthur dans le cas archimédien. Pour le cas non archimédien nous reprenons l'argument dans [33, Lecture 15] à quelques corrections près. Enfin, il faut aussi considérer le cas des revêtements non ramifiées et nous le faisons à l'aide de la théorie de séries principales non ramifiés spécifiques. Pour les revêtements archimédiens à deux feuillets, par exemple ceux provenant des $\mathbf{K}_2$-extensions de Brylinski-Deligne [27], nos facteurs normalisants sont liés à ceux d'Arthurs pour les $\mathbb{R}$-groupes réductifs connexes qui s'expriment en termes de fonctions L archimédiennes.

Dans le §4, nous reprenons [40]. La méthode de descente semi-simple nous ramène à l'algèbre de Lie, où le revêtement disparaît mais un caractère intervient. Le même phénomène paraît aussi dans [Chapitre III]. On peut se débarrasser du caractère en travaillant systématiquement avec le module croisé $[G_{\mathrm{SC}} \times Z^\circ_{G^\circ} \to G]$. Remarquons que l'intégrabilité locale des caractères admissibles irréductibles pour les revêtements a déjà apparu comme une hypothèse dans des travaux sur la correspondance de Howe ; c'est un peu surprenant qu'une preuve n'est jamais entamée auparavant.

Dans le §5, nous établissons la formule des traces locale d'Arthur. Les arguments sont presque identiques à ceux d'Arthur et nous n'en donnons que des esquisses ; les intégrales d'Eisentein sont évitées dans notre récit. Comme le formalisme d'Arthur évolue, la tâche est plutôt de faire la mise à jour. Notre référence est [21, §6] ; en particulier, les fonctions test sont dans l'espace de Schwartz-Harish-Chandra et les distributions sont rendues invariantes à l'aide du Théorème de Paley-Wiener invariant pour de telles fonctions, dont la démonstration dans le cas archimédien est une variante de celle de [17]. Nous démontrons le “Théorème 0” de Kazhdan dans le Théorème 5.8.10.

Selon Arthur, les caractères pondérés peuvent être non normalisés (ceux dans la formule des traces locale non invariante), normalisés relativement à un choix de facteurs normalisants, ou canoniquement normalisés à l'aide de fonctions μ. Dans l'étude de la formule des traces locale invariante, il nous faut utiliser et comparer tous les trois. Néanmoins, dans les énoncés finaux les caractères pondérés canoniquement normalisés sont toujours préférés.

Les corps locaux dans §§4-5 sont supposés de caractéristique nulle.

Notations générales Sauf mention expresse du contraire, les notations seront celles de [Chapitre III], qui sont compatibles avec celles d'Arthur. Si V est un espace vectoriel, son dual est noté $V^\vee$ et l'accouplement entre eux est désigné par $\langle \check{v}, v\rangle$ ou $\check{v}(v)$.

2 La formule de Plancherel

2.1 Définitions de base

On vise à établir la formule de Plancherel pour les revêtements locaux. Le cas archimédien est déjà traité dans les travaux de Harish-Chandra [39]. On se limite au cas où F est un corps local non archimédien. Notons q le cardinal du corps résiduel de F. Nous suivrons l'approche de Waldspurger [83] en mettant l'accent sur les énoncés et les changements nécessaires pour adapter ses preuves aux revêtements.

Soient $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$ et G un F-groupe réductif connexe. Considérons un revêtement à m feuillets

$$1 \to \mu_m \to \tilde{G} \xrightarrow{\mathbf{p}} G(F) \to 1.$$

Nous adoptons les conventions de [Chapitre III] : les objets associés au revêtement sont affectés de $\sim$, e.g. $\tilde{P}, \tilde{x}$; les symboles sans $\sim$ désignent leurs images par $\mathbf{p}$. Une décomposition de Lévi d'un parabolique P s'écrit toujours de la forme $P = MU$. On construira des objets associés à $\tilde{G}$ ainsi qu'à ses sous-groupes de Lévi ; on fera référence au groupe en question en affectant les notations d'exposant lorsqu'il convient de le faire.

Fixons un sous-groupe de Lévi minimal M_0 de G, un sous-groupe compact maximal spécial K de $G(F)$ en bonne position relativement à M_0, et $P_0 \in \mathcal{P}(M_0)$. On définit ainsi les sous-groupes de Lévi ou paraboliques standards et semi-standards. La proposition suivante est aussi valable pour le cas F archimédien.

Proposition 2.1.1. *Soient F un corps local, $\mathbf{p} : \tilde{G} \to G(F)$ un revêtement à m feuillets. Il existe une famille de sous-groupes $A_M(F)^\dagger$ de $A_M(F)$, où M parcourt les sous-groupes de Lévi de G, telle que*

1. *$A_M(F)^\dagger$ est ouvert et fermé dans $A_M(F)$ d'indice fini ;*
2. *$\widetilde{A_M}^\dagger := \mathbf{p}^{-1}(A_M(F)^\dagger)$ est central dans $\tilde{M}$;*
3. *si M_1, M_2 sont des sous-groupes de Lévi et $yM_1y^{-1} = M_2$ où $y \in G(F)$, alors $yA_{M_1}(F)^\dagger y^{-1} = A_{M_2}(F)^\dagger$;*
4. *soit L un Lévi contenant M, alors $A_L(F)^\dagger \subset A_M(F)^\dagger$;*
5. *on pose*

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{M,F} &:= H_M(M(F)), \\ \tilde{\mathfrak{a}}_{M,F} &:= H_M(A_M(F)), \\ \tilde{\mathfrak{a}}^\dagger_{M,F} &:= H_M(A_M(F)^\dagger), \end{aligned}$$

alors $\tilde{\mathfrak{a}}^\dagger_{L,F} = \tilde{\mathfrak{a}}^\dagger_{M,F} \cap \mathfrak{a}_L$ pour tout $L \supset M$.

Démonstration. Indiquons une construction possible : posons $A_M(F)^\dagger := A_M(F)^m$ pour tout Lévi M. Alors on a $\tilde{\mathfrak{a}}^\dagger_{M,F} = m \cdot \tilde{\mathfrak{a}}_{M,F}$. Soit $L \supset M$, la propriété $\tilde{\mathfrak{a}}^\dagger_{L,F} = \tilde{\mathfrak{a}}^\dagger_{M,F} \cap \mathfrak{a}_L$ résulte du fait que $\tilde{\mathfrak{a}}_{L,F} = \tilde{\mathfrak{a}}_{M,F} \cap \mathfrak{a}_L$. Les autres propriétés sont triviales. □

En fait, on a déjà utilisé une version moins précise de ces sous-groupes dans [Chapitre III]. Fixons une telle famille désormais. Lorsque $M = M_0$, on utilise les notations $A_0(F)$, $A_0(F)^\dagger$ et $\widetilde{A_0}^\dagger$.

Rappelons que dans [Chapitre III] on a défini l'application de Harish-Chandra $H_{\tilde{G}} : \tilde{G} \to \mathfrak{a}_G$ par $H_{\tilde{G}} = H_G \circ \mathbf{p}$ et $\tilde{G}^1 := \mathrm{Ker}\,(H_{\tilde{G}}) = \mathbf{p}^{-1}(G(F)^1)$. Elle diffère de celle de [83] par un signe, mais peu importe. Rappelons que, lorsque F est non archimédien, on choisit la mesure de $A_G(F)$ de sorte que $\mathrm{mes}(A_G(F) \cap \mathrm{Ker}\, H_G) = 1$. On munit $A_G(F)^\dagger$ de la mesure induite de $A_G(F)$.

Soit M un Lévi de G. Étant donné $A_M(F)^\dagger$, on définit

$$\iota_M := [A_M(F) : A_M(F)^\dagger]^{-1}, \tag{IV.1}$$

alors pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(G(F))$ invariante par $A_M(F)^\dagger$, l'intégrale

$$\iota_M \int\limits_{A_M(F)^\dagger \backslash G(F)} \varphi(x)\, \mathrm{d}x$$

ne change pas si l'on remplace $A_M(F)^\dagger$ par un sous-groupe d'indice fini $A_M(F)^\ddagger$. Si φ est invariante par $A_M(F)$, alors cette l'intégrale est égale à $\int_{A_M(F)\backslash G(F)} \varphi(x)\, \mathrm{d}x$.

On pose

$$X(\tilde{G}) := \mathrm{Hom}(\tilde{G}/\tilde{G}^1, \mathbb{C}^\times).$$

Selon nos définitions, $X(\tilde{G})$ s'identifie à $X(G)$. Il est muni d'une structure de variété algébrique complexe, isomorphe à $(\mathbb{C}^\times)^{\dim_\mathbb{R} \mathfrak{a}_G}$, qui se déduit de l'homomorphisme surjectif

$$\mathfrak{a}^*_{G,\mathbb{C}} \to X(G)$$

qui envoie $\chi \otimes s \in \mathfrak{a}^*_{G,\mathbb{C}}$ sur $|\chi(\cdot)|^s$; rappelons que $\mathfrak{a}^*_{G,\mathbb{C}} = X^*(G) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}$ où $X^*(G) := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_\mathrm{m})$. Son noyau est de la forme $\frac{2\pi i}{\log q} L$ où L est un réseau dans $X^*(G) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$. Cela permet de définir la partie réelle $\mathrm{Re}(\chi)$ pour tout $\chi \in X(G)$. Notons $\mathrm{Im}X(G) := \{\chi \in X(G) : \mathrm{Re}(\chi) = 0\}$. On définit ainsi $\mathrm{Im}X(\tilde{G}) = \mathrm{Im}X(G)$.

Soit L un sous-groupe de $\mathfrak{a}_G$, on pose $L^\vee := \mathrm{Hom}(L, 2\pi i\mathbb{Z}) \subset i\mathfrak{a}^*_G$. Alors

$$\mathrm{Im}X(\tilde{G}) = i\mathfrak{a}^*_G / \mathfrak{a}^\vee_{G,F}.$$

C'est un tore compact comme F est non archimédien. Introduisons des mesures de Haar et des constantes comme suit.

– On munit $\mathrm{Im}X(\tilde{G})$ de la mesure de Haar de sorte que l'application quotient

$$i\mathfrak{a}^*_G / \mathfrak{a}^\vee_{G,F} \to i\mathfrak{a}^*_G / \tilde{\mathfrak{a}}^\vee_{G,F}$$

préserve localement les mesures et que $\mathrm{mes}(i\mathfrak{a}^*_G / \tilde{\mathfrak{a}}^\vee_{G,F}) = 1$. Ceci est compatible avec la convention dans [Chapitre III, §2.5].

– Pour tout $M \in \mathcal{L}(M_0)$, choisissons la mesure de Haar sur $M(F)$ telle que $\mathrm{mes}(K \cap M(F)) = 1$. De tels choix sont invariants par W_0^G.

– On munit $\tilde{M}$ de la mesure de Haar telle que $\mathrm{mes}(\mathbf{p}^{-1}(E)) = \mathrm{mes}(E)$ pour tout $E \subset M(F)$ mesurable. La même convention s'applique aux groupes $\tilde{K}$, $\tilde{K} \cap \tilde{M}$ et $\widetilde{A_M}^\dagger$.

– Soit $P = MU \in \mathcal{F}(M_0)$, on munit $U(F)$ de la mesure de Haar telle que $\mathrm{mes}(U(F) \cap K) = 1$. On note $\bar{P} = M\bar{U}$ l'opposé de P. Rappelons aussi que Harish-Chandra a défini la constante positive

$$\gamma(P) := \int\limits_{\bar{U}(F)} \delta_P(m(\bar{u}))\, \mathrm{d}\bar{u}$$

où $\bar{u} = u(\bar{u})m(\bar{u})k(\bar{u})$ selon la décomposition d'Iwasawa $G(F) = U(F)M(F)K$. Elle est proportionnelle à la mesure de Haar sur $\bar{U}(F)$, qui est déjà choisie. En fait, elle ne dépend que de G et M (cf. [83, p.240]), donc c'est loisible de la noter $\gamma(G|M)$. On a la formule d'intégrale pour toute $f \in C_c(\tilde{G})$

$$\text{(IV.2)} \qquad \gamma(G|M) \int_{\tilde{G}} f(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x} = \int_{U(F)} \int_{\tilde{M}} \int_{\bar{U}(F)} \delta_P(m)^{-1} f(u\tilde{m}\bar{u})\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\tilde{m}\,\mathrm{d}\bar{u}.$$

On définit le sous-ensemble $\widetilde{M_0}^+$ (resp. $\widetilde{A_0}^{\dagger,+}$) comme l'image réciproque de

$$\overline{\mathfrak{a}_0^+} := \{H \in \mathfrak{a}_0 : \forall \alpha \in \Delta_0,\ \langle \alpha, H \rangle \geq 0\}$$

par $H_{\tilde{M}_0}$ (resp. $H_{\tilde{M}_0}$ restreint à $\widetilde{A_0}^{\dagger}$) ; ici on a changé les notations de [83] afin d'alléger les symboles. On en déduit la décomposition suivante.

Proposition 2.1.2. *Il existe un sous-ensemble fini $\tilde{\Gamma}$ de $\tilde{G}$ tel que*

$$\tilde{G} = \bigsqcup_{\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}} \tilde{\gamma} \tilde{K} \widetilde{M_0}^+ \tilde{K}.$$

Démonstration. Cela résulte de la décomposition correspondante $G(F) = K\overline{M_0^+}K$, où $\overline{M_0^+}$ est l'image réciproque de $\overline{\mathfrak{a}_0^+}$ par H_{M_0}. □

Enfin, on peut prendre une fonction hauteur $\|\cdot\|_G : G(F) \to \{r \in \mathbb{R} : r \geq 1\}$ adaptée à K comme dans [83, p.242] et on pose $\|\cdot\|_{\tilde{G}} := \|\mathbf{p}(\cdot)\|_G$. Ceci joue le rôle de la fonction $\|\cdot\|$ dans [83] qui intervient dans diverses majorations. Il convient aussi de considérer la fonction $\sigma(\tilde{x}) = \sigma(x) := \sup\{1, \log \|x\|\}$.

2.2 Représentations

Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique de G. Le scindage unipotent [Chapitre III, §2.2] donne une décomposition canonique $\tilde{P} = \tilde{M}U(F)$. Cela permet de définir le foncteur d'induction parabolique normalisée

$$\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\cdot) = \mathrm{Ind}_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}(\delta_P^{1/2} \otimes \cdot)$$

où δ_P signifie la fonction module de $P(F)$ composée avec $\mathbf{p}$, ce qui est aussi la fonction module de $\tilde{P}$.

De même, on sait définir le foncteur de Jacquet normalisé : soit (π, V) une représentation lisse de $\tilde{G}$, on note $j_{\tilde{P}} : V \to V_{\tilde{P}}$ le quotient maximal sur lequel $U(F)$ opère trivialement. On obtient la représentation lisse $(\pi_{\tilde{P}}, V_{\tilde{P}})$ de $\tilde{M}$ en posant

$$\pi_{\tilde{P}}(\tilde{m}) j_{\tilde{P}}(v) = \delta_P(m)^{-1/2} j_{\tilde{P}}(\pi(\tilde{m})v), \qquad v \in V.$$

En outre, le groupe $X(\tilde{G})$ opère sur l'ensemble des classes représentations lisses (resp. admissibles, unitaires) par produit tensoriel. On peut ainsi développer une théorie de décomposition de Bernstein comme le cas de groupes réductifs connexes. Ces foncteurs ont des propriétés algébriques comme le cas de groupes réductifs connexes, par exemple le lemme géométrique de Bernstein-Zelevinsky, l'admissibilité uniforme, la réciprocité de Frobenius et le second théorème d'adjonction, pour en citer quelques uns. Observons en passant que toutes ces opérations préservent l'équivariance sous μ_m.

Passons maintenant à l'aspect "analytique". Le résultat suivant est important pour l'étude de coefficients matriciels de modules de Jacquet, cf. [83, I.2]. Faute d'avoir une référence convenable, on en donnera aussi une démonstration.

Proposition 2.2.1. *Soit V un sous-espace de dimension finie de $C^\infty(\widetilde{A_G}^\dagger)$ stable par la représentation régulière à droite de $\widetilde{A_G}^\dagger$, notée ρ. Alors il existe un sous-ensemble fini $\mathcal{X}$ de $\mathrm{Hom}(\widetilde{A_G}^\dagger, \mathbb{C}^\times)$ et un entier $d \geq 0$, tels que pour tout $\chi \in \mathcal{X}$ et tout $f \in V$, il existe un polynôme $P_{\chi,f}$ sur $\mathfrak{a}_G$, $\deg P_{\chi,f} \leq d$, tel que*

$$f(\tilde{a}) = \sum_{\chi \in \mathcal{X}} \chi(\tilde{a}) P_{\chi,f}(H_G(a)), \qquad \tilde{a} \in \widetilde{A_G}^\dagger.$$

Si l'on prend $\mathcal{X}$ minimal vérifiant les propriétés ci-dessus pour tout f, alors pour tout $\chi \in \mathcal{X}$, les fonctions $\tilde{a} \mapsto \chi(\tilde{a})$ et $\tilde{a} \mapsto \chi(\tilde{a}) P_{\chi,f}(H_M(a))$ sont dans V.

Démonstration. Prenons $d = \dim V$. La finitude de $\dim V$ et la commutativité de $\widetilde{A_G}^\dagger$ donnent une décomposition finie $V = \bigoplus_{\chi \in \mathcal{X}} V_\chi$, stable par ρ, où

$$V_\chi = \bigcap_{\tilde{a} \in \widetilde{A_G}^\dagger} \mathrm{Ker}\,(\rho(\tilde{a}) - \chi(\tilde{a}))^d.$$

On se ramène ainsi au cas où $\mathcal{X} = \{\chi\}$ est un singleton. En multipliant les éléments de V_χ par $\tilde{a} \mapsto \chi(\tilde{a})^{-1}$, on peut supposer de plus que $\chi = 1$. Soit $f \in V_1$. Comme $\rho(\tilde{a})$ agit sur V_1 comme une matrice unipotente pour tout $\tilde{a}$, la fonction f se factorise par le sous-groupe compact $\widetilde{A_G}^\dagger \cap \tilde{G}^1$. Alors l'équation

$$(\rho(\tilde{a}) - \mathrm{id})^d f = 0, \qquad \tilde{a} \in \widetilde{A_G}^\dagger$$

devient un système de suites récurrentes linéaires sur le réseau $\tilde{\mathfrak{a}}_{G,F} \subset \mathfrak{a}_G$, et l'assertion en découle. □

Définition 2.2.2. Soient (π, V) une représentation admissible de $\tilde{G}$ et $\chi \in \mathrm{Hom}(\widetilde{A_G}^\dagger, \mathbb{C}^\times)$. Définissons

$$V_\chi = \left\{ v \in V : \exists d,\ v \in \bigcap_{\tilde{a} \in \widetilde{A_G}^\dagger} \mathrm{Ker}\,(\pi(\tilde{a}) - \chi(\tilde{a}))^d \right\}.$$

On a alors $V = \bigoplus_\chi V_\chi$. Définissons l'ensemble des exposants de (π, V) par

$$\mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi) := \{\chi \in \mathrm{Hom}(\widetilde{A_G}^\dagger, \mathbb{C}^\times) : V_\chi \neq 0\}.$$

Remarque 2.2.3. Soit $\chi \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi)$. On peut vérifier aisément que $\mathrm{Re}\chi$ est un objet "infinitesimal" : il ne change pas si l'on remplace $A_G(F)^\dagger$ par un sous-groupe ouvert d'indice fini $A_G(F)^\ddagger$ et remplace χ par sa restriction à $\widetilde{A_G}^\ddagger$.

Posons $C_{\mathrm{lisse}}(\tilde{G})$ l'espace de fonctions sur $\tilde{G}$ bi-invariantes par un sous-groupe ouvert et compact. Il y a deux représentations ρ, λ de $\tilde{G}$ sur cet espace, définies par

$$(\rho(\tilde{x})f)(\tilde{y}) = f(\tilde{y}\tilde{x}),$$
$$(\lambda(\tilde{x})f)(\tilde{y}) = f(\tilde{x}^{-1}\tilde{y}).$$

Soit (π, V) une représentation admissible de $\tilde{G}$. Notons $(\check{\pi}, \check{V})$ sa contragrédiente. Soient $v \in V$, $\check{v} \in \check{V}$. On définit le coefficient matriciel comme l'élément de $C_{\mathrm{lisse}}(\tilde{G})$

$$\tilde{x} \mapsto \langle \pi(\tilde{x})v, \check{v} \rangle.$$

Notons $\mathcal{A}(\pi)$ la sous-représentation de $C_{\text{lisse}}(\tilde{G})$ (par ρ et λ) engendrée par tous les coefficients de π, et posons

$$\mathcal{A}(\tilde{G}) = \sum_{\pi} \mathcal{A}(\pi) = \bigcup_{\pi} \mathcal{A}(\pi).$$

Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique de G. On dispose de l'application terme constant le long de $\tilde{P}$, cf. [83, I.6.2]

$$\begin{gathered}\mathcal{A}(\tilde{G}) \to \mathcal{A}(\tilde{M}),\\ f \mapsto f_{\tilde{P}}.\end{gathered}$$

La fonction $f_{\tilde{P}}$ est caractérisée par la propriété suivante. Pour tout $\tilde{m} \in \tilde{M}$, il existe $\epsilon > 0$ tel que, si $\tilde{a} \in \widetilde{A_M}^{\dagger}$ et $|\alpha(a)|_F < \epsilon$ pour tout $\alpha \in \Sigma_P$, alors

$$(\delta_P^{-1/2} f)(\tilde{m}\tilde{a}) = f_{\tilde{P}}(\tilde{m}\tilde{a}). \tag{IV.3}$$

La démonstration est basée sur un théorème de Casselman [83, I.4.1], la preuve-là s'adapte aux revêtements à l'aide de la Proposition 2.1.2.

2.3 Fonctions de Schwartz-Harish-Chandra

Introduisons la fonction Ξ^G de Harish-Chandra sur $G(F)$. Rappelons que Ξ^G est définie comme un coefficient matriciel de l'induction parabolique normalisée de la représentation triviale de $\tilde{P}_0$. On pose simplement

$$\Xi^{\tilde{G}} := \Xi^G \circ \mathbf{p}.$$

Cette fonction vérifie des majorations liées à $\|\cdot\|$ et σ, cf. [83, II]. De même, les résultats d'intégrabilité de [83, II] demeurent valables pour $\tilde{G}$, ce qui justifie toutes les intégrales que l'on considérera.

Soit $P \in \mathcal{F}(M_0)$. On note

$$^{+}\mathfrak{a}_P^{G*} := \sum_{\alpha \in \Delta_P} \mathbb{R}_{>0} \cdot \alpha$$

et on note $^{+}\bar{\mathfrak{a}}_P^{G*}$ son adhérence.

Proposition 2.3.1. *Soit (π, V) une représentation admissible de $\tilde{G}$ admettant un caractère central unitaire. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1 Les valeurs absolues des coefficients de π sont de carrés intégrables sur $\tilde{G}/\widetilde{A_G}^{\dagger}$.

2 Pour tout parabolique semi-standard $P = MU$ et tout $\chi \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi_{\tilde{P}})$, on a $\mathrm{Re}\chi \in {}^{+}\mathfrak{a}_P^{G*}$.

3 Pour tout parabolique standard propre maximal $P = MU$ et tout $\chi \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi_{\tilde{P}})$, on a $\mathrm{Re}\chi \in {}^{+}\mathfrak{a}_P^{G*}$.

Supposons vérifiées ces conditions et soit $f \in \mathcal{A}(\pi)$. Pour tout $r \in \mathbb{R}$, il existe $c > 0$ tel que

$$|f(\tilde{x})| \leq c\Xi(x)(1 + \sigma(x))^{-r}, \qquad \tilde{x} \in \tilde{G}. \tag{IV.4}$$

On appelle une telle représentation de carré intégrable modulo le centre, ou bien L^2 modulo le centre. Si (π, V) est de carré intégrable modulo le centre, on définit son degré formel comme la constante positive $d(\pi)$ telle que

$$\iota_G \int_{\widetilde{A_G}^{\dagger}\backslash\tilde{G}} \langle \pi(\tilde{x})v, \check{v}\rangle \langle v', \pi^{\vee}(\tilde{x})\check{v}'\rangle \, \mathrm{d}\tilde{x} = d(\pi)^{-1} \langle v, \check{v}'\rangle \langle v', \check{v}\rangle, \quad v, v' \in V,\ \check{v}, \check{v}' \in V^{\vee}.$$

Remarquons que $d(\pi)$ dépend de la mesure de Haar sur $\tilde{G}$ mais pas du choix de $A_G(F)^\dagger$.

Définissons des versions dites faibles de $C_{\text{lisse}}(\tilde{G})$ et $\mathcal{A}(\tilde{G})$ comme suit.

$$\begin{aligned} C^w_{\text{lisse}}(\tilde{G}) &:= \{ f \in C_{\text{lisse}}(\tilde{G}) : \exists c, r \text{ tels que (IV.4) est vérifié } \}, \\ \mathcal{A}^w(\tilde{G}) &:= \mathcal{A}(\tilde{G}) \cap C^w_{\text{lisse}}(\tilde{G}). \end{aligned}$$

Soit (π, V) une représentation admissible de $\tilde{G}$. On dit que (π, V) est tempérée si $\mathcal{A}(\pi) \subset \mathcal{A}^w(\tilde{G})$. Les représentations de carré intégrable modulo le centre sont tempérées. Un fait important est

$$\mathcal{A}^w(\tilde{G}) = \bigcup_{\pi:\text{tempérée}} \mathcal{A}(\pi) = \sum_{\pi:\text{tempérée}} \mathcal{A}(\pi).$$

Proposition 2.3.2. *Soit (π, V) une représentation admissible de $\tilde{G}$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1 (π, V) est tempérée.

2 Pour tout parabolique semi-standard $P = MU$ et tout $\chi \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi_{\tilde{P}})$, on a $\mathrm{Re}\chi \in {}^+\bar{\mathfrak{a}}_P^{G*}$.

3 Pour tout parabolique standard propre maximal $P = MU$ et tout $\chi \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi_{\tilde{P}})$, on a $\mathrm{Re}\chi \in {}^+\bar{\mathfrak{a}}_P^{G*}$.

En résumé, nous avons défini les ensembles

$$\Pi_2(\tilde{M}) \subset \Pi_{\text{temp}}(\tilde{M}) \subset \Pi_{\text{unit}}(\tilde{M}) \subset \Pi(\tilde{M})$$

qui désignent les ensembles de classes d'équivalences de représentations de carré intégrable modulo le centre, tempérées, unitaires et admissibles irréductibles de $\tilde{M}$, respectivement. On peut aussi considérer l'équivariance sous μ_m et introduire les sous-ensembles $\Pi_{2,-}(\tilde{M})$, $\Pi_{\text{temp,-}}(\tilde{M})$, etc.

Soient $r \in \mathbb{R}$ et $f \in C_{\text{lisse}}(\tilde{G})$. On définit

$$\nu_r(f) := \sup_{\tilde{x} \in \tilde{G}} \left(|f(\tilde{x})| \Xi(x)^{-1} (1 + \sigma(x))^r \right).$$

Soit $H \subset \tilde{G}$ un sous-groupe ouvert compact. Notons $\mathcal{C}_H$ l'espace des fonctions f bi-invariantes par H telles que $\nu_r(f)$ est fini pour tout $r \in \mathbb{R}$. Les semi-normes ν_r définissent une topologie sur $\mathcal{C}_H$. On pose $\mathcal{C}(\tilde{G}) = \bigcup_H \mathcal{C}_H$, muni de la topologie $\varinjlim$. C'est une algèbre pour le produit de convolution, qui est séparément continu. Les éléments de $\mathcal{C}(\tilde{G})$ s'appellent aussi les fonctions de Schwartz-Harish-Chandra. L'application $\tilde{G} \times \tilde{G} \times \mathcal{C}(\tilde{G}) \to \mathcal{C}(\tilde{G})$ définie par $(\tilde{x}, \tilde{y}, f) \mapsto \rho(\tilde{x})\lambda(\tilde{y})f$ est continue.

Si $(\pi, V) \in \Pi_{\text{temp}}(\tilde{G})$ et $f \in \mathcal{C}(\tilde{G})$, on peut définir l'opérateur $\pi(f)$ de sorte que

$$\langle \pi(f)v, \check{v} \rangle = \int_{\tilde{G}} f(\tilde{x}) \langle \pi(\tilde{x})v, \check{v} \rangle \, \mathrm{d}\tilde{x}, \qquad v \in V, \check{v} \in \check{V}.$$

Alors $f \mapsto \pi(f)$ est un homomorphisme d'algèbres. Pour tout f, l'opérateur $\pi(f)$ est de rang fini et on peut définir la fonctionnelle linéaire continue $f \mapsto \Theta_\pi(f) := \mathrm{tr}\, \pi(f)$, i.e. le caractère de π.

Citons deux variantes faibles des constructions précédentes. Soit $(\pi, V) \in \Pi_{\text{temp}}(\tilde{G})$. Soit $P = MU \in \mathcal{F}(M_0)$, alors le module de Jacquet admet une décomposition canonique.

$$(\pi_{\tilde{P}}, V_{\tilde{P}}) = (\pi^w_{\tilde{P}}, V^w_{\tilde{P}}) \oplus (\pi^+_{\tilde{P}}, V^+_{\tilde{P}})$$

où $V_{\tilde{P}}^{w}$ se constitue des V_χ avec $\mathrm{Re}\chi = 0$, et $V_{\tilde{P}}^{+}$ se constitue du reste. Alors $(\pi_{\tilde{P}}^{w}, V_{\tilde{P}}^{w})$ est tempérée, cf. [83, III.3.1]. La réciprocité de Frobenius demeure valable dans la catégorie des représentations tempérées admissibles si l'on remplace le foncteur $\pi \mapsto \pi_{\tilde{P}}$ par $\pi \mapsto \pi_{\tilde{P}}^{w}$.

On dispose de l'application terme constant faible le long de $\tilde{P}$, analogue de (IV.3)

$$\begin{gathered}\mathcal{A}^{w}(\tilde{G}) \to \mathcal{A}^{w}(\tilde{M}),\\ f \mapsto f_{\tilde{P}}^{w}.\end{gathered}$$

La fonction $f_{\tilde{P}}^{w}$ est caractérisée par la propriété suivante. Pour tout $\tilde{m} \in \tilde{M}$, on a

$$\lim_{\tilde{a} \xrightarrow{P} \infty} (\delta_P^{-1/2} f)(\tilde{m}\tilde{a}) - f_{\tilde{P}}^{w}(\tilde{m}\tilde{a}) = 0. \tag{IV.5}$$

où la limite signifie que $\tilde{a} \in \widetilde{A_M}^{\dagger}$ et $-H_M(a)$ tend vers l'infini dans un cône ouvert strictement contenu dans celui déterminé par Δ_P, cf [83, III.5].

On définit la fonction $f_{\tilde{P}}^{w,\mathrm{Ind}} : \tilde{G} \times \tilde{G} \to \mathcal{A}^{w}(\tilde{M})$ en posant

$$f_{\tilde{P}}^{w,\mathrm{Ind}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\rho(\tilde{x})\lambda(\tilde{y})f)_{\tilde{P}}^{w}. \tag{IV.6}$$

2.4 Opérateurs d'entrelacement

Le tore complexe $X(\tilde{G})$ opère sur $\Pi(\tilde{G})$ par $(\chi, \omega) \mapsto \omega \otimes \chi$, où $\chi \in X(\tilde{G})$ et $\omega \in \Pi(\tilde{G})$. Si χ est l'image de $\lambda \in \mathfrak{a}_{G,\mathbb{C}}^{*}$, on écrit aussi $\pi_\lambda := \pi \otimes \chi$. L'action induite du tore compact $\mathrm{Im}X(\tilde{G})$ préserve $\Pi_2(\tilde{G})$. Pour toute orbite $\mathcal{O}$ sous $\mathrm{Im}X(\tilde{G})$, on peut choisir un point base $\omega \in \mathcal{O}$ et munir $\mathcal{O}$ de la structure de variété C^∞ par l'application

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}X(\tilde{G})/\mathrm{Stab}_{\mathrm{Im}X(\tilde{G})}(\omega) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{O}.\\ \chi &\mapsto \omega \otimes \chi.\end{aligned}$$

Le stabilisateur $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Im}X(\tilde{G})}(\omega)$ est fini. De façon analogue, pour l'action de $X(\tilde{G})$ on définit l'orbite $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ qui est une variété algébrique complexe. Ainsi, on peut parler de fonctions C^∞, régulières ou rationnelles sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$. Ces notions ne dépendent pas du choix du point base ω.

Soient $M \in \mathcal{L}(M_0)$, $P = MU$ et $P' = MU'$ dans $\mathcal{P}(M)$. Soient (π, V) une représentation admissible de $\tilde{M}$, $f \in \mathcal{I}_{\tilde{P}}V$, $\tilde{x} \in \tilde{G}$. On dit que l'intégrale

$$(J_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi)f)(\tilde{x}) = \int_{(U\cap U')(F)\backslash U'(F)} f(u'\tilde{x})\,\mathrm{d}u'$$

est absolument convergente, égale à $v \in V$, si pour tout $\check{v} \in \check{V}$ l'intégrale

$$\int_{(U\cap U')(F)\backslash U'(F)} \langle f(u'\tilde{x}), \check{v}\rangle\,\mathrm{d}u'$$

est absolument convergente et égale à $\langle v, \check{v}\rangle$. Si $(J_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi)f)(\tilde{x})$ est absolument convergent pour tous f et $\tilde{x}$, on dit que $J_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi)$ est défini par des intégrales convergentes, et il définit un opérateur d'entrelacement $\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\pi) \to \mathcal{I}_{\tilde{P}'}(\pi)$.

On peut identifier $\mathcal{I}_{\tilde{P}}(V)$ à l'induction $\mathrm{Ind}_{\tilde{K}\cap\tilde{P}}^{\tilde{K}}(V)$ par restriction sur $\tilde{K}$. Lorsque π varie dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$, cet espace ne change pas. En introduisant les $\mathbb{C}[\tilde{M}/\tilde{M}^1]$-familles de représentations (cf. [83, I.5]), on peut parler des familles d'opérateurs $\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\pi) \to \mathcal{I}_{\tilde{P}'}(\pi)$ régulières ou rationnelles, où $\pi \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$, voir [83, IV.1].

Soient $P \in \mathcal{P}(M)$ et $\alpha \in \Sigma_P$, la coracine $\alpha^\vee \in \mathfrak{a}_M$ peut être définie en choisissant un parabolique minimal $P_0 \subset P$ et en restreignant $\alpha^\vee \in \Delta_0^\vee$ à $\mathfrak{a}_M$. On voit qu'elle est indépendante de P_0.

Théorème 2.4.1. *Soit (π, V) une représentation admissible de longueur finie de $\tilde{M}$. Alors il existe $R \in \mathbb{R}$ tel que si $\langle \mathrm{Re}(\chi), \alpha^\vee \rangle > R$ pour tout $\alpha \in \Sigma_P \cap \Sigma_{\bar{P}'}$, alors $J_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi \otimes \chi)$ est défini par des intégrales convergentes. L'opérateur $J_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi \otimes \chi)$ défini pour de tels $\pi \otimes \chi$ se prolonge en un opérateur rationnel sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$.*

Si (π, V) est tempérée, alors $J_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi \otimes \chi)$ est défini par des intégrales convergentes pourvu que $\langle \mathrm{Re}\chi, \alpha^\vee \rangle > 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma_P^{red} \cap \Sigma_{\bar{P}'}^{red}$.

Posons $d(P', P) := |\Sigma_{P'}^{\mathrm{red}} \cap \Sigma_{\bar{P}}^{\mathrm{red}}|$.

Proposition 2.4.2. *Soit (π, V) une représentation admissible de longueur finie de $\tilde{M}$. Alors*

1 $J_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi)^\vee = J_{\tilde{P}|\tilde{P}'}(\check{\pi})$, où $\vee$ signifie l'opérateur dual ;

2 $J_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi) = J_{\tilde{P}'|\tilde{P}''}(\pi) J_{\tilde{P}''|\tilde{P}}(\pi)$ si $P'' \in \mathcal{P}(M)$ et $d(P', P) = d(P', P'') + d(P'', P)$;

3 soit $P'' = M''U'' \in \mathcal{F}(M_0)$ contenant P et P', on fait les identifications

$$\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\pi) = \mathcal{I}_{\tilde{P}''} \mathcal{I}^{\tilde{M}''}_{\tilde{P} \cap \tilde{M}''}(\pi),$$
$$\mathcal{I}_{\tilde{P}'}(\pi) = \mathcal{I}_{\tilde{P}''} \mathcal{I}^{\tilde{M}''}_{\tilde{P}' \cap \tilde{M}''}(\pi),$$

alors $J^{\tilde{G}}_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi)$ est l'opérateur déduit de $J^{\tilde{M}''}_{\tilde{P}' \cap \tilde{M}''|\tilde{P} \cap \tilde{M}''}(\pi)$ par le foncteur $\mathcal{I}_{\tilde{P}''}(\cdot)$;

4 soient $w \in W_0^G$ et $\tilde{w} \in \tilde{K}$ un représentant, alors

$$J_{w\tilde{P}'|w\tilde{P}}(\tilde{w}\pi) = A(\tilde{w}) J_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi) A(\tilde{w})^{-1}$$

où $A(\tilde{w}) : \mathcal{I}_{\tilde{P}}(\pi) \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_{w\tilde{P}}(\tilde{w}\pi)$ (ou avec P' au lieu de P) est la translation $\varphi(\cdot) \mapsto \varphi(\tilde{w}^{-1}\cdot)$.

Supposons maintenant que $\pi \in \Pi_2(\tilde{M})$, son orbite sous $X(\tilde{M})$ est notée $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$. On dit qu'un élément dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ est $\tilde{G}$-régulier si son stabilisateur dans $W^G(M)$ est trivial. De tel éléments forment un ouvert de Zariski dense dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$.

Montrons qu'il existe un ouvert dense de Zariski dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ tel que pour tout π' dedans, $\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\pi')$ est irréductible pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$. En effet, il suffit de montrer que $\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\pi), \mathcal{I}_{\tilde{P}}(\pi)) = \mathbb{C}$ lorsque π est G-régulier, car $\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\pi)$ est unitaire de longueur finie. Or cela résulte immédiatement de la réciprocité de Frobenius et du lemme géométrique de Bernstein-Zelevinsky.

Grâce aux propriétés des opérateurs d'entrelacement, on montre (cf. [83, IV.3]) qu'il existe une fonction rationnelle j sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ telle que

$$J_{\tilde{P}|\tilde{\bar{P}}}(\pi') J_{\tilde{\bar{P}}|\tilde{P}}(\pi') = j(\pi'), \qquad \pi' \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}},\ P \in \mathcal{P}(M).$$

Notons Σ_M^{red} l'ensemble des racines réduites de A_M. À chaque $\alpha \in \Sigma_M^{\mathrm{red}}$ est associé un sous-groupe de Lévi M_α contenant M tel que $\Sigma_M^{M_\alpha,\mathrm{red}} = \{\alpha\}$. Notons j_α la fonction rationnelle définie en remplaçant $\tilde{G}$ par $\tilde{M}_\alpha$. On a alors

$$j = \prod_{\alpha \in \Sigma_M^{\mathrm{red}}/\pm} j_\alpha,$$

où α parcourt Σ_M^{red} à signe près. Définissons la fonction μ sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ par

$$\mu := j^{-1}. \tag{IV.7}$$

Pour $\alpha \in \Sigma_M^{\mathrm{red}}$, on note μ_α la fonction définie en remplaçant $\tilde{G}$ par $\tilde{M}_\alpha$.

Proposition 2.4.3. *La fonction μ est rationnelle sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$. Elle est régulière et réelle non négative sur $\mathcal{O}$. On a*

$$\mu = \prod_{\alpha \in \Sigma_M^{red}/\pm} \mu_\alpha.$$

De plus, μ est invariante par W_0^G et par passage à la contragrédiente $\pi \mapsto \check{\pi}$.

Remarque 2.4.4. Soit $\alpha \in \Delta_P$. On note r_α le plus petit rationnel positif tel que $r_\alpha \cdot \alpha^\vee \in \mathfrak{a}_{G,F}$. On note

$$\check{\alpha} := r_\alpha \alpha^\vee. \tag{IV.8}$$

Supposons choisi un point base π dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$. On pose $P' := \bar{P}$, alors les fonctions $\lambda \mapsto J_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_\lambda)$ et $\lambda \mapsto \mu(\pi_\lambda)$, où $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$, sont rationnelles en les variables $\{q^{-\langle \lambda, \check{\alpha} \rangle} : \alpha \in \Delta_P\}$. Cette propriété est implicite dans la preuve de la rationalité des opérateurs d'entrelacement [83, p.278].

2.5 Coefficients d'induites et la fonction c

Fixons toujours $M \in \mathcal{L}(M_0)$. Soient $P \in \mathcal{P}(M)$, $(\omega, E) \in \mathcal{O}$. Posons

$$\begin{aligned} L(\omega, \tilde{P}) &= \mathcal{I}_{\tilde{P} \times \tilde{P}}^{\tilde{G} \times \tilde{G}}(E \boxtimes \check{E}) \\ &= \mathcal{I}_{\tilde{P}}(E) \boxtimes \mathcal{I}_{\tilde{P}}(E)^\vee \hookrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{I}_{\tilde{P}} E). \end{aligned}$$

Le revêtement $\tilde{G} \times \tilde{G} \to G(F) \times G(F)$ n'appartient pas rigoureusement à notre classe car son noyau n'est pas cyclique, mais peu importe.

Pour $v \otimes \check{v} \in L(\omega, \tilde{P})$, on peut définir le coefficient

$$E_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}(v \otimes \check{v}) : \tilde{x} \mapsto \langle \omega(\tilde{x}) v, \check{v} \rangle.$$

Ceci induit une application linéaire $E_{\tilde{P}}^{\tilde{G}} : L(\omega, \tilde{P}) \to C_{\mathrm{lisse}}(\tilde{G})$. Plus généralement, soient $P' = M'U' \in \mathcal{F}(M_0)$ tel que $M' \supset M$ et $P \in \mathcal{P}^{M'}(M)$, posons

$$E_{\tilde{P}}^{\tilde{P}'} : \mathcal{I}_{\tilde{P}' \times \tilde{\bar{P}}'}^{\tilde{G} \times \tilde{G}} L^{\tilde{M}'}(\omega, \tilde{P}) \to \mathcal{I}_{\tilde{P}' \times \tilde{\bar{P}}'}^{\tilde{G} \times \tilde{G}} C_{\mathrm{lisse}}(\tilde{M}')$$

l'application qui se déduit de $E_{\tilde{P}}^{\tilde{M}'}$ par fonctorialité.

Soient $M, M' \in \mathcal{L}(M_0)$. Posons

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(M'|G|M) &:= \{w \in W_0^G : wM \subset M'\}, \\ \mathcal{W}(M|G) &:= \mathcal{W}(M|G|M), \\ W(M'|G|M) &:= W_0^{M'} \backslash \mathcal{W}(M'|G|M). \end{aligned}$$

Ces ensembles sont éventuellement vides. Ils opèrent sur des paraboliques par conjugaison. Dans ce qui suit il convient de fixer des représentants dans $\tilde{K}$ de ces ensembles. Néanmoins, les résultats ultérieurs seront indépendants des choix. Soient $s \in \tilde{K}$ un représentant d'un élément dans W_0^G et ω une représentation de $\tilde{M}$, on note $s\omega$ la représentation de $s\tilde{M}$ obtenue par transport de structure. Elle est indépendante du choix du représentant à isomorphisme près.

Pour $P \in \mathcal{P}(M)$, $s \in \mathcal{W}(M'|G|M)$, définissons

$$P_s := (M' \cap sP)U',$$
$$P_s^\diamond := (M' \cap sP)\bar{U}'$$

Notons $\lambda(s) : \mathcal{I}_{\tilde{P}}(\omega) \mapsto \mathcal{I}_{s\tilde{P}}(s\omega)$ la translation à gauche par s en se rappelant que $\tilde{I}_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}(\omega)$ est un espace de fonctions sur $\tilde{G}$. Vu les identifications

$$\mathcal{I}_{\tilde{P}'}\mathcal{I}_{\tilde{M}' \cap s\tilde{P}}^{\tilde{M}'} = \mathcal{I}_{\tilde{P}_s},$$
$$\mathcal{I}_{\tilde{\bar{P}}'}\mathcal{I}_{\tilde{M}' \cap s\tilde{P}}^{\tilde{M}'} = \mathcal{I}_{\tilde{P}_s^\diamond},$$

on définit

$$c_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(s,\omega) : L(\omega,\tilde{P}) \to \mathcal{I}_{\tilde{P}' \times \tilde{\bar{P}}'}^{\tilde{G}\times\tilde{G}} L^{\tilde{M}'}(s\omega, \tilde{M}' \cap s\tilde{P}),$$
$$v \otimes \check{v} \mapsto \gamma(G|M')^{-1}\left(J_{\tilde{P}_s|s\tilde{P}}(s\omega)\lambda(s)v \otimes J_{\tilde{P}_s^\diamond|s\tilde{P}}(s\check{\omega})\lambda(s)\check{v}\right).$$

Théorème 2.5.1. *Fixons $P \in \mathcal{P}(M)$, $P' \in \mathcal{P}(M')$ et $\mathcal{O}$ une* $\mathrm{Im}X(\tilde{M})$*-orbite contenant une représentation de carré intégrable modulo le centre. Soient $\omega \in \mathcal{O}$ un élément $\tilde{G}$-régulier et $\psi \in L(\omega,\tilde{P})$, alors*

$$(E_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}\psi)_{\tilde{P}'}^{\mathrm{Ind},w} = \sum_{s \in W(M'|G|M)} E_{\tilde{M}\cap s\tilde{P}}^{\tilde{P}'}(c_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(s,\omega)\psi).$$

Il faut aussi des fonctions auxiliaires. Soient $M \in \mathcal{L}(M_0)$, $\omega \in \mathcal{O}$ une $\mathrm{Im}X(\tilde{M})$-orbite contenant une représentation de carré intégrable modulo le centre, $P, P' \in \mathcal{P}(M)$ et $s \in \mathcal{W}(G|M)$. Définissons

$${}^\circ c_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(s,\omega) := c_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(1,s\omega)^{-1}c_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(s,\omega) \in \mathrm{Hom}_{\tilde{G}\times\tilde{G}}(L(\omega,\tilde{P}), L(s\omega,\tilde{P})).$$

Proposition 2.5.2. *L'application $\omega \mapsto {}^\circ c_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(s,\omega)$ est régulière sur $\mathcal{O}$. Pour tout $\omega \in \mathcal{O}$, l'opérateur ${}^\circ c_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(s,\omega)$ est unitaire. On a*

$$E_{\tilde{P}'}^{\tilde{G}}({}^\circ c_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(s,\omega)\psi) = E_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}(\psi)$$

pour tout $\psi \in L(\omega,\tilde{P})$.

2.6 Énoncé de la formule de Plancherel

Considérons un parabolique $P = MU \in \mathcal{F}(M_0)$. Soit $\mathcal{O}$ une $\mathrm{Im}X(\tilde{M})$-orbite rencontrant $\Pi_2(\tilde{M})$. Soient $(\omega, E), (\omega', E') \in \mathcal{O}$ tels que $\omega \simeq \omega'$. Alors les espaces $\mathcal{I}_{\tilde{P}\times\tilde{P}}^{\tilde{G}\times\tilde{G}}(E \boxtimes \check{E})$ et $\mathcal{I}_{\tilde{P}\times\tilde{P}}^{\tilde{G}\times\tilde{G}}(E' \boxtimes \check{E}')$ sont canoniquement isomorphes : l'isomorphisme étant induit d'un isomorphisme $\omega \xrightarrow{\sim} \omega'$ quelconque et de son dual.

Définissons $C^\infty(\mathcal{O},\tilde{P})$ comme l'espace des fonctions $\psi : \omega \to \psi_\omega \in L(\omega,\tilde{P})$ respectant les isomorphismes ci-dessus, telles que ψ est C^∞ sur $\mathcal{O}$. Rappelons que l'espace de $L(\omega,\tilde{P})$ ne change pas lorsque ω varie dans $\mathcal{O}$, pourvu que l'on le réalise comme un espace de fonctions sur $\tilde{K} \times \tilde{K}$; notons-le $L_{\tilde{K}}(\mathcal{O})$. Si H est un sous-groupe ouvert compact de $\tilde{G}$, $L_{\tilde{K}}(\mathcal{O})^{H\times H}$ est de dimension finie. Comme $\mathrm{Im}X(\tilde{M})$ est compact, $C^\infty(\mathrm{Im}X(\tilde{M}))$ est muni de la famille des semi-normes $\|\varphi\|_D := \sup|D\varphi|$, où D parcourt les opérateurs différentiels sur $\mathrm{Im}X(\tilde{M})$. Donc l'espace

$$C^\infty(\mathrm{Im}X(\tilde{M})) \otimes L_{\tilde{K}}(\mathcal{O})^{H\times H}$$

est muni d'une topologie canonique. Il contient $C^\infty(\mathcal{O},\tilde{P})^{H\times H}$ comme un sous-espace fermé. On munit $C^\infty(\mathcal{O},\tilde{P})$ de la topologie $\varinjlim$ en variant H.

Proposition 2.6.1. *Soit $\psi \in C^\infty(\mathcal{O},\tilde{P})$, alors*

1 pour tout $\tilde{x} \in \tilde{G}$, la fonction $\omega \mapsto (E_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}\psi_\omega)(\tilde{x})$ est C^∞ sur $\mathcal{O}$;

2 pour tout $P' = M'U' \in \mathcal{F}(M_0)$ et $\tilde{m}' \in \tilde{M}'$, les fonctions $\omega \mapsto (E_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}\psi_\omega)_{\tilde{P}'}(\tilde{m}')$ et $\omega \mapsto (E_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}\psi_\omega)_{\tilde{P}'}^{w}(\tilde{m}')$ sont C^∞ sur $\mathcal{O}$.

C'est donc loisible de poser pour $\psi \in C^\infty(\mathcal{O},\tilde{P})$,

$$f_\psi(\tilde{x}) = \int_{\mathcal{O}} \mu(\omega)(E_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}\psi_\omega)(\tilde{x})\,\mathrm{d}\omega, \qquad \tilde{x} \in \tilde{G},$$

où $\mathcal{O}$ est muni de la mesure telle que $\mathrm{Im}X(\tilde{M}) \to \mathcal{O}$ préserve localement les mesures.

Proposition 2.6.2. *L'application $\psi \mapsto f_\psi$ est une application linéaire continue de $C^\infty(\mathcal{O},\tilde{P})$ sur $\mathcal{C}(\tilde{G})$.*

On fait varier les $(\mathcal{O},\tilde{P})$. Notons Θ l'ensemble des paires $(\mathcal{O},P)$ où $P = MU \in \mathcal{F}(M_0)$ et $\mathcal{O}$ est comme ci-dessus. Posons $C^\infty(\Theta) := \bigoplus_{(\mathcal{O},P)\in\Theta} C^\infty(\mathcal{O},\tilde{P})$. On écrit un élément ψ de $C^\infty(\Theta)$ sous la forme $\psi = (\psi[\mathcal{O},P])_{\mathcal{O},P}$. On définit l'application $\kappa : C^\infty(\Theta) \to \mathcal{C}(\tilde{G})$ par

$$\kappa(\psi) = \sum_{(\mathcal{O},P)\in\Theta} \gamma(G|M)|W_0^M||W_0^G|^{-1}|\mathcal{P}(M)|^{-1} f_{\psi[\mathcal{O},P]}.$$

On note $C^\infty(\Theta)^{\mathrm{inv}}$ le sous-espace de $C^\infty(\Theta)$ des éléments ψ tels que

$$\psi[s\mathcal{O},P']_{s\omega} = {}^\circ c_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(s,\omega)\psi[\mathcal{O},P]_\omega$$

pour tout $(\mathcal{O},P) \in \Theta$ et tout P'. On définit la projection $\mathrm{pr}^{\mathrm{inv}} : C^\infty(\Theta) \to C^\infty(\Theta)^{\mathrm{inv}}$ par

$$(\mathrm{pr}^{\mathrm{inv}}\psi)[\mathcal{O},P]_\omega = |W_0^G|^{-1}|\mathcal{P}(M)|^{-1} \sum_{s\in W_0^G}\sum_{P'\in\mathcal{P}(sM)} {}^\circ c_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(s,\omega)^{-1}\psi[s\mathcal{O},P']_{s\omega}.$$

Un fait important est que κ se factorise par $\mathrm{pr}^{\mathrm{inv}}$; on utilise toujours le symbole κ pour l'application $C^\infty(\Theta)^{\mathrm{inv}} \to \mathcal{C}(\tilde{G})$.

L'étape suivante est de définir l'inverse de κ. Soit $f \in \mathcal{C}(\tilde{G})$, notons $\check{f}$ la fonction $\tilde{x} \mapsto f(\tilde{x}^{-1})$. Alors $\check{f} \in \mathcal{C}(\tilde{G})$. Soient $M \in \mathcal{L}(M_0)$ et $P \in \mathcal{P}(M)$. Soit $(\omega,E) \in \Pi_2(\tilde{M})$, notons $(\pi,V) := \mathcal{I}_{\tilde{P}}(\omega,E)$ et

$$\hat{f}(\omega,\tilde{P}) := d(\omega)\pi(\check{f}) \in L(\omega,\tilde{P}).$$

Soit $(\mathcal{O},P) \in \Theta$, on obtient ainsi une fonction $\psi_f[\mathcal{O},P]$ sur $\mathcal{O}$ par $\psi_f[\mathcal{O},P]_\omega = \hat{f}(\omega,P)$, pour tout $\omega \in \mathcal{O}$.

Proposition 2.6.3. *Pour tout $(\mathcal{O},P) \in \Theta$, l'application $f \mapsto \psi_f[\mathcal{O},P]$ définit une application linéaire continue $\mathcal{C}(\tilde{G}) \to C^\infty(\mathcal{O},\tilde{P})$.*

On arrive à l'énoncé de la formule de Plancherel.

Théorème 2.6.4. *L'application $f \mapsto \psi_f[\mathcal{O}, P]$ induit une application $\mathcal{C}(\tilde{G}) \to C^\infty(\Theta)^{\mathrm{inv}}$. Elle est l'inverse bilatéral de κ. En particulier, κ est un isomorphisme.*

Pour $(\mathcal{O}, P) \in \Theta$ et $\omega \in \mathcal{O}$, on note $\Theta_\omega^{\tilde{G}}$ le caractère de $\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\omega)$.

Corollaire 2.6.5. *Soit $f \in \mathcal{C}(\tilde{G})$, alors*

$$\begin{aligned} f(1) &= \sum_{(\mathcal{O},P)\in\Theta} \gamma(G|M)|W_0^M||W_0^G|^{-1}|\mathcal{P}(M)|^{-1} \int_{\mathcal{O}} d(\omega)\mu(\omega)\Theta_\omega^{\tilde{G}}(\check{f})\,\mathrm{d}\omega, \\ &= \sum_{M\in\mathcal{L}(M_0)} \gamma(G|M)|W_0^M||W_0^G|^{-1} \int_{\Pi_2(\tilde{M})} d(\omega)\mu(\omega)\Theta_\omega^{\tilde{G}}(\check{f})\,\mathrm{d}\omega. \end{aligned}$$

Remarque 2.6.6. Afin de se débarrasser de tout souci de mesures, vérifions la dépendance de ladite formule sur des divers choix. Fixons $(\mathcal{O}, P) \in \Theta$ avec $P = MU$.

- Le degré formel $d(\omega)$ pour $\omega \in \mathcal{O}$ est inversement proportionnelle à la mesure $\mathrm{d}m$ sur $\tilde{M}$.
- D'après la définition des opérateur d'entrelacement, la fonction μ est proportionnelle à $(\mathrm{d}\bar{u}\,\mathrm{d}u)^{-1}$ où $\mathrm{d}u$ (resp. $\mathrm{d}\bar{u}$) désigne la mesure sur $U(F)$ (resp. $\bar{U}(F)$).
- $\Theta_\omega^{\tilde{G}}(f)$ est proportionnel à la mesure $\mathrm{d}g$ sur $\tilde{G}$.
- $\gamma(G|M)$ est proportionnel à $\mathrm{d}\bar{u}\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}u(\mathrm{d}g)^{-1}$ pourvu que $\gamma(G|M)$ soit défini par la formule (IV.2) dans §2.1.
- Il n'y a aucune dépendance du choix de $A_M(F)^\dagger$.

Par conséquent, le produit indexé par $(\mathcal{O}, P)$ dans le Corollaire 2.6.5 est indépendant de tout choix. Cela nous permettra de varier certains choix de mesures dans §5.

3 Normalisation des opérateurs d'entrelacement

On se place toujours dans le cadre d'un revêtement local

$$1 \to \mu_m \to \tilde{G} \xrightarrow{\mathbf{p}} G(F) \to 1,$$

où F est un corps local et G est un F-groupe réductif connexe. On fixe un sous-groupe de Lévi minimal M_0 et un sous-groupe compact maximal spécial K de $G(F)$ en bonne position relativement à M_0. On a les ensembles $\Pi(\tilde{M})$, $\Pi_{\mathrm{temp}}(\tilde{M})$, $\Pi_2(\tilde{M})$ de classes d'équivalence des représentations irréductibles de $\tilde{M}$; ils sont défini dans §2 lorsque F est non archimédien, dans le cas F archimédien leurs définitions sont bien connues. En rajoutant l'équivariance sous μ_m, on définit leurs variantes spécifiques $\Pi_-(\tilde{M})$, $\Pi_{\mathrm{temp},-}(\tilde{M})$, $\Pi_{2,-}(\tilde{M})$, etc.

Nous avons précisé les choix de mesures dans le cas non archimédien. Pour le cas archimédien, nous suivons le choix fait dans [13] qui sera rappelé dans §3.2.

3.1 Facteurs normalisants

Soit $M \in \mathcal{L}(M_0)$. Rappelons que, pour tout corps local F, on peut définir le groupe $X(\tilde{M}) := \mathrm{Hom}(\tilde{M}/\tilde{M}^1, \mathbb{C}^\times)$ et son sous-groupe $\mathrm{Im}X(\tilde{M})$. Ces groupes opèrent sur $\Pi(\tilde{M})$. Les $X(\tilde{M})$-orbites admettent une structure de variété complexe algébrique via la surjection canonique $\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^* \twoheadrightarrow X(\tilde{M})$. Soit $\pi \in \tilde{M}$, l'action de $X(\tilde{M})$ s'écrit sous la forme habituelle $(\pi, \chi) \mapsto \pi \otimes \chi$ avec $\chi \in X(\tilde{M})$, ou $(\pi, \lambda) \mapsto \pi_\lambda$ avec $\lambda \in \mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*$. Si F est archimédien, l'action de $\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*$ est libre et tout élément de $\Pi_2(\tilde{M})$ admet une écriture unique π_λ avec $\pi \in \Pi_2(\tilde{M}^1)$ et $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$.

Définition 3.1.1 (cf. [13, §2] et [16, §2])**.** Soient $M \in \mathcal{L}(M_0)$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ une $X(\tilde{M})$-orbite dans $\Pi(\tilde{M})$. On dit qu'une famille de fonctions méromorphes sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$

$$r^{\tilde{L}}_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi), \quad L \in \mathcal{L}(M),\ P, P' \in \mathcal{P}^L(M),\ \pi \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$$

est une famille de facteurs normalisants si elle satisfait aux conditions suivantes. Posons d'abord

$$R^{\tilde{L}}_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi) := r^{\tilde{L}}_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi)^{-1} J^{\tilde{L}}_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi).$$

(**R1**) Pour tous $P, P', P'' \in \mathcal{P}^L(M)$, on a $R^{\tilde{L}}_{\tilde{P}''|\tilde{P}}(\pi) = R^{\tilde{L}}_{\tilde{P}''|\tilde{P}'}(\pi) R^{\tilde{L}}_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi)$.

(**R2**) Si π est unitaire, alors

$$R^{\tilde{L}}_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_\lambda)^* = R^{\tilde{L}}_{\tilde{P}|\tilde{P}'}(\pi_{-\bar{\lambda}}), \qquad \lambda \in \mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}.$$

En particulier, $R^{\tilde{L}}_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi)$ est un opérateur unitaire.

(**R3**) Cette famille est compatible au transport de structure par le groupe de Weyl, au sens suivant

$$R^{\tilde{L}}_{w\tilde{P}'|w\tilde{P}}(\tilde{w}\pi) = A(\tilde{w}) R^{\tilde{L}}_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi) A(\tilde{w})^{-1}$$

où $w \in W_0^L$ et $\tilde{w} \in \tilde{K}$ est un représentant, cf. la Proposition 2.4.2.

(**R4**) On a

$$r^{\tilde{L}}_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi) = \prod_{\alpha \in (\Sigma^L_{P'})^{\mathrm{red}} \cap (\Sigma^L_{\bar{P}})^{\mathrm{red}}} r^{\tilde{M}_\alpha}_{\tilde{\bar{P}}_\alpha|\tilde{P}_\alpha}(\pi),$$

où $P_\alpha := P \cap M_\alpha$.

(**R5**) Soit $P'' = M''U'' \in \mathcal{F}^L(M_0)$ contenant P et P', alors $R^{\tilde{L}}_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi)$ est l'opérateur déduit de $R^{\tilde{M}''}_{\tilde{P}'\cap\tilde{M}''|\tilde{P}\cap\tilde{M}''}(\pi)$ par le foncteur $\mathcal{I}^{\tilde{L}}_{\tilde{P}''}(\cdot)$.

(**R6**) Si F est archimédien, les coefficients $\tilde{K}\cap\tilde{L}$-finis de $R^{\tilde{L}}_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_\lambda)$ sont des fonctions rationnelles en $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$ où $\alpha \in \Delta^L_P$. Si F est non archimédien, notons q le cardinal du corps résiduel de q, alors $r^{\tilde{L}}_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_\lambda)$ est une fonction rationnelle en les variables $q^{-\langle \lambda, \check{\alpha} \rangle}$, où $\alpha \in \Delta^L_P$ et $\check{\alpha} \in \mathbb{Q}_{>0} \cdot \alpha^\vee$ est défini dans (IV.8) ; donc les coefficients de $R^{\tilde{L}}_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_\lambda)$ le sont aussi.

(**R7**) Si π est tempérée, $\lambda \mapsto r_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_\lambda)$ n'a ni zéros ni pôles lorsque $\langle \mathrm{Re}\lambda, \alpha^\vee \rangle > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta^L_P$.

(**R8**) Si F est archimédien, $\pi \in \Pi_{\mathrm{temp}}(\tilde{M}^1)$ et $\lambda \in i\mathfrak{a}^*_M$, on pose

$$q^{\tilde{L}}_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_\lambda) := \prod_{\alpha \in (\Sigma^L_{P'})^{\mathrm{red}} \cap (\Sigma^L_{\bar{P}})^{\mathrm{red}}} \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle^{n_\alpha}$$

où n_α est l'ordre du pôle de $\lambda \mapsto r_\alpha(\pi_\lambda)$ en $\lambda = 0$. Alors pour tout opérateur différentiel invariant D sur $i\mathfrak{a}^*_M$, il existe des constantes $C, N > 0$ telles que

$$|D(q^{\tilde{L}}_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_\lambda) r^{\tilde{L}}_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_\lambda))^{-1}| \leq C(1 + \|\mu_\pi + \lambda\|)^N$$

pour tout π et tout λ, où nous adoptons les notations
– $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$;
– $W^M_{\mathbb{C}}$ le groupe de Weyl complexe de M ;

– $\mu_\pi \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*/W_{\mathbb{C}}^M$ est le caractère infinitesimal de π ;
– $\|\cdot\|$ une norme hermitienne $W_{\mathbb{C}}^M$-invariante sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ telle que

$$\|\mu_{\pi_\lambda}\|^2 = \|\mu_\pi + \lambda\|^2 = \|\mu_\pi\|^2 + \|\lambda\|^2, \quad \forall \lambda \in i\mathfrak{a}_M^*.$$

La condition (**R7**) interviendra dans l'étude des quotients de Langlands. Dans cet article nous ferons usage d'une notion moins stricte.

Définition 3.1.2. On dit qu'une famille de fonctions méromorphes sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$

$$r^{\tilde{L}}_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi), \quad L \in \mathcal{L}(M),\ P, P' \in \mathcal{P}^L(M),\ \pi \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$$

est une famille de facteurs normalisants faible si elle vérifie toutes les conditions de la Définition 3.1.1 sauf (**R7**). Deux familles de facteurs normalisants faibles r, $r^\vee$ sont dites complémentaires si

$$r^{\tilde{L},\vee}_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi) = r^{\tilde{L}}_{\tilde{P}|\tilde{P}'}(\pi) \tag{IV.9}$$

pour tous P, P' et L.

Remarque 3.1.3. Étant donnée une famille de facteurs normalisants faible r, on peut toujours définir une famille complémentaire $r^\vee$ par (IV.9). Mais $r^\vee$ et r ne peuvent pas vérifier à la fois (**R7**).

La construction des facteurs normalisants se réduit au cas $L = G$, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}} \cap \Pi_2(\tilde{M}) \neq \emptyset$ et P, P' des paraboliques propres maximaux, au sens suivant.

Proposition 3.1.4. *Supposons choisie des familles de facteurs normalisants $r^{\tilde{L}}_{\tilde{Q}'|\tilde{Q}}(\cdot)$ pour tout $L \in \mathcal{L}(M_0)$, $L \neq G$ et Q, Q' quelconques, qui sont sont compatibles au transport de structure par W_0^G.*

*Soient $r_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\cdot)$ des fonctions méromorphes sur les $X(\tilde{M})$-orbites rencontrant $\Pi_2(\tilde{M})$ vérifiant toutes les conditions de la Définition 3.1.1 sauf (**R4**) et (**R5**), où $M \in \mathcal{L}(M_0)$ est standard propre maximal, $P, P' \in \mathcal{P}(M)$. Alors les facteurs $r^{\tilde{L}}_{\tilde{Q}'|\tilde{Q}}(\cdot)$ et $r_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\cdot)$ ci-dessus font partie d'une famille de facteurs normalisants pour $\tilde{G}$, dont la construction est canonique.*

Démonstration. C'est exactement ce qu'Arthur fait dans [13, §2]. En résumé, grâce à (**R5**), la condition (**R7**) et un critère simple de l'unitarisabilité des quotients de Langlands [44, Theorem 7], qui est valable pour les revêtements sur tout corps local, permettent de se ramener au cas tempérée. On se ramène finalement au cas de représentations de carré intégrable modulo le centre d'après le fait qu'une représentation tempérée est un constituant d'une induite parabolique normalisée d'une représentation L^2 modulo le centre. La compatibilité au transport de structure est garantie par (**R3**). À chaque étape, on peut supposer M propre maximal grâce à (**R4**). La préservation de (**R8**) est claire. □

Remarque 3.1.5. Pour les applications à la formule des trace, on considérera le cadre où F est un corps de nombres, $\mathbf{p} : \tilde{G} \to G(\mathbb{A})$ un revêtement adélique, S un ensemble fini de places de F et $\tilde{G}_S \to G(F_S)$ la fibre de $\mathbf{p}$ au-dessus de $G(F_S)$. On peut toujours considérer les normalisations des opérateurs d'entrelacement dans ce cadre, cf. [13, §1]. Les résultats découlent sans peine du cas F local en prenant

$$\pi = \bigotimes_{v \in S} \pi_v,$$

$$r_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi) = \prod_{v \in S} r_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_v),$$

$$R_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi) = \bigotimes_{v \in S} R_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_v).$$

Cf. [13, p.31].

3.2 Le cas archimédien

Conservons les conventions de §3.2. Nous donnerons une construction canonique de facteurs normalisants dans le cas archimédien à la Arthur [13] avec formules explicites. C'est loisible de supposer que $F = \mathbb{R}$.

Soit $\mathfrak{r}$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie. On adopte la convention $\mathfrak{r}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{r}(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Notons θ l'involution de Cartan associé à K. Prenons une forme bilinéaire $G(\mathbb{R})$-invariante B sur $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ telle que $X \mapsto -B(X, \theta X)$ est positive définie. Si T est un $\mathbb{R}$-tore maximal θ-stable de M, alors B est non dégénérée sur $\mathfrak{t}(\mathbb{R})$. Prenons T un $\mathbb{R}$-tore fondamental dans M anisotrope modulo A_M, ce qui existe car $\Pi_2(\tilde{M}) \neq \emptyset$. Le groupe $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{\mathrm{id}, \sigma\}$ opère sur $X_*(T_{\mathbb{C}})$, d'où une action sur $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$.

On se ramène au cas où M, P, P', π sont comme dans la Proposition 3.1.4, en particulier $P' = \bar{P}$. Or la notation P' sera conservée pour des raisons de typographie.

On pose

$$\alpha_{P'|P} := \prod_{\alpha} \sqrt{\frac{1}{2} B(\alpha, \alpha)}$$

où α parcourt les racines de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ dont les restrictions sur $\mathfrak{a}_M$ appartiennent à $\Sigma_{P'}$. On munit $(\mathfrak{u}_{P'} \cap \mathfrak{u}_P)(\mathbb{R})$ de la mesure induite par la forme positive définie $X \mapsto -B(X, \theta X)$; on choisit la mesure de Haar sur $(U_{P'} \cap U_P)(\mathbb{R})$ de sorte que

$$\int_{(U_{P'} \cap U_P)(\mathbb{R})} \phi(u) \,\mathrm{d}u = \alpha_{P'|P} \int_{(\mathfrak{u}_{P'} \cap \mathfrak{u}_P)(\mathbb{R})} \phi(\exp X) \,\mathrm{d}X, \quad \forall \phi \in C_c((U_{P'} \cap U_P)(\mathbb{R})).$$

On montre que cette mesure ne dépend pas du choix de B.

Notons ρ_M la demi-somme des racines positives de $(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ par rapport à une base fixée. On prend $\mathrm{d}\chi \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$ tel que $\mathrm{d}\chi + \rho_M$ est un représentant du caractère infinitesimal de π. On peut prendre $\lambda_0 \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$, $\mu \in i\mathfrak{t}^*$ tels que

$$\langle \mathrm{d}\chi, H \rangle = \langle \lambda_0, H - \sigma H \rangle + \frac{1}{2} \langle \mu - \rho_M, H + \sigma H \rangle, \qquad H \in \mathfrak{t}(\mathbb{C}),$$

Cf. [13, (A.1)]. Ici λ_0 est pour l'essentiel la dérivée du caractère central de π, et μ est le paramètre de Harish-Chandra. D'après Harish-Chandra, c'est connu que $\mathrm{d}\chi$ se relève en un caractère de $\tilde{T}$; notons-le χ.

Notons $\Sigma_P(G, T)$ l'ensemble des racines de (G, T) dont les restrictions sur $\mathfrak{a}_M$ appartiennent à Σ_P et étudions les $\{\mathrm{id}, \sigma\}$-orbites de $\Sigma_P(G, T)$. Supposons d'abord que α est une racine réelle dans $\Sigma_P(G, T)$. Il y a au plus une telle racine. Rappelons la définition de l'élément $\gamma \in \tilde{T}$ dans [39, §30, Lemma 2]. On note H_α l'élément dans $\mathfrak{t}(\mathbb{R})$ tel que $B(H, H_\alpha) = \langle \alpha, H \rangle$ pour tout $H \in \mathfrak{t}(\mathbb{R})$, et on note $H' := 2\langle \alpha, H_\alpha \rangle^{-1} H_\alpha$. Prenons $X' \in \mathfrak{g}_\alpha(\mathbb{R})$ et $Y' \in \mathfrak{g}_{-\alpha}(\mathbb{R})$ tels que (H', X', Y') est un $\mathfrak{sl}_2$-triplet, c'est-à-dire

$$[H', X'] = 2X', \ [H', Y'] = -2Y', \ [X', Y'] = H'.$$

Posons $\gamma := \exp(\pi(X' - Y')) \in \tilde{T}$. Le triplet (H', X', Y') induit un homomorphisme $\Phi_\alpha : \widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) \to \tilde{G}$, où $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ est un revêtement de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Prenons $k \in \{0, \ldots, 2m - 1\}$ tel que

$$(-1)^{\langle \rho_P, \alpha^\vee \rangle} \chi(\gamma) = e^{\frac{\pi k}{mi}}.$$

D'autre part, si α est une racine complexe, en remplaçant α par $\sigma\alpha$ si besoin est, on suppose toujours que

$$\langle \sigma\mu - \mu, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}_{\leq 0}.$$

Définissons le facteur normalisant $r_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi)$. S'il existe une racine réelle dans $\Sigma_P(G,T)$, on la notera α_0 et on écrira $\exists\alpha_0$; dans ce cas-là on définit χ, γ et k d'après ce qui précède. Posons

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathbb{C}}(z) &:= 2(2\pi)^{-z}\Gamma(z), \\ G(z) &:= \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma(\frac{z}{2})\Gamma(\frac{z}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{z}{2}+\frac{k}{2m})\Gamma(\frac{z}{2}+1-\frac{k}{2m})}, \quad \text{si } \exists\alpha_0; \end{aligned}$$

(et désolé pour l'abus du symbole π). Pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}$ on définit

$$\text{(IV.10)} \qquad r_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_\lambda) := \begin{cases} \prod_{\substack{\alpha \in \Sigma_P(G,T) \\ \bmod \{\mathrm{id},\sigma\} \\ \alpha \neq \alpha_0}} \dfrac{\Gamma_{\mathbb{C}}(\langle \mu+\lambda, \alpha^\vee\rangle)}{\Gamma_{\mathbb{C}}(\langle \mu+\lambda, \alpha^\vee\rangle + 1)} \cdot G(\langle \mu+\lambda, \alpha_0^\vee\rangle), & \text{si } \exists\alpha_0, \\ \prod_{\substack{\alpha \in \Sigma_P(G,T) \\ \bmod \{\mathrm{id},\sigma\}}} \dfrac{\Gamma_{\mathbb{C}}(\langle \mu+\lambda, \alpha^\vee\rangle)}{\Gamma_{\mathbb{C}}(\langle \mu+\lambda, \alpha^\vee\rangle + 1)}, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où les représentants α des $\{\mathrm{id},\sigma\}$-orbites dans $\Sigma_P(G,T)$ sont choisis comme précédemment. C'est méromorphe en λ, on définit ainsi les opérateurs $R_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_\lambda) := r_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_\lambda)^{-1} J_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_\lambda)$ qui sont méromorphes en λ.

Théorème 3.2.1. *Les facteurs $r_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_\lambda)$ font partie d'une famille de facteurs normalisants dont la construction est canonique.*

Démonstration. On utilise toujours la Proposition 3.1.4. On note $\Sigma_c(G,T) := \Sigma_P(G,T) \setminus \{\alpha_0\}$ si $\exists\alpha_0$. C'est une conséquence de la formule explicite de la fonction μ [39, §36] (voir le récit dans [13, Proposition 3.1 + Lemma A.1]), qui est aussi valable pour revêtements, que

$$\mu(\pi) = \begin{cases} \gamma^2_{P'|P}\alpha^2_{P'|P}(2\pi)^{-\dim U_P}\frac{\mu_0(\chi)}{\pi}|\prod_{\alpha\in\Sigma_c(G,T)}\langle\mu,\alpha^\vee\rangle|, & \text{si } \exists\alpha_0, \\ \gamma^2_{P'|P}\alpha^2_{P'|P}(2\pi)^{-\dim U_P}|\prod_{\alpha\in\Sigma_P(G,T)}\langle\mu,\alpha^\vee\rangle|, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\mu_0(\chi)$ est l'expression

$$\frac{\pi\langle\mu,\alpha_0^\vee\rangle}{i} \cdot \sinh\left(\frac{\pi\langle\mu,\alpha_0^\vee\rangle}{i}\right) \cdot \left[\cosh\left(\frac{\pi\langle\mu,\alpha_0^\vee\rangle}{i}\right) - \frac{1}{2}(-1)^{\langle\rho_P,\alpha_0^\vee\rangle}(\chi(\gamma)+\chi(\gamma)^{-1})\right]^{-1}.$$

Avec le choix de mesures dans [13, §3], on a $J_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi)^* J_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi) = \gamma^2_{P'|P}\alpha^2_{P'|P}\mu(\pi)^{-1}$ et pour démontrer (**R1**) il faut montrer l'égalité $J_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi)^* J_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi) = |r_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi)|^2$; le cas général où π est remplacé par π_λ ($\lambda \in \mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$) en découlera par prolongation méromorphe.

Supposons d'abord que $\exists\alpha_0$. Remarquons que

$$\frac{1}{2}(-1)^{\langle\rho_P,\alpha_0^\vee\rangle}(\chi(\gamma)+\chi(\gamma)^{-1}) = \cos\left(\frac{\pi k}{m}\right).$$

Notons $v := \langle\mu,\alpha_0^\vee\rangle \in i\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \mu_0(\chi)^{-1} &= \frac{\cosh(\frac{\pi v}{i}) - \cos\left(\frac{\pi k}{m}\right)}{\frac{\pi v}{i}\sinh(\frac{\pi v}{i})} = \frac{\cos(\pi v) - \cos\left(\frac{\pi k}{m}\right)}{\frac{\pi v}{i}\sinh(\frac{\pi v}{i})} \\ &= \frac{2\sin\left(\pi\left(\frac{v}{2}+\frac{k}{2m}\right)\right)\sin\left(\pi\left(-\frac{v}{2}+\frac{k}{2m}\right)\right)}{\frac{v}{i}\sinh\left(\frac{v}{i}\right)}. \end{aligned}$$

D'une part, les formules $\Gamma(\bar{z}) = \overline{\Gamma(z)}$ et $|\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y\sinh(\pi y)}$ pour $y \in \mathbb{R}$ entraînent que le dénominateur est égal à $(\Gamma(v)\Gamma(-v))^{-1}\pi^2$. D'autre part, il résulte de la formule de réflexion $\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ que le numérateur est égal à

$$\left[\Gamma\left(\frac{v}{2}+\frac{k}{2m}\right)\Gamma\left(1-\frac{k}{2m}+\frac{v}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{v}{2}+\frac{k}{2m}\right)\Gamma\left(1-\frac{k}{2m}-\frac{v}{2}\right)\right]^{-1}2\pi^2.$$

Donc $\mu_0(\chi)^{-1} = g(v)g(-v)$ où

$$g(z) := \frac{\sqrt{2}\,\Gamma(z)}{\Gamma\left(\frac{z}{2}+\frac{k}{2m}\right)\Gamma\left(\frac{z}{2}+1-\frac{k}{2m}\right)}$$

$$= (\sqrt{2\pi})^{-1}\cdot 2^z \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{2}+\frac{k}{2m}\right)\Gamma\left(\frac{z}{2}+1-\frac{k}{2m}\right)}$$

où la deuxième égalité résulte de la formule de multiplication $\Gamma(z) = (\sqrt{\pi})^{-1}2^{z-\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{z}{2})\Gamma(\frac{z}{2}+\frac{1}{2})$. On voit que $G(v)G(-v) = 2\pi^2 g(v)g(-v)$.

Montrons (**R1**). Si $\exists\alpha_0$, la formule $|\Gamma_{\mathbb{C}}(iy)\Gamma_{\mathbb{C}}(1+iy)^{-1}|^2 = (2\pi)^2|y|^{-2}$ pour $y \in \mathbb{R}$ et le raisonnement ci-dessus entraînent que

$$\begin{aligned}
|r_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi)|^2 &= \prod_{\alpha\neq\alpha_0}(2\pi)^2|\langle\mu,\alpha\rangle|^{-2}\cdot G(\pi\langle\mu,\alpha_0^\vee\rangle)G(-\pi\langle\mu,\alpha_0^\vee\rangle)\\
&= \prod_{\alpha\in\Sigma_c(G,T)}(2\pi)|\langle\mu,\alpha\rangle|^{-1}\cdot g(\langle\mu,\alpha_0^\vee\rangle)g(-\langle\mu,\alpha_0^\vee\rangle)\cdot 2\pi^2\\
&= (2\pi)^{\dim U_P}\prod_{\alpha\in\Sigma_c(G,T)}|\langle\mu,\alpha\rangle|^{-1}\frac{\pi}{\mu_0(\chi)}\\
&= \gamma_{P'|P}^2\alpha_{P'|P}^2\,\mu(\pi)^{-1}.
\end{aligned}$$

Si $\nexists\alpha_0$, les mêmes manipulations des fonctions $\Gamma_{\mathbb{C}}$ donnent

$$|r_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi)|^2 = (2\pi)^{\dim U_P}\prod_{\alpha\in\Sigma_P(G,T)}|\langle\mu,\alpha^\vee\rangle|^{-1} = \gamma_{P'|P}^2\alpha_{P'|P}^2\,\mu(\pi)^{-1}.$$

Montrons (**R2**). Comme $\Gamma(\bar{z}) = \overline{\Gamma(z)}$, il en résulte que $\overline{r_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_\lambda)} = r_{\tilde{P}|\tilde{P}'}(\pi_{-\bar{\lambda}})$, ce qui suffit pour conclure.

Si $w \in W^G(M)$ est l'élément non trivial, alors il envoie P à P', λ à $-\lambda$ et μ à $-\mu$, d'où $r_{w\tilde{P}'|w\tilde{P}}(\tilde{w}\pi_{w\lambda}) = r_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_\lambda)$. Cela entraîne (**R3**).

Les conditions (**R6**) et (**R8**) résultent des arguments dans [13, §3], car Arthur n'utilise que la formule du déterminant de L. Cohn [88, 10.4.4] et la propriété que $r_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_\lambda)$ est de la forme

$$\frac{\prod_{i=1}^N\Gamma(c\lambda-a_i)}{\prod_{i=1}^N\Gamma(c\lambda-b_i)},\quad c\in\mathbb{R}^\times,\ a_i,b_i\in\mathbb{C},$$

à une constante multiplicative près. La condition (**R7**) résulte d'une propriété bien connue des fonctions Γ car on a supposé $k \geq 0$ dans le cas $\exists\alpha_0$. □

Lorsque $\mathbf{p} : \tilde{G} \to G(\mathbb{R})$ provient d'une $\mathbf{K}_2$-extension de Brylinski-Deligne [27, §10], on a forcément $m = 1$ ou 2 et les facteurs normalisants sont étroitement liés à ceux d'Arthur. Cela est contenu dans les remarques suivantes.

Remarque 3.2.2. Supposons que $\exists \alpha_0$ et $\frac{k}{2m} \in \{0, \frac{1}{2}\}$. Alors on a

$$\frac{(-1)^{\langle \rho_P, \alpha_0^\vee \rangle}}{2} \left(\chi(\gamma) + \chi(\gamma)^{-1} \right) = (-1)^{N_0}$$

où $N_0 := 1$ si $\frac{k}{2m} = 0$ et $N_0 := 0$ si $\frac{k}{2m} = \frac{1}{2}$. On pose

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(z) := \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right)$$

et on vérifie que

$$G(z) = \frac{\Gamma_{\mathbb{R}}(z + N_0)}{\Gamma_{\mathbb{R}}(z + N_0 + 1)}.$$

On a toujours $\frac{k}{2m} \in \{0, \frac{1}{2}\}$ lorsque $m = 1$. En comparant la définition des facteurs normalisants et l'interprétation de la constante N_0 dans [13, Appendix], il en résulte que nos facteurs normalisants sont exactement ceux d'Arthur dans le cas archimédien.

Remarque 3.2.3. Supposons que $\exists \alpha_0$ et $\frac{k}{2m} \in \{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$. On déduit de la formule de duplication pour les fonctions Γ que

$$G(z) = \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \Gamma\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{z}{2} + \frac{3}{4}\right)} = \sqrt{2} \cdot \frac{\Gamma_{\mathbb{R}}(2z)}{\Gamma_{\mathbb{R}}(2z + 1)}.$$

D'où

$$r_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_\lambda) = \prod_{\alpha \neq \alpha_0} \frac{\Gamma_{\mathbb{C}}(\langle \mu + \lambda, \alpha^\vee \rangle)}{\Gamma_{\mathbb{C}}(\langle \mu + \lambda, \alpha^\vee \rangle + 1)} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\Gamma_{\mathbb{R}}(\langle \mu + \lambda, 2\alpha_0^\vee \rangle)}{\Gamma_{\mathbb{R}}(\langle \mu + \lambda, 2\alpha_0^\vee \rangle + 1)}.$$

Au facteur $\sqrt{2}$ près, c'est le facteur normalisant d'Arthur pour les groupes réductifs connexes sauf que $\alpha_0^\vee$ est remplacé par $2\alpha_0^\vee$. Cela reflète un phénomène de "renversement du diagramme de Dynkin" qui se passe pour certains revêtements à deux feuillets.

3.3 Le cas non archimédien

Supposons F local non archimédien de corps résiduel $\mathbb{F}_q$. Le résultat suivant ainsi que sa démonstration sont dus à [33, Lecture 15], à quelques corrections près.

Théorème 3.3.1. *Il existe une famille de facteurs normalisants pour $\tilde{G}$.*

Démonstration. On peut supposer que M est un Lévi propre maximal de G, $P, P' \in \mathcal{P}(M)$ tels que $P' = \bar{P}$ et $\pi \in \Pi_2(\tilde{M})$ grâce à la Proposition 3.1.4. Vu la Remarque 2.4.4 il suffit de considérer les représentations $\pi \otimes \chi$ où χ provient de $(\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^G)^*$ via l'application

$$\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^* \to X(\tilde{M}).$$

De telles χ forment une sous-tore complexe X' de $X(\tilde{M})$. On note α l'unique élément de Δ_P, et $\check{\alpha}$ l'élément dans $\mathbb{Q}_{>0} \cdot \alpha^\vee$ défini dans (IV.8). L'application $(\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^G)^* \to \mathbb{C}^\times$ définie par $\lambda \mapsto z = q^{-\langle \lambda, \check{\alpha} \rangle}$ permet d'identifier X' à $\mathbb{C}^\times$. On écrit l'action par X' par $\pi \mapsto \pi \otimes z$. On définit ainsi $\mu_P(\pi, z) \in \mathbb{C}(z)$ telle que $\mu_P(\pi, z) := \mu(\pi \otimes z)$.

Soit $P(z) \in \mathbb{C}(z)$, on adopte la convention

$$P(z)^* := \overline{P(\bar{z}^{-1})} \in \mathbb{C}(z).$$

On construira $V_P(\pi, z) \in \mathbb{C}(z)$ telle que

– $V_P(\pi, z)$ n'a ni zéros ni pôles dans la région $0 < |z| < 1$;
– $\mu_P(\pi, z) = V_P(\pi, z) V_P(\pi, z)^*$;
– $V_P(\pi, z)$ est déterminé par $\pi \otimes z$.

Si ces conditions sont satisfaites, on pose $r_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_\lambda) := V_P(\pi, q^{-\langle\lambda, \check{\alpha}\rangle})$.

Fixons $\pi \in \Pi_2(\tilde{M})$ et construisons $V_P(\pi, z)$. On sait que $\mu_P(\pi, z) = \mu_P(\pi, z)^*$ et $\mu_P(\pi, z) \geq 0$ si $|z| = 1$. D'où

– la distribution des zéros (resp. pôles) dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est symétrique par rapport à l'inversion $z \mapsto \bar{z}^{-1}$;
– les zéros (resp. pôles) dans le cercle $|z| = 1$ ont multiplicités paires.

Notons $\alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r^{-1}$ (resp. $\beta_1^{-1}, \ldots, \beta_r^{-1}$) les zéros (resp. pôles) de $\mu(\pi, z)$ avec multiplicités, tels que $|\alpha_i| \leq 1$ (resp. $|\beta_i| \leq 1$) pour tout i. Montrons qu'il existe un unique $b \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que

$$\mu_P(\pi, z) = b^2 \prod_{i=1}^{r} \frac{(1 - \alpha_i z)(z - \bar{\alpha}_i)}{(1 - \beta_i z)(z - \bar{\beta}_i)}.$$

Si l'on pose $P(z; t) := z^{-1}(1 - tz)$ pour $t \in \mathbb{C}$, alors $P(z; t)^* = z - \bar{t}$. On note $Q(z)$ le produit $\prod_{i=1}^r (\cdots)$ dans l'expression précédente, il s'écrit comme

$$Q(z) := \prod_{i=1}^{r} \frac{P(z; \alpha_i) P(z; \alpha_i)^*}{P(z; \beta_i) P(z; \beta_i)^*}.$$

On a $Q(z) = Q(z)^*$, d'où $\mathrm{ord}_{z=0}(Q(z)) = \mathrm{ord}_{z=\infty}(Q(z))$. Idem pour $\mu_P(\pi, z)$. D'autre part $\mathrm{ord}_{z=t}(Q(z)) = \mathrm{ord}_{z=t}(\mu_P(\pi, z))$ pour tout $t \in \mathbb{C}$ avec $0 < |t| < \infty$ par construction. La formule de produit sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ entraîne qu'il existe $a \in \mathbb{C}^\times$ tel que $aQ(z) = \mu_P(\pi, z)$. En l'évaluant en z_0 tel que $|z_0| = 1$ et $\mu_P(\pi, z_0) > 0$, on voit que $a \in \mathbb{R}_{>0}$. On prend donc $b := \sqrt{a}$.

Posons

$$V_P(\pi, z) := b \prod_{i=1}^{r} \frac{1 - \alpha_i z}{1 - \beta_i z}.$$

Il en résulte immédiatement que $\mu_P(\pi, z) = V_P(\pi, z) V_P(\pi, z)^*$. Par construction $V_P(\pi, z)$ n'a ni zéros ni pôles dans la région $0 < |z| < 1$. Si l'on remplace π par $\pi \otimes z_0$ où $|z_0| = 1$, alors $\mu_P(\pi, z)$ est remplacé par $\mu_P(\pi \otimes z_0, z) = \mu_P(\pi, z_0 z)$ et α_i (resp. β_i) est remplacé par $z_0 \alpha_i$ (resp. $z_0 \beta_i$) pour tout i. Soit $t \in \mathbb{C}$, on a défini $P(z; t) \in \mathbb{C}(t)$ et on a

$$\begin{aligned} P(z; z_0 t) P(z; z_0 t)^* &= \frac{(1 - z_0 t z)(z - \overline{z_0 t})}{z} = \frac{(1 - t(z_0 z))(z_0 z - \bar{t} z_0 \bar{z}_0)}{z_0 z} \\ &= \frac{1 - t(z_0 z)}{z_0 z} \cdot (z_0 z - \bar{t}) = P(z_0 z; t) P(z_0 z; t)^*. \end{aligned}$$

Attention : ici $P(z_0 z; t)^*$ signifie l'élément dans $\mathbb{C}(t)$ obtenu en remplaçant z par $z_0 z$ dans $P(z; t)^*$. On conclut en prenant $t = \alpha_i, \beta_i$ ($i = 1, \ldots, r$) que $V_P(\pi \otimes z_0, z) = V_P(\pi, z_0 z)$, donc $V_P(\pi, z)$ est déterminé par $\pi \otimes z$.

Vérifions les conditions dans la Définition 3.1.1. (**R1**) et (**R7**) sont déjà vérifiées. (**R3**) résulte du transport de structure car notre construction est canonique.

Montrons (**R2**). Puisque $P' = \bar{P}$, on a $\mu_{P'}(\pi, z) = \mu_P(\pi, z^{-1})$, d'où

$$\mu_{P'}(\pi, z) = b^2 \prod_{i=1}^{r} \frac{(1 - \alpha_i z^{-1})(z^{-1} - \bar{\alpha}_i)}{(1 - \beta_i z^{-1})(z^{-1} - \bar{\beta}_i)} = b^2 \prod_{i=1}^{r} \frac{(z - \alpha_i)(1 - \bar{\alpha}_i z)}{(z - \beta_i)(1 - \bar{\beta}_i z)}.$$

On en déduit que $V_{P'}(\pi, z) = b\prod_{i=1}^r (1-\bar{\alpha}_i z)(1-\bar{\beta}_i z)^{-1}$. Soit $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$, on a

$$r_{\tilde{P}|\tilde{P}'}(\pi_\lambda) = V_{P'}(\pi, q^{\langle\lambda,\check{\alpha}\rangle}) = b\prod_{i=1}^r \frac{1-\bar{\alpha}_i q^{\langle\lambda,\check{\alpha}\rangle}}{1-\bar{\beta}_i q^{\langle\lambda,\check{\alpha}\rangle}},$$
$$r_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_{-\bar{\lambda}}) = V_P(\pi, q^{\langle\bar{\lambda},\check{\alpha}\rangle}) = b\prod_{i=1}^r \frac{1-\alpha_i q^{\langle\bar{\lambda},\check{\alpha}\rangle}}{1-\beta_i q^{\langle\bar{\lambda},\check{\alpha}\rangle}}.$$

D'où $r_{\tilde{P}|\tilde{P}'}(\pi_\lambda) = \overline{r_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_{-\bar{\lambda}})}$. □

3.4 Le cas non ramifié

On considère maintenant le cas F local non archimédien, K un sous-groupe hyperspécial de $G(F)$ en bonne position relativement à M_0, et $\mathbf{p} : \tilde{G} \to G(F)$ un revêtement non ramifié au sens de [Chapitre III, §3.1]. On fixe une section $s : K \to \tilde{G}$ de $\mathbf{p}$, par laquelle on identifie K à un sous-groupe de $\tilde{G}$. Pour tout Lévi $M \in \mathcal{L}(M_0)$, les données $K^M := K \cap M(F)$ et $s|_{K^M} : K^M \to \tilde{M}$ définissent encore un revêtement non ramifié.

Une représentation admissible irréductible (π, V) de $\tilde{G}$ est dite non ramifiée si $V^K \neq \{0\}$; dans ce cas-là on a $\dim V^K = 1$ d'après [Chapitre III, Corollaire 3.2.6].

Théorème 3.4.1. *Il existe une famille de facteurs normalisants faibles*

$$r^{\tilde{L}}_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi), \quad M \in \mathcal{L}(M_0),\ L \in \mathcal{L}(M),\ P, P' \in \mathcal{P}^L(M),$$

où $(\pi, V) \in \Pi(\tilde{M})$ est non ramifiée, tels que si $v \in \mathcal{I}_{\tilde{P}}(\pi)^K$, alors la restriction de $R^{\tilde{L}}_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_\lambda)v$ à $\tilde{K}$ ne dépend pas de λ.

Avant d'entamer la preuve, rappelons brièvement la théorie des séries principales non ramifiées spécifiques. Soit $(\pi, V) \in \Pi_-(\tilde{M})$ non ramifiée. Il résulte de l'isomorphisme de Satake [Chapitre III, Proposition 3.2.5] que π est une sous-représentation de $\mathrm{Ind}^{\tilde{M}}_{\tilde{P}_0}(\chi)$, où χ est une représentation irréductible spécifique non ramifiée de $\tilde{M}_0$. Attention : $\tilde{M}_0$ n'est pas commutatif en général et χ n'est pas forcément dans $X(\tilde{M}_0)$. Néanmoins il admet une description simple : notons $\tilde{H} := Z_{\tilde{M}}(K \cap M_0(F))$ (voir [Chapitre III, Definition 3.1.1]), c'est un sous-groupe commutatif maximal de $\tilde{M}_0$. Alors χ est de la forme

$$\chi = \mathrm{Ind}^{\tilde{M}_0}_{\tilde{H}}(\chi_0)$$

où χ_0 est un caractère spécifique de $\tilde{H}$, trivial sur $K \cap \tilde{H}$; sa restriction à $Z(\tilde{M}_0)$ est uniquement déterminée par χ. Cela résulte d'une variante du théorème de Stone-von Neumann, cf. [90, §3]. Donc π se réalise comme une sous-représentation de $\mathrm{Ind}^{\tilde{M}}_{\tilde{H}}(\chi_0)$, ce que nous appelons une série principale non ramifiée spécifique.

Démonstration du Théorème 3.4.1. C'est loisible de supposer π spécifique. D'après ce qui précède, on réalise π comme sous-représentation irréductible de $\mathrm{Ind}^{\tilde{M}}_{\tilde{H}}(\chi_0)$. Vu la transitivité de l'induction parabolique normalisée, on se ramène au cas $M = M_0$, $\pi = \mathrm{Ind}^{\tilde{M}_0}_{\tilde{H}}(\chi_0)$. C'est aussi loisible de supposer que $L = G$.

L'espace sous-jacent de $\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\pi_\lambda)$ s'identifie à un espace de fonctions sur $\tilde{K}$ muni d'un produit hermitien invariant, noté $(|)$. Cet espace ne dépend pas de λ ; son sous-espace de K-invariants est aussi indépendant de λ et est de dimension 1.

Pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$, prendre $v_P \in \mathcal{I}_{\tilde{P}}(\pi)^K$ la fonction telle que $v_P(1) = 1$. On définit $r_{\tilde{P}|\tilde{P}'}(\pi_\lambda)$ de sorte que

$$R_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_\lambda)v_P = v_{P'} \tag{IV.11}$$

pour tous $P, P' \in \mathcal{P}(M)$ et presque tout λ. Le fait que $J_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_\lambda)$ est rationnel en les variables $\{q^{-\langle\lambda,\check{\alpha}\rangle} : \alpha \in \Delta_P\}$ entraîne que $r_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_\lambda)$ l'est aussi. D'autre part (IV.11) entraîne que $R_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_\lambda)v_P$ est indépendant de λ. On vérifie (**R1**), (**R3**) et (**R6**) sans difficulté.

Vérifions (**R2**). Les induites $\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\pi_\lambda)$ et $\mathcal{I}_{\tilde{P}'}(\pi_\lambda)$ sont irréductibles si λ est en position générale, donc il existe $c_\lambda \in \mathbb{C}^\times$ tel que $R_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_\lambda)^* = c_\lambda R_{\tilde{P}|\tilde{P}'}(\pi_{-\bar{\lambda}})$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}(R_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_\lambda)v_P|v_{P'}) &= (v_{P'}|v_{P'}),\\ (v_P|R_{\tilde{P}|\tilde{P}'}(\pi_{-\bar{\lambda}})v_{P'}) &= (v_P|v_P).\end{aligned}$$

Or $(v_{P'}|v_{P'}) = (v_P|v_P)$, d'où $c_\lambda = 1$ et $R_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi_\lambda)^* = R_{\tilde{P}|\tilde{P}'}(\pi_{-\bar{\lambda}})$.

Les propriétés (**R4**), (**R5**) découlent des propriétés parallèles des opérateurs $J_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi)$ et de notre définition de $r_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi)$. □

Remarque 3.4.2. Il sera plus raisonnable d'établir une formule à la Gindikin-Karpelevič pour les séries principales non ramifiées spécifiques, puis en déduire une formule explicite de $r_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\pi)$. On en obtiendra (**R7**). En fait, de nombreux cas ont été établis par McNamara [61], y compris les revêtements des groupes déployés simplement connexes construits par Matsumoto. Nous ne poursuivons pas cette approche ici.

4 Intégrales orbitales et caractères

Dans cette section, on étudiera des distributions invariantes sur un revêtement $\mathbf{p} : \tilde{G} \to G(F)$, où F est un corps local de caractéristique nulle. Lorsque F est archimédien, les résultats que nous cherchons sont déjà établis par Bouaziz [23, 24]. Par conséquent, on se limitera au cas F non archimédien.

Soit M un F-groupe réductif. Une distribution sur $\mathfrak{m}(F)$ signifie une fonctionnelle linéaire sur $C_c^\infty(\mathfrak{m}(F))$. Pour $f \in C_c^\infty(\mathfrak{m}(F))$ et $x \in M(F)$, on écrira $f^x : X \mapsto f(xXx^{-1})$. Le groupe $M(F)$ opère sur les distributions par $\langle {}^x\Theta, f\rangle = \langle\Theta, f^x\rangle$.

Le support d'une distribution θ a encore un sens et sera noté $\operatorname{Supp}\theta$. Les mêmes notions s'appliquent aux distributions sur $\tilde{G}$. On définit les distributions spécifiques ou anti-spécifiques comme dans [Chapitre III].

4.1 Théorie sur l'algèbre de Lie

On se donne
- F un corps local non archimédien,
- G un F-groupe réductif, sa composante neutre est noté G°.
- $\boldsymbol{\omega} : G(F) \to \mathbb{C}^\times$ un caractère unitaire continu, trivial sur $Z_{G^\circ}(F)$.

Notre hypothèse sur $\boldsymbol{\omega}$ est justifiée car les résultats de cette sous-section deviendront triviaux si $\boldsymbol{\omega}$ n'est pas trivial sur $Z_{G^\circ}(F)$. La composante neutre de Z_{G°, notée $Z_{G^\circ}^\circ$, est un F-tore.

Munissons $G(F)$ d'une mesure de Haar. On utilise les notions définies dans [Chapitre III, §5]. On note $\pi : G_{\mathrm{SC}} \to G$ le revêtement simplement connexe de G_{der}° et $\iota : Z_{G^\circ}^\circ \to G$ l'inclusion. Alors on a un module croisé

$$G' := G_{\mathrm{SC}} \times Z_{G^\circ}^\circ \xrightarrow{(\pi,\iota)} G.$$

L'action de G sur G_{SC} est la conjugaison et son action sur $Z^\circ_{G^\circ}$ est triviale. On note

$$\Xi := \mathrm{Coker}\,(G'(F) \to G(F)).$$

C'est un groupe fini.

Un fait important à se rappeler est que $\boldsymbol{\omega} \circ (\pi, \iota) = 1$. Un élément $X \in \mathfrak{g}(F)$ est dit $\boldsymbol{\omega}$-bon sous $G(F)$ si $\boldsymbol{\omega}$ est trivial sur $Z_G(X)(F)$. On définit ainsi les classes de conjugaison $\boldsymbol{\omega}$-bonnes sous $G(F)$; l'ensemble de telles classes est noté $\Gamma(\mathfrak{g}(F))^{\boldsymbol{\omega}}$. On introduit le $\mathbb{C}^\times$-torseur $\dot\Gamma(\mathfrak{g}(F))^{\boldsymbol{\omega}} \to \Gamma(\mathfrak{g}(F))^{\boldsymbol{\omega}}$; les éléments dans $\dot\Gamma(\mathfrak{g}(F))^{\boldsymbol{\omega}}$ sont les $\boldsymbol{\omega}$-bonnes classes de conjugaison par $G(F)$ munies d'une mesure complexe non triviale μ telle que $\langle \mu, f^y\rangle = \boldsymbol{\omega}(y)\langle \mu, f\rangle$ pour tout f. On définit $\Gamma_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{g}(F))^{\boldsymbol{\omega}}$, $\dot\Gamma_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{g}(F))^{\boldsymbol{\omega}}$ (resp. $\Gamma_{\mathrm{nil}}(\mathfrak{g}(F))^{\boldsymbol{\omega}}$, $\dot\Gamma_{\mathrm{nil}}(\mathfrak{g}(F))^{\boldsymbol{\omega}}$) en se limitant aux classes semi-simples régulières (resp. nilpotentes). Ces définitions généralisent celles de [Chapitre III] pour les groupes connexes.

Dans ce qui suit, on s'intéressera aux distributions θ sur $\mathfrak{g}(F)$ avec ${}^y\theta = \boldsymbol{\omega}(y)\theta$ pour tout $G(F)$. On définit des espaces vectoriels en dualité

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\mathfrak{g}(F))_{\boldsymbol{\omega}} &:= C^\infty_c(\mathfrak{g}(F)) / \left\langle f^y - \boldsymbol{\omega}(y) f : f \in C^\infty_c(\mathfrak{g}(F)),\ y \in G(F)\right\rangle,\\ \mathcal{J}(\mathfrak{g}(F))^{\boldsymbol{\omega}} &:= \{\theta : \text{distribution sur } \mathfrak{g}(F),\ \forall y \in G(F), {}^y\theta = \boldsymbol{\omega}(y)\theta\}.\end{aligned}$$

Si $\boldsymbol{\omega} = 1$, on y omet le symbole $\boldsymbol{\omega}$; dans ce cas-là ce sont l'espace de Hecke invariant et l'espace de distributions invariantes, respectivement.

Les applications $f \mapsto f^{y^{-1}}$, $y \in G(F)$ induisent une action de Ξ sur $\mathcal{I}(\mathfrak{g}'(F))$. Son action contragrédiente sur $\mathcal{J}(\mathfrak{g}'(F))$ se déduit de $\theta \mapsto {}^y\theta$. Posons $\Pi(\Xi)$ l'ensemble de représentations irréductibles de Ξ, on obtient donc les décompositions

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\mathfrak{g}'(F)) &= \bigoplus_{\xi \in \Pi(\Xi)} \mathcal{I}(\mathfrak{g}'(F))_\xi,\\ \mathcal{J}(\mathfrak{g}'(F)) &= \bigoplus_{\xi \in \Pi(\Xi)} \mathcal{J}(\mathfrak{g}'(F))^\xi,\end{aligned}$$

où $(\cdots)^\xi$ désigne la composante ξ-isotypique et nous adoptons la convention $(\cdots)_\xi = (\cdots)^{(\xi^\vee)}$. Notons pr_ξ, pr^ξ les projections ξ-isotypiques correspondantes. Vu notre hypothèse, $\boldsymbol{\omega}$ induit un caractère de Ξ, noté encore $\boldsymbol{\omega}$. Les espaces $\mathcal{I}(\mathfrak{g}'(F))_{\boldsymbol{\omega}}$ et $\mathcal{J}(\mathfrak{g}'(F))^{\boldsymbol{\omega}}$ sont en dualité.

Notons que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$ comme F-algèbres de Lie. Le résultat suivant est évident.

Lemme 4.1.1. *On a*

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\mathfrak{g}(F))_{\boldsymbol{\omega}} &= \mathcal{I}(\mathfrak{g}'(F))_{\boldsymbol{\omega}},\\ \mathcal{J}(\mathfrak{g}(F))^{\boldsymbol{\omega}} &= \mathcal{J}(\mathfrak{g}'(F))^{\boldsymbol{\omega}}.\end{aligned}$$

Pour tout $\dot X \in \dot\Gamma(\mathfrak{g}(F))^{\boldsymbol{\omega}}$, on peut définir les intégrales orbitales normalisées $J^{\boldsymbol{\omega}}_G(\dot X, f)$, qui n'est que $\langle \dot X, f\rangle$ car $\dot X$ est regardée comme une mesure complexe. Soit $X \in \mathfrak{g}(F)$ qui est $\boldsymbol{\omega}$-bon, le symbole $\dot X$ désignera toujours un élément $\dot X \in \dot\Gamma(\mathfrak{g}(F))^{\boldsymbol{\omega}}$ tel que la classe de conjugaison sous-jacente de $\dot X$ contient X. Notons $G_X := Z_{G^\circ}(X)^\circ$. Si une mesure de Haar sur $G_X(F)$ est choisie, on peut choisir $\dot X$ de sorte que

$$J^{\boldsymbol{\omega}}_G(\dot X, f) = |D^G(X)|^{\frac{1}{2}} \int_{G_X(F)\backslash G(F)} \boldsymbol{\omega}(x) f(x^{-1}Xx)\,\mathrm{d}x \tag{IV.12}$$

où $D^G(X) := \det(\mathrm{ad}\,(X)|\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_X)$ est le discriminant de Weyl sur l'algèbre de Lie, qui ne dépend que de G°.

Lemme 4.1.2. *Soit $X \in \mathfrak{g}(F)$.*

1. *X est $\boldsymbol{\omega}$-bon si et seulement si pour tout (ou ce qui revient au même, pour un) $\dot{X}' \in \dot{\Gamma}(\mathfrak{g}'(F))$ à support contenu dans la $G(F)$-orbite de X, on a $\mathrm{pr}^{\boldsymbol{\omega}}\dot{X}' \neq 0$.*
2. *Supposons que X est $\boldsymbol{\omega}$-bon. Soit $\dot{X} \in \dot{\Gamma}(\mathfrak{g}(F))^{\boldsymbol{\omega}}$ à support dans la $G(F)$-orbite contenant X, alors il existe un unique élément $\dot{X}' \in \dot{\Gamma}(\mathfrak{g}'(F))$ tel que*
   – *$\mathrm{pr}^{\boldsymbol{\omega}}\dot{X}'$ correspond à $\dot{X}$ sous l'isomorphisme du Lemme 4.1.1 ;*
   – *X appartient à la $G'(F)$-orbite sous-jacente de $\dot{X}'$.*
   De plus, tout $\dot{X}' \in \dot{\Gamma}(\mathfrak{g}'(F))$ avec $\mathrm{pr}^{\boldsymbol{\omega}}\dot{X}' \neq 0$ est obtenu de cette manière.

Remarque 4.1.3. C'est plus commode de noter $\dot{X}'$ par $\dot{X}$. Alors ledit lemme signifie que

$$J_G^{\boldsymbol{\omega}}(\dot{X}, f) = J_{G'}(\dot{X}, \mathrm{pr}_{\boldsymbol{\omega}} f), \quad f \in \mathcal{I}(\mathfrak{g}(F)).$$

Dorénavant, on adopte cette convention.

Le résultat précédent permet de généraliser des résultats dans le cas $\boldsymbol{\omega} = 1$ au cas général. Donnons des exemples importants.

Théorème 4.1.4 (Germes de Shalika avec caractère)**.** *Soit $T \subset G$ un F-tore maximal tel que $\boldsymbol{\omega}|_{T(F)} = 1$. Posons $\mathfrak{t}_{\mathrm{reg}} := \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ et choisissons une mesure de Haar sur $T(F)$, qui permet définir par* (IV.12) *les intégrales orbitales $J_G^{\boldsymbol{\omega}}(\dot{H}, \cdot)$ pour tout $H \in \mathfrak{t}_{\mathrm{reg}}(F)$.*

Alors il existe des fonctions $\Gamma_{\dot{u}} : \mathfrak{t}(F) \to \mathbb{C}$ où $\dot{u} \in \dot{\Gamma}_{\mathrm{nil}}(\mathfrak{g}(F))^{\boldsymbol{\omega}}$, telles que

1. *$\Gamma_{z\dot{u}} = z^{-1}\Gamma_{\dot{u}}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^\times$;*
2. *$\Gamma_{\dot{u}}(t^2 H) = |t|^{-\dim G/G_u}\Gamma_{\dot{u}}(H)$ pour tout $t \in F^\times$;*
3. *$\Gamma_{\dot{u}}(H + Z) = \Gamma_{\dot{u}}(H)$ si $Z \in \mathfrak{z}(F)$;*
4. *$\Gamma_{\dot{u}}$ est localement constante sur $\mathfrak{t}_{\mathrm{reg}}(F)$ et localement bornée sur $\mathfrak{t}(F)$;*
5. *pour tout $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, il existe $\mathcal{U}$ un voisinage ouvert de 0 dans $\mathfrak{t}(F)$ tel que pour tout $H \in \mathfrak{t}_{\mathrm{reg}}(F) \cap \mathcal{U}$ on a*

$$J_G^{\boldsymbol{\omega}}(\dot{H}, f) = \sum_{u \in \Gamma_{\mathrm{nil}}(\mathfrak{g}(F))^{\boldsymbol{\omega}}} \Gamma_{\dot{u}}(H) J_G^{\boldsymbol{\omega}}(\dot{u}, f)$$

où le produit dans la somme ne dépend pas du choix de $\dot{u}$.

Proposition 4.1.5. *Soit $f \in \mathcal{I}(\mathfrak{g}(F))_{\boldsymbol{\omega}}$. Supposons que $J_G^{\boldsymbol{\omega}}(\dot{X}, f) = 0$ pour tout $\dot{X} \in \dot{\Gamma}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{g}(F))^{\boldsymbol{\omega}}$, alors $f = 0$. Autrement dit, les intégrales orbitales $J_G^{\boldsymbol{\omega}}(\dot{X}, \cdot)$ sont faiblement denses dans $\mathcal{J}(\mathfrak{g}(F))^{\boldsymbol{\omega}}$.*

Démonstration. Vu le Lemme 4.1.1, on peut regarder f comme un élément de $\mathcal{I}(\mathfrak{g}'(F))_{\boldsymbol{\omega}}$. D'après la densité des intégrales orbitales régulières [40, Lemma 4.1] appliquée à G', il suffit de montrer que $J_{G'}(\dot{X}', f) = 0$ pour tout $\dot{X}' \in \dot{\Gamma}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{g}'(F))$ avec $\mathrm{pr}^{\boldsymbol{\omega}}\dot{X}' \neq 0$. D'après le Lemme 4.1.2, de tels $\dot{X}'$ correspondent aux éléments de $\dot{\Gamma}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{g}(F))^{\boldsymbol{\omega}}$. On conclut en appliquant l'hypothèse. □

L'étape suivante est de généraliser [40, Part II]. On fixe un sous-groupe compact maximal spécial K de $G(F)$ en bonne position relativement à un Lévi minimal M_0. On aura besoin de la transformée de Fourier sur $\mathfrak{g}(F)$. Pour ce faire, il convient de fixer

– un caractère additif unitaire non trivial $\psi : F \to \mathbb{C}^\times$,
– une forme bilinéaire non dégénérée B sur $\mathfrak{g}(F)$ qui est invariante par $G(F)$.

Montrons l'existence de B, qui n'est pas triviale car G peut être non connexe. On pose $H := G(F)/G^\circ(F)$, $Z := Z_{G^\circ}^\circ$. Vu la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}_{\mathrm{der}}$, s'il existe une forme bilinéaire non dégénérée B_Z sur $\mathfrak{z}(F)$ qui est invariante par H, alors on peut prendre $B = B_Z + B_{\mathrm{der}}$ où B_{der} est la forme de Killing de $\mathfrak{g}_{\mathrm{der}}$. L'existence de B_Z est garantie par le résultat suivant.

Proposition 4.1.6. *Soient F un corps de caractéristique nulle, H un groupe fini, Z un F-tore muni d'une action $H \to \mathrm{Aut}_{F-\mathrm{tore}}(Z)$, alors il existe une forme bilinéaire non dégénérée B_Z sur $\mathfrak{z}(F)$ qui est invariante par H.*

Démonstration. La variété des formes bilinéaires non dégénérées H-invariantes sur $\mathfrak{z}$ est un ouvert de Zariski d'un espace affine. Donc l'ensemble de ses F-points est dense pour la topologie de Zariski. Pour montrer que cette variété admet un F-point, c'est loisible de remplacer F par une extension quelconque. On se ramène ainsi au cas Z déployé.

Supposons Z déployé. Puisque les tores déployés ainsi que les homomorphismes entres eux sont définis sur $\mathbb{Z}$, on se ramène au cas $F = \mathbb{Q}$. L'argument précédent nous ramène encore au cas $F = \mathbb{R}$. C'est bien connu qu'il existe une forme définie positive H-invariante sur $\mathfrak{z}(\mathbb{R})$. Cela permet de conclure. $\square$

La transformée de Fourier est définie par

$$f \mapsto \hat{f}(\cdot) = \int_{\mathfrak{g}(F)} f(X)\psi(B(X,\cdot))\,\mathrm{d}X, \quad f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F)),$$

où $\mathfrak{g}(F)$ est muni de la mesure autoduale par rapport à $\psi \circ B$. La transformée de Fourier d'une distribution θ est notée $\hat{\theta}$, définie par $\langle \hat{\theta}, f\rangle = \langle \theta, \hat{f}\rangle$ pour tout $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$.

On considérera les $\mathfrak{o}_F$-réseaux "bien adaptés" à (M_0, K). Au lieu de donner la définition précise dans [40, Definition 10.6], il suffit de donner une construction directe : on prend un sommet spécial x correspondant à K dans l'immeuble de Bruhat-Tits, alors les réseaux de Moy-Prasad $\mathfrak{g}(F)_{x,r}$ sont adaptés à (M_0, K) pour tout $r > 0$. Cf. [4].

Pour Ω un sous-ensemble ouvert compact de $\mathfrak{g}(F)$, on pose

$$\mathcal{J}(\Omega) := \left\{ \theta \in \mathcal{J}(\mathfrak{g}(F)) : \operatorname{Supp}\theta \subset \bigcup_{x \in G(F)} x\Omega x^{-1} \right\},$$
$$\mathcal{J}(\Omega)^{\boldsymbol{\omega}} := \mathcal{J}(\mathfrak{g}(F))^{\boldsymbol{\omega}} \cap \mathcal{J}(\Omega).$$

On pose aussi

$$\mathcal{J}_0 := \bigcup_{\Omega} \mathcal{J}(\Omega),$$
$$\mathcal{J}_0^{\boldsymbol{\omega}} := \bigcup_{\Omega} \mathcal{J}(\Omega)^{\boldsymbol{\omega}} = \mathcal{J}(\mathfrak{g}(F))^{\boldsymbol{\omega}} \cap \mathcal{J}_0.$$

Définissons une norme $|\cdot|$ sur $\mathfrak{g}(F)$ comme dans [40, §2]. Soient $t > 0$, L un réseau bien adapté à (M_0, K), et V un voisinage de $\mathfrak{g}_{\mathrm{nil}}(F)^{|\cdot|=1}$ dans $\mathfrak{g}(F)^{|\cdot|=1}$. Définissons

$$\mathcal{J}(V,t,L)^{\boldsymbol{\omega}} := \{\theta \in \mathcal{J}(\mathfrak{g}(F))^{\boldsymbol{\omega}} : \forall X \in \mathfrak{g}(F),\ |X| > t \text{ et } \langle \theta, \mathbb{1}_{X+L}\rangle \neq 0 \Rightarrow X \in F \cdot V\}$$

où $\mathbb{1}_{X+L}$ désigne la fonction caractéristique de $X + L$. On vérifie que $\mathcal{J}(V,t,L)^{\boldsymbol{\omega}} \subset \mathcal{J}(V,t',L)^{\boldsymbol{\omega}}$ si $t' > t$. On pose

$$\mathcal{J}(V,\infty,L)^{\boldsymbol{\omega}} := \bigcup_{t>0} \mathcal{J}(V,t,L)^{\boldsymbol{\omega}}.$$

Soient $L' \subset \mathfrak{g}(F)$ un $\mathfrak{o}_F$-réseau quelconque et $\theta \in \mathcal{J}(\Omega)^{\boldsymbol{\omega}}$, on note $j_{L'}\theta$ la restriction de θ à l'espace $C_c(\mathfrak{g}(F)/L')$. Le résultat suivant interviendra dans la démonstration du Théorème 4.3.2.

Proposition 4.1.7. *Soient L un $\mathfrak{o}_F$-réseau bien adapté à (M_0, K) et V un voisinage de $\mathfrak{g}_{nil}(F)^{|\cdot|=1}$ dans $\mathfrak{g}(F)^{|\cdot|=1}$. Quitte à rétrécir V, il existe un $\mathfrak{o}_F$-réseau $L' \supset L$ tel que*

$$j_{L'}\mathcal{J}(V, \infty, L)^{\boldsymbol{\omega}} \subset j_{L'}\mathcal{J}_0^{\boldsymbol{\omega}}.$$

Démonstration. On choisit $\dot{\Xi} \subset G(F)$ un ensemble de représentants de Ξ tel que $1 \in \dot{\Xi}$. On pose

$$L' := \sum_{\xi \in \dot{\Xi}} \xi \cdot L \supset L.$$

Soit $\theta \in \mathcal{J}(V, t, L)^{\boldsymbol{\omega}}$. D'après [40, Corollary 11.4], il existe $\theta_0 \in \mathcal{J}_0(\Omega)$ tel que

$$\forall \varphi \in C_c(\mathfrak{g}(F)/L), \quad \langle \theta, \varphi \rangle = \langle \theta_0, \varphi \rangle.$$

On a $C_c(\mathfrak{g}(F)/L') \subset C_c(\mathfrak{g}(F)/L)$. De plus, si $\varphi \in C_c(\mathfrak{g}(F)/L')$ alors $\varphi^\xi \in C_c(\mathfrak{g}(F)/\xi^{-1}L') \subset C_c(\mathfrak{g}(F)/L)$ pour tout $\xi \in \dot{\Xi}$. Pour tout $\varphi \in C_c(\mathfrak{g}(F)/L')$, on a donc

$$\begin{aligned}
\langle \theta, \varphi \rangle &= \langle \mathrm{pr}^{\boldsymbol{\omega}}\theta, \varphi \rangle = \langle \theta, \mathrm{pr}_{\boldsymbol{\omega}}\varphi \rangle \\
&= |\Xi|^{-1} \sum_{\xi \in \dot{\Xi}} \boldsymbol{\omega}(\xi)^{-1} \langle \theta, \varphi^\xi \rangle \\
&= |\Xi|^{-1} \sum_{\xi \in \dot{\Xi}} \boldsymbol{\omega}(\xi)^{-1} \langle \theta_0, \varphi^\xi \rangle \\
&= \langle \theta_0, \mathrm{pr}_{\boldsymbol{\omega}}\varphi \rangle = \langle \mathrm{pr}^{\boldsymbol{\omega}}\theta_0, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Autrement dit $j_{L'}\theta = j_{L'}(\mathrm{pr}^{\boldsymbol{\omega}}\theta_0)$. Puisque Ξ est fini, on vérifie que $\mathrm{pr}^{\boldsymbol{\omega}}\theta_0 \in \mathcal{J}_0^{\boldsymbol{\omega}}$. Cela achève la preuve. □

Le résultat suivant ne sera pas utilisé dans cet article, toutefois on en donne l'énoncé à cause de son importance.

Théorème 4.1.8. *Soient $\Omega \subset \mathfrak{g}(F)$ compact, $L \subset \mathfrak{g}(F)$ un réseau bien adapté à (K, M_0). Alors $j_L\mathcal{J}(\Omega)^{\boldsymbol{\omega}}$ est de dimension finie.*

Soit $D \subset \mathfrak{g}(F)$. On dit que D est un G-domaine si D est ouvert, fermé et $G(F)$-invariant. Pour $X \in \mathfrak{g}(F)$ semi-simple, on note $\mathcal{O}(X)$ l'ensemble des $G(F)$-orbites dans $\mathfrak{g}(F)$ dont l'adhérence contient X. C'est un ensemble fini.

Théorème 4.1.9. *Soient Ω un ouvert compact dans $\mathfrak{g}(F)$ et $\theta \in \mathcal{J}(\Omega)^{\boldsymbol{\omega}}$, alors $\hat{\theta}$ est représentée par une fonction localement intégrable g sur $\mathfrak{g}(F)$ telle que*

- *g est localement constante sur $\mathfrak{g}_{reg}(F)$;*
- *$|D^G|^{\frac{1}{2}} g$ est localement bornée sur $\mathfrak{g}(F)$.*

Théorème 4.1.10. *Soient Ω un ouvert compact dans $\mathfrak{g}(F)$. Alors il existe un G-domaine D contenant 0 tel que pour tout $\theta \in \mathcal{J}(\Omega)^{\boldsymbol{\omega}}$, il existe des coefficients $c_{\dot{u}}(\theta)$, où $\dot{u} \in \dot{\Gamma}_{\mathrm{nil}}(\mathfrak{g}(F))^{\boldsymbol{\omega}}$, tels que*

- *$c_{z\dot{u}} = z^{-1}c_{\dot{u}}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^\times$;*
- *posons $\mu_{\dot{u}} := J_G^{\boldsymbol{\omega}}(\dot{u}, \cdot)$, alors*

$$\hat{\theta}|_D = \sum_{u \in \Gamma_{\mathrm{nil}}(\mathfrak{g}(F))^{\boldsymbol{\omega}}} c_{\dot{u}}(\theta)\widehat{\mu_{\dot{u}}}|_D.$$

Pour tout voisinage V de 0 dans $\mathfrak{g}(F)$. Les distributions $\widehat{\mu_{\dot{u}}}$ sont linéairement indépendants sur $V \cap \mathfrak{g}_{reg}(F)$.

Démonstration des Théorèmes 4.1.8, 4.1.9 et 4.1.10. Vu les Lemmes 4.1.1 et 4.1.2, on se ramène aux assertions concernant $\mathcal{J}(\mathfrak{g}'(F))^{\boldsymbol{\omega}}$, qui découlent immédiatement du cas établi par Harish-Chandra [40]. Remarquons aussi que le passage de $G(F)$ à $G'(F)$ n'affecte pas les notions de la transformée de Fourier, des réseaux bien-adapté et des G-domaines. $\square$

4.2 Théorie sur le groupe : descente semi-simple

Revenons à la théorie sur le groupe. Considérons un revêtement local

$$1 \to \mu_m \to \tilde{G} \xrightarrow{\mathbf{p}} G(F) \to 1$$

où G est un F-groupe réductif connexe. On normalise les mesures comme dans §2. On fixe
- $\sigma \in G(F)$ semi-simple, $G^\sigma := Z_G(\sigma)$, $G_\sigma := Z_G(\sigma)^0$;
- $\tilde{\sigma} \in \mathbf{p}^{-1}(\sigma)$;
- $\widetilde{G_\sigma} := \mathbf{p}^{-1}(G_\sigma(F))$.

On obtient ainsi le caractère continu $[\cdot, \sigma] : G^\sigma(F) \to \mu_m$ défini par

$$[y, \sigma] = \tilde{y}^{-1}\tilde{\sigma}^{-1}\tilde{y}\tilde{\sigma}, \quad y \in G^\sigma(F),$$

avec $\tilde{y} \in \mathbf{p}^{-1}(y)$ quelconque. On a

$$\tilde{\sigma}\tilde{y} = [y, \sigma]^{-1}\tilde{y}\tilde{\sigma}.$$

Posons

$$\begin{aligned} G^\sigma(F)^\diamond &:= \mathrm{Ker}\,[\cdot, \sigma], \\ G_\sigma(F)^\diamond &:= \mathrm{Ker}\,[\cdot, \sigma]|_{G_\sigma(F)}, \\ \widetilde{G_\sigma}^\diamond &:= \mathbf{p}^{-1}(G_\sigma(F)^\diamond). \end{aligned}$$

On choisit les objets suivants
- $\mathcal{V}^\flat \subset \mathfrak{g}_\sigma(F)$ de la forme $\mathfrak{g}_\sigma(F)_r$ avec $r \gg 0$, de tels ouverts forment une base locale en 0 pour la topologie définie par les ouverts $G^\sigma(F)$-invariants ;
- $\mathcal{W}^\flat := \exp(\mathcal{V}^\flat) \subset \widetilde{G_\sigma}^\diamond$, on peut prendre $r \gg 0$ de telle sorte que l'exponentielle définit un homéomorphisme de $\mathcal{V}^\flat$ sur $\mathcal{W}^\flat$, et que $\mathcal{W}^\flat$ est ouvert et invariant par $G^\sigma(F)$.

On peut aussi supposer que

$$\widetilde{\mathcal{W}^\flat} := \bigcup_{\varepsilon \in \mu_m} \varepsilon \mathcal{W}^\flat$$

est une réunion disjointe.

On définit ainsi

$$G(F) \times^\sigma \widetilde{\mathcal{W}^\flat} := \frac{G(F) \times \widetilde{\mathcal{W}^\flat}}{(gh, \tilde{t}) \sim (g, [h, \sigma]h\tilde{t}h^{-1}), \quad \forall h \in G^\sigma(F)}.$$

Notons $\Phi : G(F) \times \tilde{G} \to \tilde{G}$ l'application $(g, \tilde{t}) \mapsto g\tilde{\sigma}\tilde{t}g^{-1}$. Faisons opérer $G(F)$ sur $G(F) \times \tilde{G}$ (translation à gauche sur la composante $G(F)$) et sur $\tilde{G}$ (l'action adjointe), alors Φ est $G(F)$-équivariant. Le fait suivant est dû, pour l'essentiel, à Harish-Chandra.

Proposition 4.2.1. *L'application Φ est submersive. Quitte à rétrécir $\mathcal{V}^\flat$, elle induit un homéomorphisme $G(F)$-équivariant*

$$\bar{\Phi} : G(F) \times^\sigma \widetilde{\mathcal{W}^\flat} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{W}}$$

où $\widetilde{\mathcal{W}} := \Phi(G(F) \times \widetilde{\mathcal{W}}^\flat)$. Il existe une application "intégrer le long des fibres"

$$\Phi_* : C_c^\infty(G(F) \times \widetilde{\mathcal{W}}^\flat) \to C_c^\infty(\widetilde{\mathcal{W}})$$

caractérisée par l'égalité

$$\int_{G(F)\times\widetilde{\mathcal{W}}^\flat} \phi(g,\tilde{t})F(\Phi(g,\tilde{t}))\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}\tilde{t} = \int_{\widetilde{\mathcal{W}}} (\Phi_*\phi)(\tilde{x})F(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x}, \qquad \forall F \in C^\infty(\widetilde{\mathcal{W}}).$$

qui est une application surjective $G(F)$-équivariante.

On notera Φ^* le dual de Φ_* au niveau des distributions. Observons que tous les espaces en vue sont munis d'actions évidentes de μ_m, et toutes ces applications sont μ_m-équivariantes. On note $\mathbb{1}$ la distribution $\phi \mapsto \int_{G(F)} \phi(g)\,\mathrm{d}g$ sur $G(F)$.

Proposition 4.2.2. *Soit Θ une distribution invariante spécifique sur $\widetilde{\mathcal{W}}$. Alors il existe une unique distribution spécifique $\Theta^\flat$ sur $\widetilde{\mathcal{W}}^\flat$, caractérisée par*

$$\langle \Theta, \Phi_* f\rangle = \langle \mathbb{1} \otimes \Theta^\flat, f\rangle, \qquad f \in C_{c,--}^\infty(G(F) \times \widetilde{\mathcal{W}}^\flat).$$

Soit $y \in G^\sigma(F)$, alors

$$^y\Theta^\flat = [y,\sigma]\Theta^\flat, \qquad y \in G^\sigma(F).$$

Démonstration. L'image par Φ^* de Θ est une distribution spécifique $G(F)$-invariante sur $G(F) \times \widetilde{\mathcal{W}}^\flat$, donc est de la forme $\mathbb{1} \otimes \Theta^\flat$. La formule pour $\langle \Theta, \Phi_* f\rangle$ en découle. La deuxième assertion découle de la première, du fait que Θ est $G(F)$-invariant et de la Proposition 4.2.1. □

Corollaire 4.2.3. *Notons désormais $\theta := \exp^*(\Theta^\flat|_{\mathcal{W}^\flat})$, alors θ est une distribution sur $\mathcal{V}^\flat$ telle que $^y\theta = [y,\sigma]\theta$ pour tout $y \in G^\sigma(F)$. De plus, θ détermine $\Theta^\flat$.*

Remarque 4.2.4. Proprement dit, ce principe de descente semi-simple n'est pas celui de Harish-Chandra, car on n'utilise que des ouverts stables par μ_m et le caractère $[\cdot,\sigma]$ intervient. Pour obtenir une version purement "analytique", il suffit de considérer θ comme une distribution $G^\sigma(F)^\diamond$-invariante sur $\mathcal{V}^\flat$.

Appliquons la théorie de §4.1 au groupe G^σ et le caractère $[\cdot,\sigma]$. Utilisons les conventions de [Chapitre III, §6.3] pour les intégrales orbitales sur $\tilde{G}$. Le résultat suivant est immédiat selon la définition de Φ et la Proposition 4.2.1.

Lemme 4.2.5. *Un élément $\tilde{\gamma} = \tilde{\sigma}\exp X$ avec $X \in \mathcal{V}^\flat$ est bon si et seulement si X est $[\cdot,\sigma]$-bon sous $G^\sigma(F)$. Soient $\dot{\tilde{\gamma}} \in \dot{\Gamma}(\tilde{G})$ et $\Theta := J_{\tilde{G}}(\dot{\tilde{\gamma}},\cdot)$, alors il existe un unique $\dot{X} \in \dot{\Gamma}(\mathfrak{g}_\sigma(F))^{[\cdot,\sigma]}$ tel que*

$$\theta = J_{G^\sigma}^{[\cdot,\sigma]}(\dot{X},\cdot).$$

Inversement, toute distribution θ de cette forme se remonte en une intégrale orbitale anti-spécifique sur $\tilde{G}$.

À l'instar du cas de l'algèbre de Lie, définissons

$$\mathcal{I}(\tilde{G}) := C_c^\infty(\tilde{G}) / \left\langle f^y - f : f \in C_c^\infty(\tilde{G}),\ y \in G(F)\right\rangle$$

et posons $\mathcal{J}(\tilde{G})$ son dual. Notons $\mathcal{I}_{--}(\tilde{G})$ la partie anti-spécifique de $\mathcal{I}(\tilde{G})$, son dual est noté par $\mathcal{J}_-(\tilde{G})$, qui n'est que l'espace des distributions invariantes spécifiques. Le résultat suivant est parallèle à la Proposition 4.1.5. Dualement à l'application $\Theta \mapsto \theta$, on a une application $\mathcal{I}(\mathcal{V}^\flat)^{[\cdot,\sigma]} \to \mathcal{I}_{--}(\widetilde{\mathcal{W}})$, notée $f^\flat \mapsto f$, satisfaisant à

$$\langle \Theta, f\rangle = \langle \theta, f^\flat\rangle.$$

De plus, $f^\flat \mapsto f$ est surjective d'après la Proposition 4.2.1.

Proposition 4.2.6. *Soit $f \in \mathcal{I}_{--}(\tilde{G})$ tel que pour tout $\dot{\tilde{\gamma}} \in \dot{\Gamma}(\tilde{G})$ avec γ fortement régulier, on a $J_{\tilde{G}}(\dot{\tilde{\gamma}}, f) = 0$. Alors $f = 0$.*

Démonstration. On peut prendre $f^\flat \in \mathcal{I}(\mathcal{V}^\flat)^{[\cdot,\sigma]}$ tel que $f^\flat \mapsto f$. Soit $\dot{X} \in \dot{\Gamma}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{g}_\sigma(F))^{[\cdot,\sigma]}$. Si $X \notin \mathcal{V}^\flat$ alors $J_{G^\sigma}^{[\cdot,\sigma]}(\dot{X}, f^\flat) = 0$. Supposons donc $X \in \mathcal{V}^\flat$, alors le Lemme 4.2.5 affirme que $J_{G^\sigma}^{[\cdot,\sigma]}(\dot{X}, f^\flat)$ remonte en l'intégrale orbitale de f le long de la classe de conjugaison de $\tilde{\sigma} \exp X$. Puisque $\mathcal{V}^\flat$ est supposé suffisamment petit, la classe de $\tilde{\sigma} \exp X$ est fortement régulière. D'où $J_{G^\sigma}^{[\cdot,\sigma]}(\dot{X}, f^\flat) = 0$ pour tout $\dot{X} \in \dot{\Gamma}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{g}_\sigma(F))^{[\cdot,\sigma]}$.

Maintenant c'est une conséquence de la Proposition 4.1.5 que $f^\flat = 0$, d'où $f = 0$. □

4.3 Distributions admissibles invariantes spécifiques

Soit H est groupe compact, on note $\Pi(H)$ l'ensemble de classes d'équivalences de représentations irréductibles de H. Si $\mathbf{d} \in \Pi(H)$, on note $\xi_{\mathbf{d}} \in C^\infty(H)$ son caractère. La représentation triviale de H est notée $\mathbb{1}_H$.

Nous reprendrons les arguments de [40, Part III].

Définition 4.3.1. Soit Θ une distribution sur un ouvert $\mathcal{W}$ de $\tilde{G}$. Soit K_0 un sous-groupe ouvert compact de $\tilde{G}$. On dit que Θ est $(\tilde{G}, K_0)$-admissible en $\tilde{\gamma} \in \tilde{G}$ si

- $\tilde{\gamma} K_0 \subset \mathcal{W}$;
- pour tout sous-groupe ouvert $K_1 \subset K_0$ et $\mathbf{d} \in \hat{K}_1$, on a

$$\Theta * \xi_{\mathbf{d}} = 0$$

  où $*$ désigne la convolution, sauf s'il existe $x \in G(F)$ tel que les restrictions à $xK_0x^{-1} \cap K_1$ de $\mathbb{1}_{xK_0x^{-1}}$ et de $\mathbf{d}$ s'entrelacent.

On dit que Θ est admissible en $\tilde{\gamma}$ s'il existe K_0 tel que Θ est $(\tilde{G}, K_0)$-admissible en $\tilde{\gamma}$. Si Θ est admissible partout, on dit qu'elle est admissible.

Cette définition s'applique à tout groupe localement profini. Notre but est le résultat suivant.

Théorème 4.3.2. *Soit Θ une distribution invariante spécifique de $\tilde{G}$. Soient $\sigma \in G(F)$, $\tilde{\sigma} \in \mathbf{p}^{-1}(\sigma)$. Si Θ est admissible en $\tilde{\sigma}$, alors Θ est représentée par une fonction localement intégrable au voisinage de $\tilde{\sigma}$, qui est localement constante sur $\tilde{G}_{\mathrm{reg}}$. La fonction $|D^G|^{\frac{1}{2}}\Theta$ est localement bornée.*

De plus, il existe des coefficients uniques $c_{\dot{u}}$, où $\dot{u} \in \dot{\Gamma}(\mathfrak{g}_\sigma(F))^{[\cdot,\sigma]}$, tels que

- *$c_{z\dot{u}} = z^{-1} c_{\dot{u}}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^\times$,*
- *pour $X \in \mathfrak{g}_\sigma(F)$ suffisamment voisin de 0, avec des conventions de §4.1, on a*

$$\Theta(\tilde{\sigma} \exp X) = \sum_{u \in \Gamma(\mathfrak{g}_\sigma(F))^{[\cdot,\sigma]}} c_{\dot{u}} \widehat{\mu_{\dot{u}}}(X).$$

Enregistrons d'abord une conséquence qui justifiera toute opération de caractères dans les sections suivantes.

Corollaire 4.3.3. *Soit (π, V) une représentation admissible irréductible de $\tilde{G}$ et notons Θ_π son caractère. Alors Θ_π vérifie les assertions du Théorème 4.3.2 en tout $\tilde{\sigma} \in \tilde{G}$ semi-simple.*

Démonstration. Prenons $K_0 \subset \tilde{G}$ un sous-groupe ouvert compact tel que $V^{K_0} \neq \{0\}$. Le corollaire résulte du fait que Θ_π est $(\tilde{G}, K_0)$-admissible partout ; voir [31]. □

Fixons Θ, σ et $\tilde{\sigma}$ comme dans l'énoncé. Indiquons très grossièrement l'approche de [40].

Étape 1 Ces assertions étant locales et $G(F)$-invariantes, on effectue la descente semi-simple avec un voisinage $G^\sigma(F)$-invariant $\mathcal{V}^\flat \subset \mathfrak{g}_\sigma(F)$ et $\widetilde{W}^\flat = \mu_m \exp(\mathcal{V}^\flat)$, tous suffisamment petits, comme dans la Proposition 4.2.2. On obtient ainsi la distribution descendue $\theta \in \mathcal{J}(\mathcal{V}^\flat)^{[\cdot,\sigma]}$. D'après la remarque 4.2.4, cette étape est de nature analytique si l'on se limite à l'action de $G^\sigma(F)^\diamond$, donc est identique à celle de [40, §18].

Étape 2 Soient K_0, K_1 et $\mathbf{d}$ comme dans la Définition 4.3.1. Afin d'exploiter la condition sur l'entrelacement de $\mathbb{1}_{xK_0x^{-1}}$ et $\mathbf{d}$, on utilise la théorie d'orbites co-adjointes de Howe. Précisons.

On prend un s-réseau $L \subset \mathfrak{g}(F)$ (cf. [40, §17]), i.e. un réseau suffisamment petit, de sorte que $K := \exp L$ est ouvert et compact de $\tilde{G}$, et il est muni de la structure de groupe à l'aide de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff ; on suppose de plus que $\frac{1}{2}L$ les vérifie aussi, et on pose $K^{1/2} := \exp(\frac{1}{2}L)$, c'est distingué dans K.

Notons $\Pi(K)$ l'ensemble de classes d'équivalence de représentations irréductibles de K et $\Pi^{1/2}(K)$ l'ensemble de $K^{1/2}$-orbites dans $\Pi(K)$. Notons L^* le dual de L par rapport à $\psi \circ B$.

La théorie de Howe fournit une bijection

$$\begin{aligned} \Pi^{1/2}(K) &\longrightarrow \{K^{1/2} - \text{orbites dans } \mathfrak{g}(F)/L^*\} \\ \mathbf{d} &\longmapsto \mathcal{O}_{\mathbf{d}}, \end{aligned}$$

qui est caractérisée par la formule de caractère à la Kirillov

$$d(\mathbf{d})\xi_{\mathbf{d}}(\exp \lambda) = \sum_{X \in \mathcal{O}_{\mathbf{d}}} \psi(B(X,\lambda)), \tag{IV.13}$$

où $d(\mathbf{d})$ est le degré formel et on a $d(\mathbf{d}) = [K : K_X]^{\frac{1}{2}}$, ici $X \in \mathfrak{g}(F)/L^*$ désigne un élément quelconque dans $\mathcal{O}_{\mathbf{d}}$ et K_X désigne son stabilisateur sous l'action de K.

On en déduit que, soient $(L_i, K_i, \mathbf{d}_i)$ comme ci-dessus et $\mathcal{O}_i$ l'orbite co-adjointe associée ($i = 1, 2$), alors pour $x \in G(F)$, les $K_i^{1/2}$-orbites de représentations $\mathbf{d}_1$ et ${}^x\mathbf{d}_2$ restreintes à $K_1 \cap xK_2x^{-1}$, où ${}^x\mathbf{d}_2$ est la représentation de xK_2x^{-1} transportée de $\mathbf{d}_2$ par $\mathrm{Ad}(x)$, s'entrelacent si et seulement si $\mathcal{O}_1 \cap {}^x\mathcal{O}_2 \neq \emptyset$.

Observons que ce formalisme ne fait pas intervenir le revêtement. Les arguments de [40, §§19-20] s'y adaptent immédiatement.

Étape 3 Appliquons le formalisme de §4.1 au groupe $G^\sigma(F)$. En particulier, on a fixé une norme $|\cdot|$ sur $\mathfrak{g}_\sigma(F)$.

Prenons des s-réseaux $L \subset \mathfrak{g}(F)$ et $\Lambda \subset \mathfrak{g}_\sigma(F)$ tel que $\Lambda \subset L$. On demande de plus que Λ est bien adapté (par rapport à un sous-groupe compact maximal spécial et un Lévi de $G_\sigma(F)$), alors $\Lambda^* := \{X \in \mathfrak{g}_\sigma(F) : \forall v \in \Lambda,\ \psi \circ B(X, v) = 1\}$ l'est aussi. Prenons un voisinage V de $\mathfrak{g}_{\sigma,\mathrm{nil}}(F)^{|\cdot|=1}$ dans $\mathfrak{g}_\sigma(F)^{|\cdot|=1}$, suffisamment petit de sorte que la Proposition 4.1.7 s'applique.

On en déduit des sous-groupes compacts ouverts $K := \exp L$ et $K_\sigma := \exp \Lambda$. Quitte à rétrécir Λ, on peut supposer que

$$[\cdot, \sigma]|_{K_\sigma} = 1.$$

Lemme 4.3.4 (cf. [40, Lemma 21.2]). *Quitte à rétrécir V, il existe $\nu > 0$ tel que pour tout $X \in \mathfrak{g}_\sigma(F)$ avec $|X| > q^\nu$, on a*

$$\langle \hat{\theta}, \mathbb{1}_{X+\Lambda^*} \rangle \neq 0 \ \Rightarrow X \in F \cdot V.$$

Autrement dit, $\hat{\theta} \in \mathcal{J}(V, q^\nu, \Lambda^*)^{\boldsymbol{\omega}}$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que l'on n'utilise que la partie "analytique" des arguments de descente dans [40]. En particulier, on n'utilise que la conjugaison par des éléments dans $G^\sigma(F)^\diamond$. D'autre part, la théorie des orbites co-adjointes est encore utilisable sur le revêtement, comme expliqué à l'étape 2. □

Démonstration du Théorème 4.3.2. D'après la Proposition 4.1.7, il existe
- un sous-ensemble ouvert compact $\Omega \in \mathfrak{g}_\sigma(F)$,
- $\hat{\theta}_1 \in \mathcal{J}(\Omega)^{\boldsymbol{\omega}}$,
- un $\mathfrak{o}_F$-réseau $\Lambda_1^* \supset \Lambda^*$,

tels que

$$j_{\Lambda_1^*}\hat{\theta}_1 = j_{\Lambda_1^*}\hat{\theta}.$$

On note $\Lambda_1 \subset \Lambda$ le $\mathfrak{o}_F$-réseau tel que $\Lambda_1^* = (\Lambda_1)^*$. En inversant la transformée de Fourier, on en déduit que $\theta_1|_{\Lambda_1} = \theta|_{\Lambda_1}$.

La distribution θ_1 vérifie les assertions dans le Théorème 4.1.9 sur un voisinage $G_\sigma(F)$-invariant de 0 dans $\mathfrak{g}_\sigma(F)$, donc θ les vérifie aussi sur un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}_\sigma(F)$. En particulier, quitte à rétrécir $\mathcal{V}^\flat$, θ est représentée par une fonction localement intégrable F avec $F(y^{-1}Xy) = [y,\sigma]F(X)$. Donc $\Theta|_{\widetilde{W}^\flat}$ est représentée par la fonction invariante localement intégrable $g\tilde{\sigma}\exp(X)g^{-1} \mapsto F(X)$. Le développement local en termes des distributions $\widehat{\mu_{\tilde{u}}}$ résulte immédiatement du Théorème 4.1.10. □

5 La formule des traces locale

5.1 Le noyau tronqué

Soient F un corps local de caractéristique nulle et G un F-groupe réductif connexe. On considère un revêtement

$$1 \to \mu_m \to \tilde{G} \xrightarrow{\mathbf{p}} G(F) \to 1.$$

Fixons un sous-groupe de Lévi minimal M_0 et un sous-groupe compact maximal spécial K, supposés en bonne position. Lorsque F est archimédien, on normalise des mesures de Haar sur les groupes linéaires en question comme dans [14], ce qui déterminent les mesures sur les revêtements selon la convention dans [Chapitre III]. Lorsque F est non archimédien, les mesures sont normalisées comme dans §2 sauf que l'on choisit les mesures sur les radicaux unipotentes de sorte que $\gamma(G|M) = 1$ pour tout $M \in \mathcal{L}(M_0)$, ce qui est loisible selon la Remarque 2.6.6.

La formule des traces locale concerne la représentation R de $\tilde{G} \times \tilde{G}$ sur $L^2(\tilde{G})$ définie par

$$(R(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)\phi)(\tilde{x}) = \phi(\tilde{y}_1^{-1}\tilde{x}\tilde{y}_2), \quad \phi \in L^2(\tilde{G}).$$

Soit $f \in C_c^\infty(\tilde{G})$, on peut former l'opérateur $R(f)$. Pour la formule des traces locale, on s'intéresse plutôt aux fonctions test dans les espaces

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\tilde{G}) &: \quad \text{fonctions de Schwartz-Harish-Chandra,} \\ \mathcal{H}(\tilde{G}) &: \quad \text{fonctions lisses à support compact et } \tilde{K}\text{-finies,} \end{aligned}$$

ainsi que leurs variantes μ_m-équivariantes $\mathcal{C}_-(\tilde{G})$, $\mathcal{C}_{--}(\tilde{G})$, $\mathcal{H}_-(\tilde{G})$ et $\mathcal{H}_{--}(\tilde{G})$. D'ici jusqu'à la Proposition 5.7.6, on prend

$$f(\tilde{x}, \tilde{y}) = f_1(\tilde{x})f_2(\tilde{y}), \quad f_1 \in \mathcal{H}_-(\tilde{G}),\ f_2 \in \mathcal{H}_{--}(\tilde{G}).$$

On l'abrégera souvent par l'expression $f = f_1 f_2$.

On montre que $R(f)$ est de noyau $K(\tilde{x},\tilde{y}) = \int_{G(F)} f_1(\tilde{x}\tilde{w})f_2(\tilde{w}\tilde{y})\,\mathrm{d}w$, où $\tilde{w} \in \mathbf{p}^{-1}(w)$ est quelconque ; ce choix ne change pas le produit en question selon notre hypothèse sur f_1, f_2. Conservons cette convention dans les intégrales dans cette section.

Notons $\Gamma_{\mathrm{ell}}(G(F))$ l'espace des orbites semi-simples F-elliptiques dans $G(F)$. Il est muni d'une mesure de Radon de sorte que pour toute $\phi \in C_c(\Gamma_{\mathrm{ell}}(G(F)) \cap \Gamma_{\mathrm{reg}}(G(F)))$, on a

$$\int_{\Gamma_{\mathrm{ell}}(G(F))} \phi(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma = \sum_T |W(G(F),T(F))|^{-1} \int_{T(F)} \phi(t)\,\mathrm{d}t$$

où T parcourt les classes de conjugaison des F-tores maximaux elliptiques dans G, et

$$W(G(F),T(F)) := N_G(T)(F)/T(F).$$

Ici $T(F)$ est muni de la mesure de Haar de sorte que $\mathrm{mes}(T(F)/A_G(F)) = 1$. Idem pour tout Lévi de G. Alors la formule d'intégrale de Weyl s'écrit

$$\int_{G(F)} h(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{M\in\mathcal{L}(M_0)} |W_0^M||W_0^G|^{-1} \int_{\Gamma_{\mathrm{ell}}(M(F))} |D(\gamma)|\iota_M \int_{A_M(F)^\dagger\backslash G(F)} h(x^{-1}\gamma x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\gamma$$

pour toute $h \in C_c(G(F))$, où $D(\gamma)$ signifie le discriminant de Weyl ; on peut restreindre l'intégrale à $\Gamma_{\mathrm{ell},G-\mathrm{reg}}(M(F))$. Puisque $K(x,x) = K(\tilde{x},\tilde{x}) = \int_{G(F)} f_1(\tilde{w})f_2(x^{-1}\tilde{w}x)\,\mathrm{d}w$ ne dépend que de x, on peut appliquer cette formule et déduire que $K(x,x)$ est égal à

$$\sum_{M\in\mathcal{L}(M_0)} |W_0^M||W_0^G|^{-1} \int_{\Gamma_{\mathrm{ell}}(M(F))} |D(\gamma)|\iota_M \int_{A_M(F)^\dagger\backslash G(F)} f_1(x_1^{-1}\tilde{\gamma}x_1)f_2(x^{-1}x_1^{-1}\tilde{\gamma}x_1x)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}\gamma.$$

C'est le développement géométrique. Pour le côté spectral, on utilise la formule de Plancherel (Corollaire 2.6.5) et la Remarque 2.6.6 sur le choix des mesures. Soit $M \in \mathcal{L}(M_0)$, munissons $\Pi_{2,-}(\tilde{M})$ de la mesure de sorte que pour toute $h \in C^\infty_{c,\text{-}}(\tilde{G})$. Comme les mesures sont choisies de sorte que $\gamma(G|M) = 1$ pour tout $M \in \mathcal{L}(M_0)$, on a

$$h(1) = \sum_{M\in\mathcal{L}(M_0)} |W_0^M||W_0^G|^{-1} \int_{\Pi_{2,-}(\tilde{M})} d(\sigma)\mu(\sigma)\mathrm{tr}\,(\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\sigma,h))\,\mathrm{d}\sigma.$$

Fixons $\tilde{x} \in \tilde{G}$ et posons

$$h(\tilde{y}) = \int_{G(F)} f_1(\tilde{x}\tilde{w})f_2(\tilde{w}\tilde{y}\tilde{x})\,\mathrm{d}w.$$

On vérifie que $h(1) = K(x,x)$ et $h = \check{f}_1 * f_2^x$; en particulier, $h \in C^\infty_{c,\text{-}}(\tilde{G})$. Notons V l'espace vectoriel sous-jacent de σ et choisissons $\mathcal{B}_{\tilde{P}}(\sigma)$ une base orthonormée de l'espace hilbertien des opérateurs de Hilbert-Schmidt $\mathcal{I}_{\tilde{P}}(V) \to \mathcal{I}_{\tilde{P}}(V)$, formée d'éléments $\tilde{K}$-finis. On en déduit comme dans [14, §2] que

$$\mathrm{tr}\,(\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\sigma,h)) = \sum_{S\in\mathcal{B}_{\tilde{P}}(\sigma)} \mathrm{tr}\,(\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\sigma,\tilde{x})S(f))\overline{\mathrm{tr}\,(\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\sigma,\tilde{x})S)},$$
$$S(f) := d(\sigma)\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\sigma,f_2)S\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\sigma,\check{f}_1).$$

Alors la formule de Plancherel entraîne que $K(x,x)$ est égal à

$$\sum_{M\in\mathcal{L}(M_0)} |W_0^M||W_0^G|^{-1} \int_{\Pi_{2,-}(\tilde{M})} \mu(\sigma) \sum_{S\in\mathcal{B}_{\tilde{P}}(\sigma)} \mathrm{tr}\,(\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\sigma,\tilde{x})S(f))\overline{\mathrm{tr}\,(\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\sigma,\tilde{x})S)}\,\mathrm{d}\sigma.$$

On note $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_{M_0}$ comme d'habitude. On munit $\mathfrak{a}_0$ (resp. $G(F)$) d'une norme (resp. une fonction hauteur) $\|\cdot\|$ comme dans [14, §4]. Adoptons le formalisme de (G, M)-familles de [Chapitre III].

Soit $M \in \mathcal{L}(M_0)$. Si $\mathcal{Y} = \{Y_P : P \in \mathcal{P}(M)\}$ est un ensemble (G, M)-orthogonal, on note $S_M(\mathcal{Y})$ son enveloppe convexe dans $\mathfrak{a}_M^G$. Soit $T \in \mathfrak{a}_0$. Pour tout $P_0 \in \mathcal{P}(M_0)$, on note T_{P_0} l'unique élément dans $\overline{\mathfrak{a}_{P_0}^+} \cap (W_0^G \cdot T)$. Alors $\{T_{P_0} : P_0 \in \mathcal{P}(M_0)\}$ forme un ensemble (G, M_0)-orthogonal positif ; on le note abusivement par T. Posons

$$d(T) := \inf\{\langle \alpha, T_{P_0}\rangle : P_0 \in \mathcal{P}(M_0), \alpha \in \Delta_{P_0}\} \geq 0.$$

On dit que T est suffisamment régulier si $d(T) \gg 0$. Dans ce qui suit, nous supposerons toujours que $T \in \mathfrak{a}_{M_0,F}$. Définissons $u(x, T)$ la fonction caractéristique de l'ensemble

$$\{x = k_1 m k_2 : k_1, k_2 \in K, H_{M_0}(m) \in S_{M_0}(T)\}.$$

On la regarde comme une fonction sur $A_G(F)^\dagger K\backslash G(F)/K$. Le noyau tronqué est défini par l'intégrale absolument convergente

$$K^T(f) := \iota_G \int_{A_G(F)^\dagger\backslash G(F)} K(x,x)u(x,T)\,\mathrm{d}x.$$

5.2 Le côté géométrique

On a

$$K^T(f) = \sum_{M\in\mathcal{L}(M_0)} |W_0^M||W_0^G|^{-1} \int_{\Gamma_{\mathrm{ell}}(M(F))} K^T(\gamma, f)\,\mathrm{d}\gamma$$

où

$$K^T(\gamma, f) = |D(\gamma)|\iota_M^2 \int_{(A_M(F)^\dagger\backslash G(F))^2} f_1(x_1^{-1}\tilde{\gamma}x_1) f_2(x_2^{-1}\tilde{\gamma}x_2) u_M^\dagger(x_1, x_2, T)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2,$$

$$u_M^\dagger(x_1, x_2, T) := \iota_G \iota_M^{-1} \int_{A_G(F)^\dagger\backslash A_M(F)^\dagger} u(x_1^{-1} a x_2, T)\,\mathrm{d}a.$$

Cf. [14, p.30]. Soient $M \in \mathcal{L}(M_0)$, $x_1, x_2 \in G(F)$. On définit l'ensemble (G, M)-orthogonal $\mathcal{Y}_M(x_1, x_2, T)$ associé à

$$Y_P(x_1, x_2, T) := T_P + H_P(x_1) - H_{\bar{P}}(x_2), \quad P \in \mathcal{P}(M),$$

où T_P est la projection sur $\mathfrak{a}_M$ de T_{P_0}, $P_0 \in \mathcal{P}(M_0)$, $P_0 \subset P$ quelconque. C'est un (G, M)-ensemble orthogonal positif pourvu que $d(T)$ soit suffisamment régulier par rapport à (x_1, x_2), ce que nous supposons.

D'autre part, Arthur [14, (3.8)] a défini la fonction combinatoire $\sigma_M(\cdot, \mathcal{Y}_M(x_1, x_2, T))$ sur $\mathfrak{a}_M^G$. Comme $\mathcal{Y}_M(x_1, x_2, T)$ est positif, $\sigma_M(\cdot, \mathcal{Y}_M(x_1, x_2, T))$ est la fonction caractéristique de $S_M(\mathcal{Y})$; en particulier, elle est à support compact. Donc on peut définir la fonction poids

$$v_M^\dagger(x_1, x_2, T) := \iota_G \iota_M^{-1} \int_{A_G(F)^\dagger\backslash A_M(F)^\dagger} \sigma_M(H_M(a), \mathcal{Y}_M(x_1, x_2, T))\,\mathrm{d}a.$$

Posons ainsi

$$J^T(\gamma, f) := |D(\gamma)|\iota_M^2 \int\limits_{(A_M(F)^\dagger\backslash G(F))^2} f_1(x_1^{-1}\tilde{\gamma}x_1)f_2(x_2^{-1}\tilde{\gamma}x_2)v_M^\dagger(x_1,x_2,T)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2,$$

$$J^T(f) := \sum_{M\in\mathcal{L}(M_0)} |W_0^M||W_0^G|^{-1} \int\limits_{\Gamma_{\mathrm{ell}}(M(F))} J^T(\gamma, f)\,\mathrm{d}\gamma.$$

Lemme 5.2.1. *Soit $\delta > 0$, il existe des constantes $C, \epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ telles que*

$$|u_M^\dagger(x_1,x_2,T) - v_M^\dagger(x_1,x_2,T)| \leq Ce^{-\epsilon_1\|T\|}$$

pour tout (T, x_1, x_2) tel que $d(T) \geq \delta\|T\|$ et $\|x_i\| \leq e^{\epsilon_2\|T\|}$, $i = 1, 2$.

Démonstration. Si F est non archimédien, alors il existe des constantes $C_1, \epsilon_1, \epsilon_2$ telles que

$$u_M(x_1^{-1}ax_2, T) = \sigma_M(H_M(a), \mathcal{Y}_M(x_1,x_2,T)), \quad \forall a \in A_M(F)$$

pour tout (T, x_1, x_2) comme dans l'assertion, d'après [14, p.38]. On conclut en intégrant cette égalité sur $A_G(F)^\dagger\backslash A_M(F)^\dagger$.

Si F est archimédien, l'argument de [14, pp.39-42] marche sans modification. En fait, on se ramène à comparer des intégrales sur des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathfrak{a}_M^Q$, $\mathfrak{a}_Q^G$, où $Q \in \mathcal{F}(M)$. De tels arguments ne font pas intervenir $A_G(F)^\dagger$ et $A_M(F)^\dagger$. □

Corollaire 5.2.2. *Soit $\delta > 0$, alors il existe des constantes $C, \epsilon > 0$ telles que*

$$|K^T(f) - J^T(f)| \leq Ce^{-\epsilon\|T\|}$$

pour tout T tel que $d(T) \geq \delta\|T\|$.

Démonstration. On itère [14, §4]. En fait, la démonstration ne repose que sur le Lemme 5.2.1 et des majorations qui n'ont rien à faire avec le revêtement. □

Pour l'instant, supposons que F est non archimédien. Introduisons une version discrète de la construction dans [Chapitre III, §4.2]. Notons $q_F := |\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F|$ et posons

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}}_M^\dagger &:= (\tilde{\mathfrak{a}}_{M,F}^\dagger + \mathfrak{a}_G)/\mathfrak{a}_G,\\
\tilde{\mathcal{L}}_M &:= (\tilde{\mathfrak{a}}_{M,F} + \mathfrak{a}_G)/\mathfrak{a}_G,\\
\mathcal{L}_M &:= (\mathfrak{a}_{M,F} + \mathfrak{a}_G)/\mathfrak{a}_G,\\
\mathcal{L}_0 &:= \mathcal{L}_{M_0}.
\end{aligned}$$

Lemme 5.2.3. *On a*

$$[\tilde{\mathcal{L}}_M : \tilde{\mathcal{L}}_M^\dagger] = [\tilde{\mathfrak{a}}_{M,F} : \tilde{\mathfrak{a}}_{M,F}^\dagger][\tilde{\mathfrak{a}}_{G,F} : \tilde{\mathfrak{a}}_{G,F}^\dagger]^{-1}.$$

Démonstration. D'une part, on a la suite exacte

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \dfrac{(\tilde{\mathfrak{a}}_{M,F}^\dagger + \mathfrak{a}_G) \cap \tilde{\mathfrak{a}}_{M,F}}{\tilde{\mathfrak{a}}_{M,F}^\dagger} \arrow[r] & \dfrac{\tilde{\mathfrak{a}}_{M,F}}{\tilde{\mathfrak{a}}_{M,F}^\dagger} \arrow[r] & \dfrac{\tilde{\mathfrak{a}}_{M,F}}{(\tilde{\mathfrak{a}}_{M,F}^\dagger + \mathfrak{a}_G) \cap \tilde{\mathfrak{a}}_{M,F}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1\ , \\
& & & \dfrac{\tilde{\mathfrak{a}}_{M,F} + \mathfrak{a}_G}{\tilde{\mathfrak{a}}_{M,F}^\dagger + \mathfrak{a}_G} &
\end{tikzcd}$$

et $(\tilde{\mathfrak{a}}_{M,F}+\mathfrak{a}_G)/(\tilde{\mathfrak{a}}^\dagger_{M,F}+\mathfrak{a}_G)=\tilde{\mathcal{L}}_M/\tilde{\mathcal{L}}^\dagger_M$. D'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{(\tilde{\mathfrak{a}}^\dagger_{M,F}+\mathfrak{a}_G)\cap\tilde{\mathfrak{a}}_{M,F}}{\tilde{\mathfrak{a}}^\dagger_{M,F}} &= \frac{\tilde{\mathfrak{a}}^\dagger_{M,F}+(\mathfrak{a}_G\cap\tilde{\mathfrak{a}}_{M,F})}{\tilde{\mathfrak{a}}^\dagger_{M,F}} = \frac{\tilde{\mathfrak{a}}^\dagger_{M,F}+\tilde{\mathfrak{a}}_{G,F}}{\tilde{\mathfrak{a}}^\dagger_{M,F}}\\ &= \frac{\tilde{\mathfrak{a}}_{G,F}}{\tilde{\mathfrak{a}}^\dagger_{M,F}\cap\tilde{\mathfrak{a}}_{G,F}} = \frac{\tilde{\mathfrak{a}}_{G,F}}{\tilde{\mathfrak{a}}^\dagger_{G,F}}\end{aligned}$$

car $\tilde{\mathfrak{a}}^\dagger_{G,F}=\mathfrak{a}_G\cap\tilde{\mathfrak{a}}^\dagger_{M,F}$. Cela permet de conclure. □

On pose $A_M(F)^1 := A_M(F)\cap\operatorname{Ker}H_M$ et $A_M(F)^{\dagger,1} := A_M(F)^\dagger\cap\operatorname{Ker}H_M$.

Lemme 5.2.4. *On a*

$$\iota_M[A_M(F)^1 : A_M(F)^{\dagger,1}][\tilde{\mathfrak{a}}_{M,F}:\tilde{\mathfrak{a}}^\dagger_{M,F}]=1.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme du serpent au diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & A_M(F)^{\dagger,1} \arrow[r] \arrow[d] & A_M(F)^\dagger \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{\mathfrak{a}}^\dagger_{M,F} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\ 1 \arrow[r] & A_M(F)^1 \arrow[r] & A_M(F) \arrow[r] & \tilde{\mathfrak{a}}_{M,F} \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

□

Soient $k\in\mathbb{R}_{>0}$, $M\in\mathcal{L}(M_0)$ et $P\in\mathcal{P}(M)$. Posons

$$\begin{aligned}\mu_{\alpha,k} &:= k\log q_F\cdot\alpha^\vee, \quad \alpha\in\Delta_P,\\ \mathcal{L}_{M,k} &:= k\log q_F\cdot\mathbb{Z}\Delta_P^\vee.\end{aligned}$$

Alors $\mathcal{L}_{M,k}$ est un réseau dans $\mathfrak{a}_M^G$, qui est indépendant de P. Si $k\in\mathbb{Z}_{>0}$ est suffisamment divisible, alors $\mathcal{L}_{M,k}\subset\tilde{\mathcal{L}}_M$.

On a déjà normalisé la mesure de Haar sur $i\mathfrak{a}_G^*$ (resp. $i\mathfrak{a}_M^*$) dans §2.1, ce qui détermine la mesure duale sur $\mathfrak{a}_G$ (resp. $\mathfrak{a}_M$) comme dans [Chapitre III, §2.5]. On vérifie que la mesure induite sur $\mathfrak{a}_M^G$ satisfait à $\operatorname{mes}(\mathfrak{a}_M^G/\tilde{\mathcal{L}}_M)=1$. Supposons toujours k suffisamment divisible et posons

$$\theta_{P,k}(\lambda) := \operatorname{mes}(\mathfrak{a}_M^G/\mathcal{L}_{M,k})^{-1}\prod_{\alpha\in\Delta_P}\left(1-e^{-\langle\lambda,\mu_{\alpha,k}\rangle}\right), \qquad \lambda\in\mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}. \tag{IV.14}$$

On va transformer $v_M^\dagger(x_1,x_2,T)$ en une expression qui ne dépend pas de $A_M(F)^\dagger$ et $A_G(F)^\dagger$. Les arguments sont identiques à ceux dans [14, §6] sauf que certains facteurs supplémentaires interviennent. Montrons qu'ils disparaissent à la fin. On a

$$\begin{aligned}v_M^\dagger(x_1,x_2,T) = \iota_G\iota_M^{-1}[A_M(F)^1 : A_M(F)^{\dagger,1}]^{-1}[A_G(F)^1 : A_G(F)^{\dagger,1}]\cdot\\ \cdot\sum_{X\in\tilde{\mathfrak{a}}^\dagger_{M,F}/\tilde{\mathfrak{a}}^\dagger_{G,F}}\sigma_M(X,\mathcal{Y}_M(x_1,x_2,T)).\end{aligned}$$

On a $\tilde{\mathfrak{a}}^\dagger_{M,F}/\tilde{\mathfrak{a}}^\dagger_{G,F}=\tilde{\mathfrak{a}}^\dagger_{M,F}/(\tilde{\mathfrak{a}}^\dagger_{M,F}\cap\mathfrak{a}_G)=\tilde{\mathcal{L}}^\dagger_M$. Comme dans [14, §6], la somme sur $\tilde{\mathcal{L}}^\dagger_M$ se transforme en

$$\sum_{\nu\in\tilde{\mathcal{L}}_M^{\dagger,\vee}/\mathcal{L}_M^\vee}\sum_{P\in\mathcal{P}(M)}[\mathcal{L}_M:\tilde{\mathcal{L}}^\dagger_M]^{-1}\operatorname{mes}(\mathfrak{a}_M^G/\mathcal{L}_{M,k})^{-1}\lim_{\Lambda\to 0}\left(\sum_{X\in\mathcal{L}_M/\mathcal{L}_{M,k}} e^{\langle\Lambda+\nu,X_P(Y_P)\rangle}\theta_{P,k}(\Lambda+\nu)^{-1}\right)$$

où $\Lambda \in (\mathfrak{a}^G_{M,\mathbb{C}})^*$ est supposé en position générale proche de 0, et $Y_P = Y_P(x_1, x_2, T)$. Donc $v^\dagger_M(x_1, x_2, T)$ est le produit de

$$\iota_G \iota_M^{-1}[A_M(F)^1 : A_M(F)^{\dagger,1}]^{-1}[A_G(F)^1 : A_G(F)^{\dagger,1}][\tilde{\mathcal{L}}_M : \tilde{\mathcal{L}}^\dagger_M]^{-1}$$

avec

$$\sum_{\nu \in \tilde{\mathcal{L}}^{\dagger,\vee}_M / \mathcal{L}^\vee_M} \lim_{\Lambda \to 0} \left(\sum_{P \in \mathcal{P}(M)} [\mathcal{L}_M : \mathcal{L}_{M,k}]^{-1} \sum_{X \in \mathcal{L}_M / \mathcal{L}_{M,k}} e^{\langle \Lambda + \nu, X_P(Y_P) \rangle} \theta_{P,k}(\Lambda + \nu)^{-1} \right).$$

La première expression vaut 1 d'après les Lemmes 5.2.3, 5.2.4, tandis que la limite dans la deuxième expression est exactement celle dans le cas des groupes réductifs. C'est justifié de reprendre tous les arguments d'Arthur pour obtenir l'expression

$$v^\dagger_M(x_1, x_2, T) = \sum_{\xi \in \frac{1}{N}\mathcal{L}^\vee_0 / \mathcal{L}^\vee_0} q_\xi(T) e^{\langle \xi, T \rangle}, \tag{IV.15}$$

où

- $T \in \mathcal{L}_0 \cap \mathfrak{a}^+_0$ est suffisamment régulier en un sens indépendant de M, et $\mathfrak{a}^+_0$ est une chambre quelconque dans $\mathfrak{a}_0$;
- $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ suffisamment divisible, indépendamment de M ;
- pour tout ξ, q_ξ est un polynôme.

C'est loisible de parler du terme constant $\tilde{v}_M(x_1, x_2) := q_0(0)$. La somme sur ξ provient de la somme précédente sur $\nu \in \tilde{\mathcal{L}}^{\dagger,\vee}_M / \mathcal{L}^\vee_M$, donc elle dépend du choix de $A_M(F)^\dagger$; cependant le terme q_0 correspondant à $\xi = 0$ n'en dépend pas. En adaptant [14, (6.6)], on obtient

$$\tilde{v}_M(x_1, x_2) = \lim_{\Lambda \to 0} \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} |\mathcal{L}_M / \mathcal{L}_{M,k}|^{-1} \sum_{X \in \mathcal{L}_M / \mathcal{L}_{M,k}} e^{\langle \Lambda, X_P + H_P(x_1) - H_{\bar{P}}(x_2) \rangle} \theta_{P,k}(\Lambda)^{-1} \tag{IV.16}$$

où $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ est suffisamment divisible en un sens indépendant de M. Cela permet de définir

$$\tilde{J}_{\tilde{M}}(\gamma, f) := |D(\gamma)| \iota^2_M \int_{(A_M(F)^\dagger \backslash G(F))^2} f_1(x_1^{-1}\gamma x_1) f_2(x_2^{-1}\gamma x_2) \tilde{v}_M(x_1, x_2) \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2. \tag{IV.17}$$

pour tout $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{ell}}(M(F))$.

Proposition 5.2.5. *Supposons F non archimédien. Alors il existe une décomposition*

$$J^T(f) = \sum_{\xi \in \frac{1}{N}\mathcal{L}^\vee_0 / \mathcal{L}^\vee_0} p_\xi(T, f) e^{\langle \xi, T \rangle}, \qquad T \in \mathcal{L}_0 \cap \mathfrak{a}^+_0,$$

où T, $\mathfrak{a}^+_0$, N sont comme précédemment et $p_\xi(\cdot, f)$ sont des polynômes. Son terme constant $\tilde{J}(f) := p_0(0, f)$ admet une décomposition

$$\tilde{J}(f) = \sum_{M \in \mathcal{L}(M_0)} |W^M_0| |W^G_0|^{-1} \int_{\Gamma_{\mathrm{ell}}(M(F))} \tilde{J}_{\tilde{M}}(\gamma, f) \, \mathrm{d}\gamma.$$

Remarque 5.2.6. Les distributions K^T, J^T sont W^G_0-invariantes, donc $\tilde{J}(f)$ ne dépend pas du choix de $\mathfrak{a}^+_0$. En particulier, le terme constant $\tilde{J}(f)$ n'en dépend pas.

Le cas archimédien est plus simple du point de vue combinatoire.

Proposition 5.2.7. *Supposons F archimédien. Alors la Proposition 5.2.5 demeure valable si l'on remplace les réseaux $\mathcal{L}_M$, $\tilde{\mathcal{L}}_M$, $\tilde{\mathcal{L}}^\dagger_M$, $\mathcal{L}_{M,k}$ par $\mathfrak{a}^G_M$, et si l'on remplace $\theta_{P,k}$ par la fonction θ_P définie dans [Chapitre III, §4.1] dans la définition* (IV.17) *de $\tilde{J}_{\tilde{M}}(\gamma, f)$.*

5.3 Le côté spectral

Fixons $P_0 \in \mathcal{P}(M_0)$. On a

$$K^T(f) = \sum_{M \in \mathcal{L}(M_0)} |W_0^M||W_0^G|^{-1} \int_{\Pi_{2,-}(\tilde{M})} K^T(\sigma, f)\, \mathrm{d}\sigma,$$
$$K^T(\sigma, f) := \mu(\sigma)\iota_G \int_{A_G(F)^\dagger \backslash G(F)} \sum_{S \in \mathcal{B}_{\tilde{P}}(\sigma)} \mathrm{tr}\,(\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\sigma, \tilde{x})S(f))\overline{\mathrm{tr}\,(\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\sigma, \tilde{x})S)}u(x, T)\, \mathrm{d}x,$$

où $P \in \mathcal{P}(M_0)$ est standard.

Soient $(\sigma, V) \in \Pi_{2,-}(\tilde{M})$, $\chi \in \mathrm{Im}X(\tilde{M})$. Rappelons que l'on peut réaliser $\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\sigma \otimes \chi)$ tel que l'espace $\mathcal{I}_{\tilde{P}}(V)$ muni de l'action de $\tilde{K}$ ne dépend pas de χ. Dans ce qui suit, on fixe un point base σ dans chaque $\mathrm{Im}X(\tilde{M})$-orbite de $\Pi_{2,-}(\tilde{M})$.

Donc dans l'expression de $K^T(f)$ on peut regrouper les termes selon M et les $\mathrm{Im}X(\tilde{M})$-orbites de $\Pi_{2,-}(\tilde{M})$. On se ramène à l'étude de l'intégrale

$$\iota_G \int_{A_G(F)^\dagger \backslash G(F)} \mathrm{tr}\,(\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\sigma \otimes \chi, \tilde{x})S(f))\overline{\mathrm{tr}\,(\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\sigma \otimes \chi, \tilde{x})S)}u(x, T)\, \mathrm{d}x$$

où $S \in \mathcal{B}_{\tilde{P}}(\sigma)$ est fixé, et χ varie dans $\mathrm{Im}X(\tilde{M})$.

On note $\mathcal{O}$ la $\mathrm{Im}X(\tilde{M})$-orbite contenant σ. Pour simplifier la vie, supposons momentanément F non archimédien. En examinant les définitions dans §2, on voit que S et $S(f)$ appartiennent à $C^\infty(\mathcal{O}, \tilde{P})$, regardées comme fonctions $\chi \mapsto S_\chi$ et $\chi \mapsto S(f)_\chi$, et que

$$\mathrm{tr}\,(\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\sigma \otimes \chi, \tilde{x})S(f)) = E_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}(S(f)_\chi)(\tilde{x}),$$
$$\mathrm{tr}\,(\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\sigma \otimes \chi, \tilde{x})S) = E_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}(S_\chi)(\tilde{x}).$$

Avec la notation usuelle $(a|b) = a\bar{b}$ pour $a, b \in \mathbb{C}$, définissons le produit scalaire tronqué des coefficients

$$\Omega_{\tilde{P}}^T(\sigma \otimes \chi, S(f), S) := \iota_G \int_{A_G(F)^\dagger \backslash G(F)} \left(E_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}(S(f)_\chi)(\tilde{x}) \,|\, E_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}(S_\chi)(\tilde{x}) \right) u(x, T)\, \mathrm{d}x$$

On obtient donc l'expression suivante pour $K^T(f)$:

(IV.18)
$$\sum_{M \in \mathcal{L}(M_0)} |W_0^M||W_0^G|^{-1} \sum_\sigma \sum_S |\mathrm{Stab}_{\mathrm{Im}X(\tilde{M})}(\sigma)|^{-1} \int_{\mathrm{Im}X(\tilde{M})} \mu(\sigma \otimes \chi)\Omega_{\tilde{P}}^T(\sigma \otimes \chi, S(f), S)\, \mathrm{d}\sigma,$$

où

- σ parcourt un système de représentants de $\Pi_{2,-}(\tilde{M})/\mathrm{Im}X(\tilde{M})$;
- S parcourt $\mathcal{B}_{\tilde{P}}(\sigma)$;
- $P \in \mathcal{P}(M)$ est standard.

Remarque 5.3.1. Dans [14, §§7-8], Arthur choisit le langage des intégrales d'Eisenstein au lieu des coefficients d'induites. Nous laissons le soin au lecteur de réconcilier les définitions.

Comme dans [14], le côté spectral nécessite des majorations en trois étapes. Donnons-en une esquisse.

De K^T à k^T Pour $M \in \mathcal{P}(M_0)$, $P \in \mathcal{P}(M_0)$ standard et $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{A}_{2,-}(\tilde{M})$, on note $\varphi_P : \mathfrak{a}_0 \to \mathbb{R}$ la fonction caractéristique de l'ensemble

$$\{H \in \mathfrak{a}_0 : \langle \varpi, H \rangle \leq 0, \forall \varpi \in \hat{\Delta}_P\}$$

et on pose

$$r^T_{\tilde{P}}(\Psi_1|\Psi_2) := \iota_G \int\limits_{A_G(F)^\dagger \backslash M(F)} (\Psi_1(\tilde{m})|\Psi_2(\tilde{m}))\varphi_P(H_M(m) - T_P)\,\mathrm{d}m.$$

Pour tout $\sigma \in \Pi_{2,-}(\tilde{M})$ et $S_1, S_2 \in L(\sigma, \tilde{P})$, on pose

$$\omega^T_{\tilde{P}}(\sigma, S_1, S_2) := \sum_{P_1 \supset P_0} r^T_{\tilde{P}_1}(E^{\tilde{G}}_{\tilde{P}}(S_1)^w_{\tilde{P}_1} \,|\, E^{\tilde{G}}_{\tilde{P}}(S_2)^w_{\tilde{P}_1}).$$

Avec la même convention de (IV.18), posons $k^T(f)$ égale à

(IV.19)
$$\sum_{M \in \mathcal{L}(M_0)} |W_0^M||W_0^G|^{-1} \sum_\sigma \sum_S |\mathrm{Stab}_{\mathrm{Im}X(\tilde{M})}(\sigma)|^{-1} \int\limits_{\mathrm{Im}X(\tilde{M})} \mu(\sigma \otimes \chi)\omega^T_{\tilde{P}}(\sigma \otimes \chi, S(f), S)\,\mathrm{d}\sigma.$$

Proposition 5.3.2. *Soit $\delta > 0$, il existe des constantes $C, \epsilon > 0$ telles que*

$$|K^T(f) - k^T(f)| \leq Ce^{-\epsilon\|T\|}$$

pourvu que $d(T) \geq \delta\|T\|$.

Démonstration. C'est l'analogue de [14, Lemma 10.1]. Le fait crucial est la majoration [14, Theorem 8.1] reliant $\Omega^T_{\tilde{P}}$ et $\omega^T_{\tilde{P}}$, dont les ingrédients de la preuve sont établis dans §2. □

De k^T à $J^T_{\mathbf{spec}}$ On définit une distribution $J^T_{\mathrm{spec}}(f)$ comme dans [14, Lemma 11.1], qui consiste en des fonctions c de Harish-Chandra et des fonctions combinatoires. Sa définition précise est malheureusement trop compliquée à rapporter ici. On montre que pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ et tout $\delta > 0$, il existe une constante c_n telle que $|k^T(f) - J^T_{\mathrm{spec}}(f)| \leq c_n\|T\|^{-n}$ lorsque $d(T) \geq \delta\|T\|$. Vu l'étape précédente et la majoration pour $|K^T(f) - J^T(f)|$, on obtient $|J^T(f) - J^T_{\mathrm{spec}}(f)| \leq c_n\|T\|^{-n}$ sous les mêmes conditions, quitte à agrandir c_n.

D'autre part, on montre, comme dans la preuve de [14, Lemma 11.1], que

$$J^T_{\mathrm{spec}}(f) = \sum_{\xi \in \frac{1}{N}\mathcal{L}_0^\vee/\mathcal{L}_0^\vee} q_\xi(T, f)e^{\langle \xi, T\rangle},$$

pourvu que $T \in \mathcal{L}_0 \cap \mathfrak{a}_0^+$ et $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ suffisamment divisible, où $\mathfrak{a}_0^+$ est une chambre fixée. Les fonctions $q_\xi(\cdot, T)$ sont des polynômes. Or $J^T(f)$ admet une décomposition du même genre pour $T \in \mathfrak{a}_0^+$. Comme $\mathfrak{a}_0^+$ est quelconque, la majoration précédente pour $|J^T(f) - J^T_{\mathrm{spec}}(f)|$ affirme que $J^T(f) = J^T_{\mathrm{spec}}(f)$ pour de tels T.

Notons $\tilde{J}_{\mathrm{spec}}(f) := q_0(0, f)$ le terme constant. Il en résulte que $\tilde{J}_{\mathrm{spec}}(f) = \tilde{J}(f)$.

Description de $\tilde{J}_{\mathbf{spec}}$ Donnons finalement une expression explicite pour $\tilde{J}_{\mathrm{spec}}$ comme dans [14, Corollary 11.2, Proposition 11.3].

Soient $L, M \in \mathcal{L}(M_0)$, $L \supset M$. Nous posons

$$W^L(M)_{\mathrm{reg}} := \{t \in W^L(M) : \det(t - 1|\mathfrak{a}_M^L) \neq 0\}.$$

Soit $t \in W^G(M)$, on note $\Pi_{2,-}(\tilde{M})^t := \{\sigma \in \Pi_{2,-}(\tilde{M}) : t\sigma \simeq \sigma\}$. Soient $L, M \in \mathcal{L}(M_0)$, $L \supset M$, $R \in \mathcal{P}(L)$, $P \in \mathcal{P}(M)$, $\zeta \in i\mathfrak{a}_L^*$, $t \in W^L(M)_{\mathrm{reg}}$, $\sigma \in \Pi_{2,-}(\tilde{M})^t$. Introduisons les objets suivants.

– $\Pi := P \cap L$, $R(\Pi)$ est l'unique élément de $\mathcal{P}(M)$ tel que $R(\Pi) \cap L = \Pi$ et $R(\Pi) \subset R$.
– Fixons des facteurs normalisants faibles $r_{\tilde{Q}'|\tilde{Q}}(\sigma)$ (rappel : la Définition 3.1.2), d'où les opérateurs d'entrelacement normalisés $R_{\tilde{Q}'|\tilde{Q}}(\sigma)$ pour $Q, Q' \in \mathcal{P}(M)$.
– $R_{\tilde{P}}(t, \sigma) := \sigma(\tilde{t}) \circ A(\tilde{t}) \circ R_{t^{-1}\tilde{P}|\tilde{P}}(\sigma)$, où $\tilde{t} \in \tilde{L} \cap \tilde{K}$ est un représentant de t, et $\sigma(\tilde{t})$ est l'isomorphisme $\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\tilde{t}\sigma) \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_{\tilde{P}}(\sigma)$ induit par un isomorphisme fixé $\tilde{t}\sigma \xrightarrow{\sim} \sigma$. C'est bien défini à une constante multiplicative près.
– $\tau_{1,\tilde{R}}(\zeta)$ est
$$\mathrm{tr}\left(\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\sigma, \check{f}_1) R_{\tilde{P}}(t,\sigma)^{-1} J_{\tilde{P}|\widetilde{R(\Pi)}}(\sigma_\zeta) J_{\tilde{P}|\widetilde{R(\Pi)}}(\sigma)^{-1}\right).$$
– $\tau_{2,\tilde{R}}(\zeta)$ est
$$\mathrm{tr}\left(J_{\widetilde{R(\Pi)}|\tilde{P}}(\sigma)^{-1} J_{\widetilde{R(\Pi)}|\tilde{P}}(\sigma_\zeta) R_{\tilde{P}}(t,\sigma) \mathcal{I}_{\tilde{P}}(\sigma, f_2)\right).$$
– $\tilde{J}_{\tilde{L}}(\sigma, t, f)$ est
$$\lim_{\zeta \to 0} \sum_{R \in \mathcal{P}(L)} \tau_{1,\tilde{R}}(\zeta) \tau_{2,\tilde{\tilde{R}}}(\zeta) |\mathcal{L}_L / \mathcal{L}_{L,k}|^{-1} \sum_{X \in \mathcal{L}_L/\mathcal{L}_{L,k}} e^{\langle \zeta, X_R \rangle} \theta_{R,k}(\zeta)^{-1} \tag{IV.20}$$
avec $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ suffisamment divisible.
– On note
$$\begin{aligned}\Sigma_P^{\mathrm{red}}(\sigma) &:= \{\beta \in \Sigma_P^{\mathrm{red}} : r_\beta \text{ a un pôle en } \sigma\} \\ &= \{\beta \in \Sigma_P^{\mathrm{red}} : \mu_\beta \text{ a un zéro en } \sigma\},\end{aligned}$$
et on pose
$$\epsilon_\sigma(t) := (-1)^{|t\Sigma_P^{\mathrm{red}}(\sigma) \cap \Sigma_{\bar{P}}^{\mathrm{red}}(\sigma)|}. \tag{IV.21}$$

Pour L, σ comme ci-dessus, on munit $\mathrm{Im}X(\tilde{L}) \cdot \sigma$ de la mesure quotient déduite de la mesure de $i\mathfrak{a}_L^*$.

Proposition 5.3.3. *On a*
$$\tilde{J}_{\mathrm{spec}}(f) = \sum_{L,M,t} |W_0^M||W_0^G|^{-1} |\det(t-1|\mathfrak{a}_M^L)|^{-1} \sum_\sigma \int_{\mathrm{Im}X(\tilde{L})\cdot\sigma} \epsilon_{\sigma'}(t) \tilde{J}_{\tilde{L}}(\sigma', t, f) \, \mathrm{d}\sigma'$$
où L, M, t sont comme précédemment, et σ parcourt les $\mathrm{Im}X(\tilde{L})$-orbites de $\Pi_{2,t}(\tilde{M})^t$.

Démonstration. Puisque la théorie des opérateurs d'entrelacement, des fonctions c de Harish-Chandra et la formule de Plancherel pour revêtements sont établies dans §2, il suffit d'adapter [14, §11]. Comme pour le côté géométrique, des facteurs de la forme ι_M, $[A_M(F)^1 : A_M(F)^{\dagger,1}]$ ou $[\tilde{\mathfrak{a}}_{M,F} : \tilde{\mathfrak{a}}_{M,F}^\dagger]$ (où $M \in \mathcal{L}(M_0)$) peuvent intervenir dans $J_{\mathrm{spec}}^T(f)$, donc dans la description de $\tilde{J}_{\tilde{L}}(\sigma', t, f)$. Toutefois on peut inspecter les arguments d'Arthur et montrer, comme dans §5.2, que ces facteurs se compensent à l'aide des Lemmes 5.2.3, 5.2.4. Ces compensations ne sont pas surprenantes car le formalisme est choisi de sorte que si $\tilde{G} = \mu_m \times G(F)$ et $\mathbf{p} = (1, \mathrm{id})$, alors on revient à la situation considérée par Arthur. $\square$

5.4 Interlude : R-groupes

Avant de procéder à la formule des traces locale, rappelons brièvement le formalisme de R-groupes de [15, §2]. Des sources possibles des démonstrations sont [76, 77]. Les preuves reposent sur

– la formule de Plancherel,
– la normalisation des opérateurs d'entrelacement,
– une formule de Casselman [83, I.4.1] des coefficients matriciels du module de Jacquet, pour le cas archimédien.

On a tous ces ingrédients pour les revêtements.

Soient $M \in \mathcal{L}(M_0)$, $P \in \mathcal{P}(M)$, $(\sigma, V) \in \Pi_{2,-}(\tilde{M})$. Notons $\Pi_\sigma(\tilde{G})$ l'ensemble des classes de constituants irréductibles de $\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\sigma)$, qui ne dépend pas du choix de P. Notons $W_\sigma := \{w \in W^G(M) : w\sigma \simeq \sigma\}$. Fixons des facteurs normalisants faibles $r_{\tilde{Q}'|\tilde{Q}}(\sigma)$ et les opérateurs d'entrelacement normalisés $R_{\tilde{Q}'|\tilde{Q}}(\sigma)$.

Soient $w \in W_\sigma$ et $\tilde{w} \in \tilde{K}$ un représentant, alors σ se prolonge en une représentation du groupe $\widetilde{M}_w^+$ engendré par $\tilde{M}$ et $\tilde{w}$; désignons cette représentation par σ_w. Ce prolongement est unique à une constante près, nous y imposerons des conditions plus tard.

Définissons l'opérateur d'entrelacement

$$\begin{aligned} A(\sigma_w) : \mathcal{I}_{w^{-1}\tilde{P}}(\sigma) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_{\tilde{P}}(\sigma), \\ \phi(\cdot) &\mapsto \sigma_w(\tilde{w})\phi(\tilde{w}^{-1}\cdot). \end{aligned}$$

Posons $R_{\tilde{P}}(w, \sigma) := A(\sigma_w) R_{w^{-1}\tilde{P}|\tilde{P}}(\sigma)$ et

$$\begin{aligned} W_\sigma^0 &:= \{w \in W_\sigma : R_{\tilde{P}}(w, \sigma) \in \mathbb{C}^\times \mathrm{id}\}, \\ R_\sigma &:= W_\sigma / W_\sigma^0. \end{aligned}$$

Notons que R_σ ne dépend pas de P.

L'un des faits de la théorie de R-groupes est que W_σ^0 est le groupe de Weyl associé au système de racines engendré par $\{\beta \in \Sigma_P^{\mathrm{red}} : \mu_\beta(\sigma) = 0\}$. Si l'on fixe une chambre $\mathfrak{a}_\sigma^+$ de ce système, alors on peut identifier R_σ et $\{w \in W_\sigma : w\mathfrak{a}_\sigma^+ = \mathfrak{a}_\sigma^+\}$; avec ce choix, on peut écrire

$$W_\sigma = W_\sigma^0 \rtimes R_\sigma.$$

Supposons maintenant que pour tout $w \in W_\sigma^0$, σ_w est choisi de sorte que $R_{\tilde{P}}(w, \sigma) = \mathrm{id}$. L'application $r \mapsto R_{\tilde{P}}(r, \sigma)$ pour $r \in R_\sigma$ n'est pas forcément un homomorphisme : il existe un 2-cocycle $\eta_\sigma : R_\sigma^2 \to \mathbb{C}^\times$ tel que $R_{\tilde{P}}(r_1 r_2, \sigma) = \eta_\sigma(r_1, r_2) R_{\tilde{P}}(r_1, \sigma) R_{\tilde{P}}(r_2, \sigma)$. Plus précisément, on a $\eta_\sigma(r_1, r_2) = A(\sigma_{r_1 r_2}) A(\sigma_{r_1})^{-1} A(\sigma_{r_2})^{-1}$. Fixons désormais une extension centrale

$$1 \to Z_\sigma \to \tilde{R}_\sigma \to R_\sigma \to 1 \tag{IV.22}$$

de sorte que Z_σ est fini et l'image de η_σ dans $H^2(\tilde{R}_\sigma, \mathbb{C}^\times)$ est triviale. Autrement dit, il existe $\xi_\sigma : \tilde{R}_\sigma \to \mathbb{C}^\times$ tel que $\eta_\sigma(r_1, r_2) = \xi_\sigma(r_1 r_2) \xi_\sigma(r_1)^{-1} \xi_\sigma(r_2)^{-1}$ pour tous $r_1, r_2 \in \tilde{R}_\sigma$. On en déduit le caractère $\chi_\sigma : Z_\sigma \to \mathbb{C}^\times$ tel que $\xi_\sigma(zr) = \chi_\sigma(z)\xi_\sigma(r)$ pour tout $r \in \tilde{R}_\sigma$ et tout $z \in Z_\sigma$. Si l'on pose

$$\tilde{R}_{\tilde{P}}(r, \sigma) := \xi_\sigma(r)^{-1} R_{\tilde{P}}(r, \sigma), \qquad r \in \tilde{R}_\sigma$$

alors $r \mapsto \tilde{R}_{\tilde{P}}(r, \sigma)$ est un homomorphisme avec $\tilde{R}_{\tilde{P}}(zr, \sigma) = \chi_\sigma(z)^{-1} \tilde{R}_{\tilde{P}}(r, \sigma)$.

Notons $\Pi(\tilde{R}_\sigma, \chi_\sigma)$ l'ensemble des classes de représentation irréductibles de $\tilde{R}_\sigma$ dont la restriction sur Z_σ est χ_σ. Le théorème principal des R-groupes (d'après Harish-Chandra, Knapp, Stein, Silberger) s'exprime comme suit.

Théorème 5.4.1. *La représentation $\mathcal{R}_{\tilde{P}}(r,\tilde{x}) = \tilde{R}_{\tilde{P}}(r,\sigma)\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\sigma,\tilde{x})$ de $\tilde{R}_\sigma \times \tilde{G}$ sur $\mathcal{I}_{\tilde{P}}(V)$ admet une décomposition*

$$\mathcal{R}_{\tilde{P}} = \bigoplus_{\rho \in \Pi(\tilde{R}_\sigma,\chi_\sigma)} (\rho^\vee \boxtimes \pi_\rho)$$

où $\rho \mapsto \pi_\rho$ est une bijection de $\Pi(\tilde{R}_\sigma,\chi_\sigma)$ sur $\Pi_\sigma(\tilde{G})$. En particulier, on a

$$\mathrm{tr}\,(\tilde{R}_{\tilde{P}}(r,\sigma)\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\sigma,f)) = \sum_{\rho \in \Pi(\tilde{R}_\sigma,\chi_\sigma)} \mathrm{tr}\,\rho^\vee(r)\cdot\langle\Theta_{\pi_\rho},f\rangle, \qquad r\in\tilde{R}_\sigma,\ f\in C^\infty_{c,-\!-}(\tilde{G}).$$

Remarque 5.4.2. Selon notre normalisation $R_{\tilde{P}}(w,\sigma) = \mathrm{id}$ pour tout $w \in W^0_\sigma$, on voit que l'opérateur $\tilde{R}_{\tilde{P}}(r,\sigma)$ est indépendant du plongement $R_\sigma \hookrightarrow W_\sigma$, autrement dit indépendant du choix de la chambre $\mathfrak{a}^+_\sigma$.

Enregistrons des propriétés de R-groupes, dont les preuves se trouvent dans [15].

1 Fixons $\mathfrak{a}^+_\sigma$. Soit $L \in \mathcal{L}(M)$ tel que $\mathfrak{a}^+_\sigma$ contient un ouvert de $\mathfrak{a}_L$. Notons R^L_σ le R-groupe relativement à $\tilde{L}$ au lieu de $\tilde{G}$, alors on a une identification $R^L_\sigma = R_\sigma \cap W^L(M)$. Vu les propriétés des opérateurs d'entrelacement normalisés, on peut tirer l'extension centrale (IV.22) par $R^L_\sigma \hookrightarrow R_\sigma$ et obtient

$$1 \to Z_\sigma \to \tilde{R}^L_\sigma \to R^L_\sigma \to 1$$

qui trivialise encore les 2-cocycles ξ^L_σ associés à $\tilde{L}$.

2 Soit L comme ci-dessus. On note $\mathbf{K}_0(\tilde{R}_\sigma,\chi_\sigma)$ l'espace des caractères virtuels engendré par $\Pi(\tilde{R}_\sigma,\chi_\sigma)$. Idem pour $\mathbf{K}_0(\tilde{R}^L_\sigma,\chi_\sigma)$. Alors un élément de $\mathbf{K}_0(\tilde{R}_\sigma,\chi_\sigma)$ est induit de $\mathbf{K}_0(\tilde{R}^L_\sigma,\chi_\sigma)$ si et seulement si le caractère virtuel associé de $\tilde{G}$ est induit d'un caractère virtuel engendré par $\Pi_\sigma(\tilde{L})$.

3 Le signe $\epsilon_\sigma(t)$ défini dans (IV.21) est égal à $(-1)^{\ell(w^0)}$ si $t = w^0 r$ avec $w^0 \in W^0_\sigma$, $r \in R_\sigma$.

Supposons de plus que de tels choix (eg. facteurs normalisants, $\mathfrak{a}^+_\sigma$, σ_w, l'extension centrale (IV.22), etc.) sont faits pour tout $w\sigma$, $w \in W^G_0$, de façon compatible. Par exemple, on exige que l'action de $w \in W^G_0$ induit un isomorphisme $\tilde{R}_\sigma \xrightarrow{\sim} \tilde{R}_{w\sigma}$. L'étape suivante est d'introduire des espaces de paramètres convenables pour le côté spectral.

Soit (M,σ,r) un triplet avec $M \in \mathcal{L}(M_0)$, $\sigma \in \Pi_{2,-}(\tilde{M})$, $r \in \tilde{R}_\sigma$. On dit qu'il est essentiel si pour tout $z \in Z_\sigma$ tel que zr est conjugué à r, on a $\chi_\sigma(z) = 1$. Le groupe de Weyl W^G_0 opère sur de tels triplets par $w(M,\sigma,r) = (wM, w\sigma, wrw^{-1})$. Posons $R_{\sigma,\mathrm{reg}} := R_\sigma \cap W^G(M)_{\mathrm{reg}}$, notons $\tilde{R}_{\sigma,\mathrm{reg}}$ son image réciproque dans $\tilde{R}_\sigma$ et

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(\tilde{G}) &:= \{(M,\sigma,r) : \text{un triplet essentiel.}\},\\
\tilde{T}_{\mathrm{disc}}(\tilde{G}) &:= \{(M,\sigma,r) \in T(\tilde{G}) : W^0_\sigma \cdot r \cap W^G(M)_{\mathrm{reg}} \neq \emptyset\},\\
\tilde{T}_{\mathrm{ell}}(\tilde{G}) &:= \{(M,\sigma,r) \in T(\tilde{G}) : r \in \tilde{R}_{\sigma,\mathrm{reg}}\},
\end{aligned}$$

On a $\tilde{T}(\tilde{G}) \supset \tilde{T}_{\mathrm{disc}}(\tilde{G}) \supset \tilde{T}_{\mathrm{ell}}(\tilde{G})$. Le groupe $\mathrm{Im}X(\tilde{G})$ opère sur $\tilde{T}_{\mathrm{ell}}(\tilde{G})$ par $\chi\cdot(M,\sigma,r) = (M,\sigma\otimes\chi,r)$, ce qui munit $\tilde{T}_{\mathrm{ell}}(\tilde{G})$ d'une structure de variété analytique connexe. On vérifie aussi que $\tilde{T}(\tilde{G}) = \bigsqcup_{L\in\mathcal{L}(M_0)} \tilde{T}_{\mathrm{ell}}(\tilde{L})$. Donc $\tilde{T}(\tilde{G})$ et $\tilde{T}_{\mathrm{disc}}(\tilde{G})$ sont aussi munis de structures de variété analytique. Posons

$$\begin{aligned}
T(\tilde{G}) &:= \tilde{T}(\tilde{G})/W^G_0,\\
T_{\mathrm{disc}}(\tilde{G}) &:= \tilde{T}_{\mathrm{disc}}(\tilde{G})/W^G_0,\\
T_{\mathrm{ell}}(\tilde{G}) &:= \tilde{T}_{\mathrm{ell}}(\tilde{G})/W^G_0.
\end{aligned}$$

Certes, on peut introduire l'équivariance sous μ_m et définir les espaces $T_-(\tilde{G})$, $T_{--}(\tilde{G})$, etc. Munissons $T_{\mathrm{disc},-}(\tilde{G})$ de la mesure de Radon telle que

$$\int_{T_{\mathrm{disc},-}(\tilde{G})} \theta(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \sum_{\tau \in T_{\mathrm{disc},-}(\tilde{G})/\mathrm{Im}X(\tilde{G})} |\tilde{R}_{\sigma,r}|^{-1} \int_{\mathrm{Im}X(\tilde{G})\cdot\tau} \theta(\tau')\,\mathrm{d}\tau'$$

pour toute $\theta \in C_c(T_{\mathrm{disc},-}(\tilde{G}))$, où $\tilde{R}_{\sigma,r}$ est le stabilisateur de r dans $\tilde{R}_\sigma$, et $\mathrm{Im}X(\tilde{G})\cdot\tau$ est muni de la mesure quotient déduite de la mesure de $i\mathfrak{a}_G^*$.

Définition 5.4.3. Une représentation $\pi \in \Pi_{\mathrm{temp}}(\tilde{G})$ est dite elliptique si la restriction de son caractère sur l'ensemble des éléments réguliers F-elliptiques n'est pas nulle. On définit les représentations virtuelles tempérées elliptiques de la même manière.

La proposition suivante décrit les représentations tempérées (resp. virtuelles tempérées) en termes du R-groupe ; elle explique aussi la notation $T_{\mathrm{ell},-}(\tilde{G})$. Sa démonstration dans le cas non archimédien dans [15, §2] nécessite un résultat de Kazhdan qui sera prouvé dans le Théorème 5.8.10. Nous n'utiliserons pas cette proposition dans cet article.

Proposition 5.4.4. *Soient $M \in \mathcal{L}(M_0)$, $\sigma \in \Pi_{2,-}(\tilde{M})$ et $\rho \in \Pi(\tilde{R}_\sigma, \chi_\sigma)$. La représentation $\pi_\rho \in \Pi_\sigma(\tilde{G})$ est elliptique si et seulement si $\mathrm{tr}\,\rho$ ne s'annule pas sur $\tilde{R}_{\sigma,\mathrm{reg}}$. L'ensemble $T_{\mathrm{ell},-}(\tilde{G})$ paramètre une base de l'espace engendré par les représentations virtuelles tempérées elliptiques spécifiques de $\tilde{G}$.*

Pour tout $g \in \mathcal{C}_{--}(\tilde{G})$ et $\tau = (M, \sigma, r) \in T(\tilde{G})$, définissons

$$\Theta(\tau, g) := \mathrm{tr}\,(\tilde{R}_{\tilde{P}}(r,\sigma)\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\sigma, g)), \tag{IV.23}$$

$$i(\tau) := |W_\sigma^0|^{-1} \sum_{t \in W_\sigma^0 \cdot r \cap W^G(M)_{\mathrm{reg}}} \epsilon_\sigma(t) |\det(1 - t|\mathfrak{a}_M^G)|^{-1}, \quad \text{lorsque } \tau \in T_{\mathrm{disc}}(\tilde{G}). \tag{IV.24}$$

On vérifie que Θ est bien défini, c'est-à-dire qu'il ne dépend que de la W_0^G-orbite de (M, σ, r). D'autre part, on vérifie que $\Theta((M, \sigma, zr), g) = \chi_\sigma(z)^{-1}\Theta((M, \sigma, r), g)$ pour tout $z \in Z_\sigma$. Idem si l'on considère $g \in \mathcal{C}_-(\tilde{G})$ et $\tau \in T_{\mathrm{disc},--}(\tilde{G})$.

Soit $f = f_1 f_2$ avec $f_1 \in \mathcal{H}_-(\tilde{G})$, $f_2 \in \mathcal{H}_{--}(\tilde{G})$. On définit

$$I_{\mathrm{disc}}(f) = \int_{T_{\mathrm{disc},-}(\tilde{G})} i(\tau)\Theta(\tau^\vee, f_1)\Theta(\tau, f_2)\,\mathrm{d}\tau. \tag{IV.25}$$

Cette distribution est reliée à la formule des traces locale grâce au fait suivant.

Proposition 5.4.5. *Soit $f = f_1 f_2$ avec $f_1 \in \mathcal{H}_-(\tilde{G})$, $f_2 \in \mathcal{H}_{--}(\tilde{G})$. Alors $I_{\mathrm{disc}}(f)$ est la somme des termes correspondant à $L = G$ dans l'expression de $\tilde{J}_{\mathrm{spec}}(f)$ dans la Proposition 5.3.3.*

Démonstration. Il suffit de reprendre [15, pp.95-96]. □

5.5 La formule des traces locale

Le côté géométrique Soient $x = (x_1, x_2) \in G(F)^2$, $M \in \mathcal{L}(M_0)$. Rappelons que l'on choisit la mesure de Haar sur $\mathfrak{a}_M^G$ de sorte que $\mathrm{mes}(\mathfrak{a}_M^G/\tilde{\mathcal{L}}_M) = 1$, où $\tilde{\mathcal{L}}_M := (\tilde{\mathfrak{a}}_{M,F} + \mathfrak{a}_G)/\mathfrak{a}_G$. Les fonctions

$$v_P(\Lambda, x) := e^{\langle -H_P(x_2) + H_{\bar{P}}(x_1), \Lambda\rangle}, \qquad P \in \mathcal{P}(M)$$

forment une (G,M)-famille, d'où est défini le terme $v_M(x) = v_M(x_1,x_2)$. C'est le volume de l'enveloppe convexe de $\{-H_P(x_2) + H_{\bar{P}}(x_1) : P \in \mathcal{P}(M)\}$ dans $\mathfrak{a}_M^G$, donc est une fonction sur $(M(F)\backslash G(F)/K)^2$.

Soit $\gamma \in M_{G-\mathrm{reg}}(F)$, posons

$$J_{\tilde{M}}(\gamma, f) = |D(\gamma)|\iota_M^2 \int\limits_{(A_M(F)^\dagger\backslash G(F))^2} f_1(x_1^{-1}\tilde{\gamma}x_1)f_2(x_2^{-1}\tilde{\gamma}x_2)v_M(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2. \tag{IV.26}$$

Ce seront les ingrédients dans le côté géométrique de la formule des traces locale. Observons que $J_{\tilde{M}}(\gamma, f) = 0$ sauf si $\gamma \in \Gamma(M(F))^{\mathrm{bon}}$.

Le côté spectral On note $\Pi_{\mathrm{disc},-}(\tilde{G})$ la réunion des $\Pi_\sigma(\tilde{G})$ où $M \in \mathcal{L}(M_0)$, $\sigma \in \Pi_{2,-}(\tilde{M})^t$ pour un $t \in W^G(M)_{\mathrm{reg}}$. Idem pour tout Lévi de G. Soit $\pi = \pi_1^\vee \boxtimes \pi_2$ tel que la $X(\tilde{M})$-orbite de π_i rencontre de $\Pi_{\mathrm{disc},-}(\tilde{M})$, pour $i=1,2$. Soient $P,Q \in \mathcal{P}(M)$, on définit

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\pi, f) &:= \mathcal{I}_{\tilde{P}}(\pi_1^\vee, f_1) \boxtimes \mathcal{I}_{\tilde{P}}(\pi_2, f_2),\\
J_{\tilde{Q}|\tilde{P}}(\pi) &:= J_{\tilde{\bar{Q}}|\tilde{P}}(\pi_1^\vee) \boxtimes J_{\tilde{Q}|\tilde{P}}(\pi_2),\\
\pi_\Lambda &:= (\pi_{1,\Lambda})^\vee \boxtimes \pi_{2,\Lambda}, \quad \Lambda \in \mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*,\\
\mathcal{J}_{\tilde{Q}}(\Lambda, \pi, \tilde{P}) &:= J_{\tilde{Q}|\tilde{P}}(\pi)^{-1} J_{\tilde{Q}|\tilde{P}}(\pi_\Lambda).
\end{aligned}$$

En variant Q, on montre que les $\mathcal{J}_{\tilde{Q}}(\Lambda, \pi, \tilde{P})$ forment une (G,M)-famille à valeurs dans les endomorphismes de $\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\pi_1^\vee)\boxtimes\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\pi_2)$, méromorphes en π. D'où les opérateurs $\mathcal{J}_{\tilde{M}}(\pi, \tilde{P})$ méromorphes en π.

Désormais, nous supposons que $\pi = \pi_1^\vee \boxtimes \pi_2$ avec $\pi_1, \pi_2 \in \Pi_{\mathrm{disc},-}(\tilde{M})$.

Lemme 5.5.1. *Les coefficients matriciels de $\mathcal{J}_{\tilde{M}}(\pi, \tilde{P})$ sont analytiques. Leurs dérivées sont à croissance modérée pour de telles π_1, π_2.*

Démonstration. On reprend [14, Lemma 12.1]. □

Soient $\pi = \pi_1^\vee \boxtimes \pi_2$ comme ci-dessus et $f = f_1 f_2$ avec $f_1 \in \mathcal{H}_-(\tilde{G})$, $f_2 \in \mathcal{H}_{--}(\tilde{G})$, on pose

$$J_{\tilde{M}}(\pi, f) := \mathrm{tr}\,(\mathcal{J}_{\tilde{M}}(\pi, \tilde{P})\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\pi, f)). \tag{IV.27}$$

Nous démontrerons (la Proposition 5.7.4) que $J_{\tilde{M}}(\pi, \cdot)$ ne dépend pas du choix $P \in \mathcal{P}(M)$, ce qui justifie la notation.

Si $\tau = (M_1, \sigma, r) \in T_{\mathrm{disc},-}(\tilde{M})$, alors pour tout $\rho \in \Pi(\tilde{R}_\sigma^M, \chi_\sigma)$, la représentation π_ρ de $\tilde{M}$ appartient à $\Pi_{\mathrm{disc},-}(\tilde{M})$, donc c'est loisible de poser

$$J_{\tilde{M}}(\tau, f) := \sum_{\rho_1,\rho_2 \in \Pi(\tilde{R}_\sigma^M, \chi_\sigma)} \mathrm{tr}\,\rho_1(r) \cdot \mathrm{tr}\,\rho_2(r) \cdot J_{\tilde{M}}(\pi_{\rho_1}^\vee \boxtimes \pi_{\rho_2}, f). \tag{IV.28}$$

Théorème 5.5.2. *Soit $f = f_1 f_2$ avec $f_1 \in \mathcal{H}_-(\tilde{G})$, $f_2 \in \mathcal{H}_{--}(\tilde{G})$. Posons*

$$\begin{aligned}
J_{\mathrm{geom}}(f) &:= \sum_{M \in \mathcal{L}(M_0)} |W_0^M||W_0^G|^{-1}(-1)^{\dim A_M/A_G} \int\limits_{\Gamma_{\mathrm{ell}}(M(F))^{\mathrm{bon}}} J_{\tilde{M}}(\gamma, f)\,\mathrm{d}\gamma,\\
J_{\mathrm{spec}}(f) &:= \sum_{M \in \mathcal{L}(M_0)} |W_0^M||W_0^G|^{-1}(-1)^{\dim A_M/A_G} \int\limits_{T_{\mathrm{disc},-}(\tilde{M})} i^{\tilde{M}}(\tau) J_{\tilde{M}}(\tau, f)\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Alors on a $J_{\mathrm{geom}}(f) = J_{\mathrm{spec}}(f)$.

On observe aussi que le terme correspondant à $M = G$ dans $J_{\mathrm{spec}}(f)$ est exactement $I_{\mathrm{disc}}(f)$. Désormais, on note $J(f) := J_{\mathrm{geom}}(f) = J_{\mathrm{spec}}(f)$.

Démonstration. On itère l'argument pour [14, Proposition 4.1] avec récurrence sur $\dim G$. Donnons-en une esquisse très brève. On part des deux développements de $\tilde{J}(f)$ fournis par la Proposition 5.2.5 et la Proposition 5.3.3. Observons d'abord que les termes $\tilde{J}_{\tilde{M}}(\gamma, f)$ du côté géométrique sont similaires à $J_{\tilde{M}}(\gamma, f)$ sauf que la fonction poids est $\tilde{v}_M(x_1, x_2)$ définie dans (IV.16) au lieu de $v_M(x_1, x_2)$ lorsque F est non archimédien. Pour passer de l'un à l'autre, on introduit les fonctions

$$c_Q(\Lambda) := |\mathcal{L}_{M_Q}/\mathcal{L}_{M_Q,k}|^{-1} \sum_{X \in \mathcal{L}_{M_Q}/\mathcal{L}_{M_Q,k}} e^{\langle \Lambda, X_P \rangle} \theta_{\bar{Q},k}(\Lambda)^{-1} \theta_{\bar{Q}}(\Lambda)$$

pour $Q = M_Q U_Q \in \mathcal{F}(M_0)$, où $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ est suffisamment divisible.

Avec les notations dans [Chapitre III, §4], on montre que

$$\tilde{v}_M(x_1, x_2) = (-1)^{\dim A_M/A_G} \sum_{Q \in \mathcal{F}(M)} v_M^Q(x_1, x_2) c'_Q.$$

Comme dans [14], cela entraîne que

$$\tilde{J}(f) = \sum_{Q \in \mathcal{F}(M_0)} |W_0^{M_Q}||W_0^G|^{-1} (-1)^{\dim A_M/A_G} J_{\mathrm{geom}}^{\widetilde{M_Q}}(f_{\tilde{Q}}) \cdot c'_Q.$$

Lorsque F est archimédien, nous utilisons la convention dans la Proposition 5.2.7 de sorte que les résultats précédents demeurent valables. En fait, on aura $c_Q(\Lambda) = 1$ dans ce cas-là.

Les fonctions c_Q interviennent aussi dans le côté spectral via l'expression (IV.20) : on a

$$\tilde{J}_{\tilde{L}}(\sigma, t, f) = (-1)^{\dim A_M/A_L} \lim_{\zeta \to 0} \sum_{R \in \mathcal{P}(L)} \tau_{1,\tilde{\tilde{R}}}(\zeta) \tau_{2,\tilde{R}}(\zeta) c_R(\zeta) \theta_R(\zeta)^{-1}.$$

pour tout $L \in \mathcal{L}(M_0)$. Un raisonnement comme dans [14, pp.92-94] donne

$$\tilde{J}(f) = \sum_{Q \in \mathcal{F}(M_0)} |W_0^{M_Q}||W_0^G|^{-1} (-1)^{\dim A_M/A_G} J_{\mathrm{spec}}^{\widetilde{M_Q}}(f_{\tilde{Q}}) \cdot c'_Q.$$

Comme $c'_G \neq 0$, l'hypothèse de récurrence entraîne que $J_{\mathrm{geom}}(f) = J_{\mathrm{spec}}(f)$. □

5.6 Théorème de Paley-Wiener invariant tempéré

Transformation de Fourier invariante Soit $f \in \mathcal{C}(\tilde{G})$, on note $f_{\tilde{G}}$ la fonction sur $\Pi_{\mathrm{temp}}(\tilde{G})$ donnée par

$$f_{\tilde{G}}(\pi) = \Theta_\pi(f).$$

On note l'image de $f \mapsto f_{\tilde{G}}$ par $I\mathcal{C}(\tilde{G})$ (étymologie : I = l'adjectif “invariant”), qui est un sous-espace de l'espace vectoriel de fonctions sur $\Pi_{\mathrm{temp}}(\tilde{G})$. En se restreignant à $\mathcal{C}_{--}(\tilde{G})$ (resp. $\mathcal{C}_{-}(\tilde{G})$), on obtient l'espace $I\mathcal{C}_{--}(\tilde{G})$ (resp. $I\mathcal{C}_{-}(\tilde{G})$) formé de certaines fonctions sur $\Pi_{\mathrm{temp},-}(\tilde{G})$ (resp. $\Pi_{\mathrm{temp},--}(\tilde{G})$). Le théorème de Paley-Wiener invariant tempéré donnera une description de ces espaces comme des espaces vectoriels topologiques pour lesquels $f \mapsto f_{\tilde{G}}$ est ouverte et continue. Les résultats ci-dessous concernant $\mathcal{C}(\tilde{G})$ et $I\mathcal{C}(\tilde{G})$ seront valables si l'on rajoute l'indice $--$ (resp. $-$), pour des raisons évidentes.

Soient $M \in \mathcal{L}(M_0)$, $P = MU \in \mathcal{P}(M)$. Comme dans le cas de fonctions C_c^∞, on définit la descente parabolique

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}(\tilde{G}) \longrightarrow \mathcal{C}(\tilde{M}) \\ &f \longmapsto f_{\tilde{P}}(\tilde{m}) = \delta_P(m)^{\frac{1}{2}} \int_K \int_{U(F)} f(k^{-1}\tilde{m}uk)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}k, \quad \tilde{m} \in \tilde{M}. \end{aligned}$$

C'est une application linéaire continue bien définie : le cas archimédien est [38, Lemma 22], pour le cas non archimédien, on utilise la majoration [83, Proposition II.4.5].

On étend la définition de $f_{\tilde{G}}$ par linéarité à des combinaisons linéaires formelles des éléments de $\Pi_{\mathrm{temp}}(\tilde{G})$. On montre que pour tout $\sigma \in \Pi_{\mathrm{temp}}(\tilde{M})$, on a

$$(f_{\tilde{P}})_{\tilde{M}}(\sigma) = f_{\tilde{G}}(\sigma^G)$$

où σ^G désigne la somme directe des constituants irréductibles de $\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\sigma)$. Il en résulte que $f \mapsto f_{\tilde{P}}$ induit une application linéaire

$$\begin{aligned} I\mathcal{C}(\tilde{G}) &\longrightarrow I\mathcal{C}(\tilde{M}), \\ \varphi &\longmapsto \varphi_{\tilde{M}} \end{aligned}$$

qui ne dépend que de $\tilde{G}$ et $\tilde{M}$.

Définition 5.6.1. On dit que $\varphi \in I\mathcal{C}(\tilde{G})$ est cuspidal si pour tout $M \in \mathcal{L}(M_0)$, on a $\varphi_{\tilde{M}} = 0$ si $M \neq G$. On dit que $f \in \mathcal{C}(\tilde{G})$ est cuspidal si son image dans $I\mathcal{C}(\tilde{G})$ l'est.

Cela étend la définition d'Arthur de cuspidalité pour les fonctions C_c^∞.

Remarque 5.6.2. On peut aussi regarder $I\mathcal{C}(\tilde{G})$ comme un espace de fonctions sur $T(\tilde{G})$ grâce au Théorème 5.4.1. Ainsi, on regarde $f_{\tilde{G}}$ comme une fonction sur $T(\tilde{G})$ pour tout $f \in \mathcal{C}(\tilde{G})$.

Des espaces de Fréchet Soient $M, M' \in \mathcal{L}(M_0)$, on note

$$W(M'|M) := \{w \in W_0^G : wM = M'\}.$$

Soient $(\sigma, V) \in \Pi(\tilde{M})$, $\tilde{w} \in \tilde{K}$ un représentant de $w \in W(M|M')$ et $P \in \mathcal{P}(M)$, $P' \in \mathcal{P}(M')$. On pose

$$R_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\tilde{w}, \sigma) := A(\tilde{w}) R_{w^{-1}\tilde{P}'|\tilde{P}}(\sigma) : \mathcal{I}_{\tilde{P}}(V) \to \mathcal{I}_{\tilde{P}'}(\tilde{w}V).$$

On utilisera l'égalité suivante à plusieurs reprises. Soient $P'' \in \mathcal{P}(M'')$, $P' \in \mathcal{P}(M')$, $P \in \mathcal{P}(M)$, $w_1 \in W(M'|M)$, $w_2 \in W(M''|M')$ et $(\sigma, V) \in \Pi(\tilde{M})$. Alors

$$R_{\tilde{P}''|\tilde{P}}(\tilde{w}_2\tilde{w}_1, \sigma) = R_{\tilde{P}''|\tilde{P}'}(\tilde{w}_2, \tilde{w}_1\sigma) R_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\tilde{w}_1, \sigma) \tag{IV.29}$$

où les opérateurs $A(\cdot)$ sont ceux défini dans la Proposition 2.4.2, et les données définissant le R-groupe de $\tilde{w}_1\sigma$ sont obtenues par transport de structure.

L'application $f \mapsto f_{\tilde{G}}$ se factorise comme

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}(\tilde{G}) & \xrightarrow{\mathcal{F}_{\tilde{G}}} & \widehat{\mathcal{C}}(\tilde{G}) & \xrightarrow{\mathrm{tr}} & I\mathcal{C}(\tilde{G}) \\ f & \longmapsto & [\pi \mapsto f(\pi)] & \longmapsto & [\pi \mapsto \Theta_\pi(f)] \end{array}$$

où $\pi \in \Pi_{\mathrm{temp}}(\tilde{G})$. Le résultat suivant décrivant $\widehat{\mathcal{C}}(\tilde{G})$ est essentiellement une partie de la formule de Plancherel.

Théorème 5.6.3. *L'espace* $\widehat{\mathcal{C}}(\tilde{G})$ *est formé des opérateurs* $\Phi : (P,\sigma) \mapsto \Phi_{\tilde{P}}(\sigma) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{I}_{\tilde{P}}(V))$, *où* $P = MU \in \mathcal{F}(M_0)$, $(\sigma, V) \in \Pi_2(\tilde{M})$, *vérifiant les conditions suivantes.*

Lissité *Pour* P, M, σ *comme ci-dessus,* $\lambda \mapsto \Phi_{\tilde{P}}(\sigma_\lambda)$ *est lisse, où* $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$.

Symétrie *Soient* $M, M' \in \mathcal{L}(M_0)$, $P \in \mathcal{P}(M)$, $P' \in \mathcal{P}(M')$, $w \in W(M'|M)$ *et* $\tilde{w} \in \tilde{K}$ *un représentant de* w. *Alors*

$$\Phi_{\tilde{P}'}(\tilde{w}\sigma) = R_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\tilde{w},\sigma)\Phi_{\tilde{P}}(\sigma)R_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\tilde{w},\sigma)^{-1}.$$

Croissance (non archimédien) *Supposons* F *non archimédien, alors* Φ *est à support compact.*

Croissance (archimédien) *Supposons* F *archimédien. Soient* $n, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$, $M \in \mathcal{L}(M_0)$, $\sigma \in \Pi_2(\tilde{M})$ *et* D *un opérateur différentiel invariant sur* $i\mathfrak{a}_M^*$, *alors*

$$\sup_{P,\sigma,\delta_1,\delta_2} \|D(\Gamma_{\delta_2}\Phi_{\tilde{P}}(\sigma)\Gamma_{\delta_1})\|(1+\|\mu_\sigma\|)^n(1+\|\mu_{\delta_1}\|)^{m_1}(1+\|\mu_{\delta_2}\|)^{m_2} < +\infty$$

où
- $D(S(\sigma)) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}|_{\lambda=0}D(S(\sigma_\lambda))$ *pour* $S(\sigma)$ *une famille lisse d'opérateurs paramétrée par* $\sigma \in \Pi_2(\tilde{M})$ *;*
- δ_1, δ_2 *parcourent les* $\tilde{K}$*-types et* Γ_{δ_1}, Γ_{δ_2} *sont les projecteurs correspondants ;*
- *on définit la sous-algèbre de Cartan* $\mathfrak{h}$, *le caractère infinitesimal* μ_σ *et la norme hermitienne* $\|\cdot\|$ *comme dans la Définition 3.1.1 (**R8**), et* $\mu_{\delta_1}, \mu_{\delta_2} \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ *sont les plus hauts poids de* δ_1, δ_2 *respectivement.*

Dans le cas non archimédien $\widehat{\mathcal{C}}(\tilde{G})$ *est l'espace* $C^\infty(\Theta)^{\mathrm{inv}}$ *défini dans §2.6, donc est muni d'une topologie. Dans le cas archimédien, les expressions dans la dernière condition définissent des semi-normes pour* $\widehat{\mathcal{C}}(\tilde{G})$. *En tout cas* $\widehat{\mathcal{C}}(\tilde{G})$ *est un espace de Fréchet pour lequel* $\mathcal{F}_{\tilde{G}}$ *est un isomorphisme topologique.*

Cette description est indépendante de facteurs normalisants. En effet, la condition de symétrie peut aussi s'exprimer en termes des fonctions ${}^\circ c_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(w,\sigma)$ dans §2.6.

Définition 5.6.4. Posons $\mathrm{PW}(\tilde{G})$ l'espace des fonctions

$$\varphi : \tilde{T}(\tilde{G}) = \bigsqcup_{L \in \mathcal{L}(M_0)} \tilde{T}_{\mathrm{ell}}(\tilde{L}) \to \mathbb{C}$$

vérifiant les conditions suivantes.

Lissité La fonction φ est lisse.

Équivariance Pour tout $\tau = (M,\sigma,r) \in \tilde{T}(\tilde{G})$ et $z \in Z_\sigma$, on a $\varphi(z\tau) = \chi_\sigma(z)^{-1}\varphi(\tau)$.

Symétrie φ se factorise par $T(\tilde{G})$.

Croissance (non archimédien) φ est à support compact.

Croissance (archimédien) Soient $L \in \mathcal{L}(M_0)$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, D un opérateur différentiel invariant sur $i\mathfrak{a}_L^*$, alors

$$\|\varphi\|_{L,D,n} = \sup_{\tau=(M,\sigma,r)\in\tilde{T}_{\mathrm{ell}}(\tilde{L})} |D\varphi(\tau)|(1+\|\mu_\sigma\|)^n < +\infty$$

avec les conventions dans le Théorème 5.6.3.

Ainsi, l'espace $\mathrm{PW}(\tilde{G})$ devient un espace de Fréchet.

Dorénavant, on adopte le point de vue de la Remarque 5.6.2 afin de comparer $\mathcal{IC}(\tilde{G})$ et $\mathrm{PW}(\tilde{G})$. En contemplant le Théorème 5.4.1, on voit que l'application $\mathrm{tr} : \widehat{\mathcal{C}}(\tilde{G}) \to \mathcal{IC}(\tilde{G})$ devient

$$T_{\tilde{G}} : \Phi \longmapsto \left[\varphi : (M, \sigma, r) \mapsto \mathrm{tr}\,(\tilde{R}_{\tilde{P}}(r, \sigma)\Phi_{\tilde{P}}(\sigma))\right]$$

où $P \in \mathcal{P}(M)$ est arbitraire.

Proposition 5.6.5. *On a $\mathcal{IC}(\tilde{G}) \subset \mathrm{PW}(\tilde{G})$. L'application $f \mapsto f_{\tilde{G}}$ se factorise par $\mathrm{PW}(\tilde{G})$ et induit une application linéaire continue $\mathcal{C}(\tilde{G}) \to \mathrm{PW}(\tilde{G})$, ou bien $\widehat{\mathcal{C}}(\tilde{G}) \to \mathrm{PW}(\tilde{G})$ d'après le Théorème 5.6.3.*

Démonstration. Standard modulo le Théorème 5.6.3. □

Cette notation est provisoire : nous allons bientôt démontrer que $\mathrm{PW}(\tilde{G}) = \mathcal{IC}(\tilde{G})$

Combinatoire Nous allons montrer une variante de la partition de l'unité, qui interviendra dans la preuve du théorème de Paley-Wiener.

On note $\mathfrak{a}_0 := \mathfrak{a}_{M_0}$. On fixe une norme euclidienne W_0^G-invariante sur $\mathfrak{a}_0$, la distance associée est notée $d(\cdot,\cdot)$; on note aussi $\|\cdot\| := d(\cdot, 0)$. Soient $L \in \mathcal{L}(M_0)$, $\lambda \in \mathfrak{a}_0$, on écrit $\lambda = \lambda^L + \lambda_L$ selon la décomposition orthogonale $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0^L \oplus \mathfrak{a}_L$. Pour tout $Q \in \mathcal{P}(L)$, on a la chambre positive associée $\mathfrak{a}_Q^+ \subset \mathfrak{a}_L$ qui vérifie $\overline{\mathfrak{a}_Q^+} = \bigsqcup_{Q' \supset Q} \mathfrak{a}_{Q'}^+$. Il y a une décomposition en facettes

$$\mathfrak{a}_0 = \bigsqcup_{Q \in \mathcal{F}(M_0)} \mathfrak{a}_Q^+.$$

Lemme 5.6.6. *Supposons fixé un voisinage ouvert $\mathcal{V}^L$ de 0 dans $\mathfrak{a}_0^L$ pour tout $L \in \mathcal{L}(M_0)$. Alors il existe une famille de fonctions $(\beta^Q)_{Q \in \mathcal{F}(M_0)}$ telle que*

(1) $\beta^Q \in C_c^\infty(\mathfrak{a}_0)$ et toute dérivée de β^Q est bornée ;

(2) soit $Q = LU \in \mathcal{F}(M_0)$, alors $\beta^Q(\lambda) \neq 0$ entraîne que $\lambda^L \in \mathcal{V}^L$;

(3) si $\beta^Q(\lambda) \neq 0$, alors $\lambda \in \bigsqcup_{Q' \subset Q} \mathfrak{a}_{Q'}^+$;

(4) $\sum_{Q \in \mathcal{F}(M_0)} \beta^Q = 1$.

Démonstration. Pour $Q = LU \in \mathcal{F}(M_0)$, on pose $N(Q) := \dim \mathfrak{a}_L$. On prouve par récurrence sur N que l'on peut trouver des β^Q pour $N(Q) \leq N$ vérifiant (1), (2), (3) et vérifiant : il existe $\epsilon_N > 0$ tel que $\sum_{N(Q) \leq N} \beta^Q(\lambda) = 1$ pour tout λ tel que $d(\lambda, \bigcup_{N(Q) \leq N} \mathfrak{a}_Q^+) < \epsilon_N$. On suppose N fixé et les fonctions $(\beta^Q)_{N(Q)<N}$ construites.

On considère un paramètre auxiliaire $\epsilon > 0$ et on suppose que pour tout $L \in \mathcal{L}(M_0)$ avec $\dim \mathfrak{a}_L = N$, on a $\{\lambda^L \in \mathfrak{a}_0^L : \|\lambda^L\| \leq \epsilon\} \subset \mathcal{V}^L$. Soit $Q = LU \in \mathcal{F}(M_0)$ avec $N(Q) = N$. On choisit $\alpha^L \in C_c^\infty(\mathfrak{a}_0^L)$ telle que

$$\alpha^L(\lambda^L) = \begin{cases} 1, & \text{si } \|\lambda^L\| < \epsilon/2, \\ 0, & \text{si } \|\lambda^L\| > \epsilon. \end{cases}$$

On définit la fonction sur $\mathfrak{a}_0$

$$\gamma^Q(\lambda) = \alpha^L(\lambda^L) \left(1 - \sum_{N(Q')<N} \beta^{Q'}(\lambda) \right).$$

On suppose $\epsilon < \epsilon_{N-1}$. Montrons que

(i) $\quad d(\lambda, \mathfrak{a}_Q^+) \in]\epsilon, \epsilon_{N-1}[\implies \gamma^Q(\lambda) = 0.$

En effet, soit $\lambda = \lambda^L + \lambda_L$ tel que $d(\lambda, \mathfrak{a}_Q^+) \in]\epsilon, \epsilon_{N-1}[$. Si $\lambda_L \in \mathfrak{a}_Q^+$, alors $d(\lambda, \mathfrak{a}_Q^+) \leq \|\lambda^L\|$ donc $\|\lambda^L\| > \epsilon$ et $\alpha^L(\lambda^L) = 0$. Si $\lambda_L \notin \mathfrak{a}_Q^+$, on fixe $\mu \in \mathfrak{a}_Q^+$ tel que $d(\lambda, \mu) < \epsilon_{N-1}$. Le segment $[\lambda_L, \mu]$ coupe $\partial\overline{\mathfrak{a}_Q^+}$ en un point μ' et on a $d(\lambda, \mu') \leq d(\lambda, \mu)$. Donc $d(\lambda, \bigcup_{N(Q')<N} \mathfrak{a}_{Q'}^+) < \epsilon_{N-1}$, d'où $1 - \sum_{N(Q')<N} \beta^{Q'}(\lambda) = 0$ d'après l'hypothèse de récurrence. Cela prouve (i).

On suppose $2\epsilon < \epsilon_{N-1}$. On définit β^Q par

$$\beta^Q(\lambda) = \begin{cases} \gamma^Q(\lambda), & \text{si } d(\lambda, \mathfrak{a}_Q^+) < 2\epsilon, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vu (i), β^Q vérifie (1). Par définition de α^L, (2) est aussi vérifié. Montrons que

(ii) $\quad$ pour tout $\epsilon' > 0$, il existe $\epsilon'' > 0$ tels que les conditions

$$d(\lambda, \mathfrak{a}_Q^+) < \epsilon'',$$
$$\|\lambda^L\| < \epsilon'',$$
$$d\left(\lambda, \bigcup_{N(Q')<N} \mathfrak{a}_{Q'}^+\right) > \epsilon'$$

entraînent $\lambda \in \bigcup_{Q' \subset Q} \mathfrak{a}_{Q'}^+$.

On peut supposer $\lambda \in \mathfrak{a}_0^G$ et on écrit $\lambda = \lambda^L + \sum_{\alpha \in \Delta_Q} x_\alpha \varpi_\alpha$, où $\{\varpi_\alpha : \alpha \in \Delta_Q\} \subset \mathfrak{a}_L^G$ est la base duale de Δ_Q. Soit $\alpha \in \Delta_Q$, l'élément $\mu := \sum_{\alpha' \neq \alpha} x_{\alpha'} \varpi_{\alpha'}$ appartient à $\bigcup_{N(Q')<N} \mathfrak{a}_{Q'}^+$ et $d(\lambda, \mu) = \sqrt{\|\lambda^L\|^2 + x_\alpha^2 \|\varpi_\alpha\|^2}$, d'où

$$\sqrt{\epsilon''^2 + x_\alpha^2 \|\varpi_\alpha\|^2} > d(\lambda, \mu) \geq d\left(\lambda, \bigcup_{N(Q')<N} \alpha_{Q'}^+\right) > \epsilon'.$$

En supposant $\epsilon'' < \epsilon'$, cela entraîne que $|x_\alpha| > \|\varpi_\alpha\|^{-1}\sqrt{\epsilon'^2 - \epsilon''^2}$. Si $x_\alpha < 0$, on a $d(\lambda, \mathfrak{a}_Q^+) > c|x_\alpha|$ où c est une constante positive, d'où $\epsilon'' > c\|\varpi_\alpha\|^{-1}\sqrt{\epsilon'^2 - \epsilon''^2}$. Impossible si ϵ'' est assez petit. Donc on a $x_\alpha > \|\varpi_\alpha\|^{-1}\sqrt{\epsilon'^2 - \epsilon''^2}$. On note $\Sigma_0 := \Sigma_{M_0}$ l'ensemble des racines de A_0. Il existe $c' > 0$ tel que $|\langle \alpha, \mu \rangle| < c' \|\mu\|$ pour tout μ et tout $\alpha \in \Sigma_0$. On note Σ_0^U le sous-ensemble de Σ_0 des racines dans U. Pour $\alpha \in \Sigma_0^U$, sa projection sur $\mathfrak{a}_L^*$ est de la forme $\sum_{\alpha' \in \Delta_Q} n_{\alpha'} \alpha'$ avec $n_{\alpha'} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et $n_{\alpha'} \geq 1$ pour au moins un α'. Alors

$$\langle \alpha, \lambda \rangle = \langle \alpha, \lambda^L \rangle + \sum_{\alpha' \in \Delta_Q} n_{\alpha'} x_{\alpha'} > -c'\epsilon'' + \|\varpi_\alpha\|^{-1}\sqrt{\epsilon'^2 - \epsilon''^2}.$$

C'est positif si ϵ'' est suffisamment petit, donc $\langle \alpha, \lambda \rangle > 0$. Soit $Q' \in \mathcal{F}(M_0)$ tel que $\lambda \in \mathfrak{a}_{Q'}^+$, alors $\{\alpha \in \Sigma_0 : \langle \alpha, \lambda \rangle > 0\} = \Sigma_0^{U'}$. Donc $\Sigma_0^U \subset \Sigma_0^{U'}$, ce qui entraîne $Q' \subset Q$. D'où (ii).

Prouvons que β^Q vérifie (3). Si $\beta^Q(\lambda) = 0$, alors

$$d(\lambda, \mathfrak{a}_Q^+) < 2\epsilon,$$
$$\|\lambda^L\| < \epsilon,$$
$$d\left(\lambda, \bigcup_{N(Q')<N} \mathfrak{a}_{Q'}^+\right) > \epsilon_{N-1}$$

par notre construction de β^Q. L'assertion (ii) avec $\epsilon' = \epsilon_{N-1}$ fournit une constante ϵ''. Si l'on suppose que $2\epsilon < \epsilon''$, alors la condition (3) est satisfaite.

Il reste à établir l'hypothèse de récurrence, ce qui impliquera (4) si elle est satisfaite pour tout N :

(iii) il existe ϵ_N tel que $d(\lambda, \bigcup_{N(Q)\leq N} \mathfrak{a}_Q^+) < \epsilon_N$ entraîne $\sum_{N(Q)\leq N} \beta^Q(\lambda) = 1$.

Fixons $\lambda \in \mathfrak{a}_0$ tel que $d(\lambda, \bigcup_{N(Q)\leq N} \mathfrak{a}_Q^+) < \epsilon_N$. Si $\sum_{N(Q')<N} \beta^{Q'}(\lambda) = 1$, on a par construction $\beta^Q(\lambda) = 0$ pour tout Q avec $N(Q) = N$. Donc $\sum_{N(Q)\leq N} \beta^Q(\lambda) = 1$. On peut donc supposer que $\sum_{N(Q')<N} \beta^{Q'}(\lambda) \neq 1$, d'où $d(\lambda, \bigcup_{N(Q')<N} \mathfrak{a}_{Q'}^+) > \epsilon_{N-1}$ par l'hypothèse de récurrence. Montrons d'abord que

(iv) il existe au plus un $Q \in \mathcal{F}(M_0)$ avec $N(Q) = N$ et $\beta^Q(\lambda) \neq 0$.

En effet, supposons qu'il en existe deux, disons Q_1, Q_2 avec $Q_i = L_iU_i$, $i = 1, 2$. Comme ci-dessus, on a $d(\lambda, \mathfrak{a}_{Q_1}^+) < 2\epsilon$, $\|\lambda^{L_1}\| < \epsilon$, $d(\lambda, \bigcup_{N(Q')<N} \mathfrak{a}_{Q'}^+) > \epsilon_{N-1}$. D'autre part on a $d(\lambda, \mathfrak{a}_{Q_2}^+) < 2\epsilon$. Soit $\mu \in \mathfrak{a}_{Q_2}^+$ tel que $d(\lambda, \mu) < 2\epsilon$, alors on a aussi $d(\lambda^{L_1}, \mu^{L_1}) < 2\epsilon$. D'où

$$\begin{aligned} d(\mu, \mathfrak{a}_{Q_1}^+) &\leq d(\lambda, \mu) + d(\lambda, \mathfrak{a}_{Q_1}^+) < 4\epsilon, \\ \|\mu^{L_1}\| &\leq d(\mu^{L_1}, \lambda^{L_1}) + \|\lambda^{L_1}\| < 3\epsilon, \\ d\left(\mu, \bigcup_{N(Q')<N} \mathfrak{a}_{Q'}^+\right) &\geq d\left(\lambda, \bigcup_{N(Q')<N} \mathfrak{a}_{Q'}^+\right) - d(\lambda, \mu) > \epsilon_{N-1} - 2\epsilon. \end{aligned}$$

De (ii) avec $\epsilon' = \epsilon_{N-1}/2$ se déduit ϵ''. On suppose $\epsilon_{N-1} - 2\epsilon > \frac{1}{2}\epsilon_{N-1}$ et $4\epsilon < \epsilon''$. Alors $\mu \in \bigcup_{Q'\subset Q_1} \mathfrak{a}_{Q'}^+$. Cela contredit l'hypothèse que $\mu \in \mathfrak{a}_{Q_2}^+$. Cela prouve (iv).

Montrons que

(v) pour ϵ_N suffisamment petit, il existe un $Q \in \mathcal{F}(M_0)$ tel que $N(Q) = N$ et $\beta^Q(\lambda) = 1 - \sum_{N(Q')<N} \beta^{Q'}(\lambda) \neq 0$.

On suppose $\epsilon_N < \epsilon_{N-1}$. Les conditions

$$\begin{aligned} d\left(\lambda, \bigcup_{N(Q')\leq N} \mathfrak{a}_Q^+\right) &< \epsilon_N, \\ d\left(\lambda, \bigcup_{N(Q')<N} \mathfrak{a}_{Q'}^+\right) &> \epsilon_{N-1} \end{aligned}$$

entraînent qu'il existe $Q \in \mathcal{F}(M_0)$ avec $N(Q) = N$ et $d(\lambda, \mathfrak{a}_Q^+) < \epsilon_N$. En particulier, $\|\lambda^L\| \leq \epsilon_N$. En prenant $\epsilon_N < \epsilon/2$, on a $\alpha^L(\lambda^L) = 1$ et $\beta^Q(\lambda) = \gamma^Q(\lambda) = 1 - \sum_{N(Q')<N} \beta^{Q'}(\lambda) \neq 0$. D'où (v).

D'après (iv) et (v), $\sum_{N(Q)\leq N} \beta^Q(\lambda)$ est la somme de $\sum_{N(Q')\leq N} \beta^{Q'}(\lambda)$ et d'un $\beta^Q(\lambda)$ pour un unique $Q \in \mathcal{F}(M_0)$ avec $N(Q) = N$, pour lequel $\beta^Q(\lambda) = 1 - \sum_{N(Q')<N} \beta^{Q'}(\lambda)$. Cela entraîne (iii) et achève la preuve. □

Donnons-en une généralisation simple.

Corollaire 5.6.7. *Soit $M \in \mathcal{L}(M_0)$. Supposons fixé un voisinage ouvert $\mathcal{V}^L$ de 0 dans $\mathfrak{a}_M^L$ pour tout $L \in \mathcal{L}(M)$. Alors il existe une famille de fonctions $(\beta^Q)_{Q\in\mathcal{F}(M)}$ telle que*

(1) $\beta^Q \in C_c^\infty(\mathfrak{a}_M)$ et toute dérivée de β^Q est bornée ;

(2) soit $Q = LU \in \mathcal{F}(M)$, alors $\beta^Q(\lambda) \neq 0$ entraîne que $\lambda^L \in \mathcal{V}^L$;

(3) si $\beta^Q(\lambda) \neq 0$, alors $\lambda \in \bigsqcup_{M\subset Q'\subset Q} \mathfrak{a}_{Q'}^+$;

(4) $\sum_{Q\in\mathcal{F}(M)} \beta^Q = 1$.

Démonstration. On a la décomposition $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0^M \oplus \mathfrak{a}_M$. On choisit un voisinage ouvert $\mathcal{U}^M$ de 0 dans $\mathfrak{a}_0^M$. Soit $L \in \mathcal{L}(M_0)$. Si $L \notin \mathcal{L}(M)$, on choisit un voisinage quelconque $\bar{\mathcal{V}}^L$ de 0 dans $\mathfrak{a}_0^L$; si $L \in \mathcal{L}(M)$, alors $\mathfrak{a}_0^L = \mathfrak{a}_0^M \oplus \mathfrak{a}_M^L$ et on prend le voisinage $\bar{\mathcal{V}}^L = \mathcal{U}^M \times \mathcal{V}^L$ de 0 dans $\mathfrak{a}_0^L$. Alors le Lemme 5.6.6 fournit des fonctions $\bar{\beta}^Q$ adaptées aux voisinages $\bar{\mathcal{V}}^Q$. On note $\beta^Q := \bar{\beta}^Q|_{\mathfrak{a}_M}$ pour tout $Q \in \mathcal{F}(M)$, alors les propriétés (1) et (2) sont automatiquement satisfaites.

Supposons que $\lambda \in \mathfrak{a}_M$, $Q \in \mathcal{F}(M_0)$ et $\bar{\beta}^Q(\lambda) \neq 0$, alors il existe $Q' \in \mathcal{F}(M_0)$, $Q' \subset Q$ tel que $\lambda \in \mathfrak{a}_{Q'}^+$. Or la décomposition $\mathfrak{a}_M = \bigsqcup_{Q''\in\mathcal{F}(M)} \mathfrak{a}_{Q''}^+$ entraîne que $Q' \in \mathcal{F}(M)$, donc $Q \in \mathcal{F}(M)$. Les propriétés (3) et (4) en résultent. □

Remarque 5.6.8. Le Corollaire 5.6.7 est aussi valable pour la décomposition dans l'espace dual

$$\mathfrak{a}_0^* = \bigsqcup_{Q\in\mathcal{F}(M_0)} \mathfrak{a}_Q^{*,+}$$

ou pour

$$i\mathfrak{a}_0^* = \bigsqcup_{Q\in\mathcal{F}(M_0)} i\mathfrak{a}_Q^{*,+}.$$

Démonstration du Théorème de Paley-Wiener invariant Soient $M \in \mathcal{L}(M_0)$ et $\sigma \in \Pi_2(\tilde{M})$. Pour $P \in \mathcal{P}(M)$, $w \in W_0^G$ et $\tilde{w} \in \tilde{K}$ un représentant, on note

$$R_{\tilde{P}}(\tilde{w}, \sigma) := R_{\tilde{P}|\tilde{P}}(\tilde{w}, \sigma).$$

Le résultat suivant jouera un rôle crucial dans notre preuve.

Lemme 5.6.9. *Soient $L \in \mathcal{L}(M)$, $P \in \mathcal{P}(M)$ et $Q \in \mathcal{P}(L)$ tels que $Q \supset P$, alors pour tout $\lambda \in i\mathfrak{a}_L^*$ et tout $w \in W_0^L$ avec représentant $\tilde{w} \in \tilde{K} \cap \tilde{L}$, on a*

$$R_{\tilde{P}}(\tilde{w}, \sigma_\lambda) = R_{\tilde{P}}(\tilde{w}, \sigma).$$

Par conséquent, on a $R_\sigma^L = R_{\sigma_\lambda}^L$.

Démonstration. D'après (**R5**) dans la Définition 3.1.1, on a

$$R_{\tilde{P}}(\tilde{w}, \sigma_\lambda) = A(\tilde{w}) \circ \mathcal{I}_{\tilde{Q}}(R^{\tilde{L}}_{w^{-1}\tilde{P}\cap\tilde{L}|\tilde{P}\cap\tilde{L}}(\sigma_\lambda)).$$

Cela est indépendant de $\lambda \in i\mathfrak{a}_L^*$ d'après (**R6**). L'assertion concernant R_σ^L en découle d'après la définition du R-groupe. □

Théorème 5.6.10. *On a $\mathrm{PW}(\tilde{G}) = I\mathcal{C}(\tilde{G})$. L'application linéaire continue surjective $\mathcal{C}(\tilde{G}) \to I\mathcal{C}(\tilde{G})$ admet une section continue ; en particulier, c'est une application ouverte.*

Démonstration. Vu la Proposition 5.6.5, on se ramène à montrer que $T_{\tilde{G}} : \widehat{\mathcal{C}}(\tilde{G}) \to \mathrm{PW}(\tilde{G})$ admet une section continue $\varphi \mapsto \Phi$. La preuve du cas non archimédien est identique à celle de [17]. Supposons donc $F = \mathbb{R}$ dans ce qui suit. La preuve suivante est une variante de celle d'Arthur qui évite l'usage de multiplicité 1 de $\tilde{K}$-types minimaux.

Soient M, σ comme ci-dessus. Comme $F = \mathbb{R}$, on peut écrire de façon unique $\sigma = (\sigma^1)_{\lambda(\sigma)}$ où σ^1 se factorise par $\tilde{M}^1$ et $\lambda(\sigma) \in i\mathfrak{a}_M^*$. Soit $k \in \tilde{K}$ un représentant d'un élément dans W_0^G, la condition $k\sigma \simeq \sigma$ équivaut à $k\sigma^1 \simeq \sigma^1$ et $k\lambda(\sigma) = \lambda(\sigma)$. Si $\lambda(\sigma) \in i\mathfrak{a}_Q^{*,+}$ avec $Q = LU \in \mathcal{F}(M)$, la condition $k\lambda(\sigma) = \lambda(\sigma)$ équivaut à $k \in \tilde{L}$. Donc $W_\sigma = W^L_{\sigma^1}$ et, pour P, Q, $r, \tilde{r}$ comme dans le Lemme 5.6.9, on a $R_{\tilde{P}}(\tilde{r}, \sigma) = R_{\tilde{P}}(\tilde{r}, \sigma^1)$ et $R_\sigma = R^L_{\sigma^1}$.

Dorénavant, on conserve la notation σ pour un élément de $\Pi_2(\tilde{M})$ tel que $\lambda(\sigma) = 0$, autrement dit σ se factorise par $\tilde{M}^1$. On écrit tout élément de $\Pi_2(\tilde{M})$ sous la forme σ_λ avec $\lambda \in i\mathfrak{a}^*_M$.

On fixe un ensemble fini de $\tilde{K}$-types, noté $K(M, \sigma)$, tel que

– chaque élément de $K(M, \sigma)$ est un $\tilde{K}$-type minimal (voir [43, Chapter X]) d'un π_ρ, où $\rho \in \Pi(\tilde{R}_\sigma, \chi_\sigma)$;
– pour tout $\rho \in \Pi(\tilde{R}_\sigma, \chi_\sigma)$, π_ρ contient au moins un $\tilde{K}$-type minimal appartenant à $K(M, \sigma)$;
– pour tout $\tilde{w} \in N_{\tilde{K}}(\widetilde{M_0})$, $K(wM, \tilde{w}\sigma) = K(M, \sigma)$.

Alors il existe des constantes $A, B > 0$, qui ne dépendent que de $\tilde{G}$, $\tilde{M}$ et de la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$, telles que pour tout $\delta \in K(M, \sigma)$, on a

$$\|\mu_\delta\| \leq A\|\mu_\sigma\| + B. \tag{IV.30}$$

En effet, le cas $\tilde{G}$ connexe est [43, Theorem 10.26] ; le cas général en résulte sans peine, cf. la remarque dans [43, p.642].

On fixe $f_{M,\sigma} \in C^\infty(\tilde{K})$ qui agit comme la projection sur les $\tilde{K}$-types appartenant à $K(M, \sigma)$. Soient $P \in \mathcal{P}(M)$, $Q = LU \in \mathcal{F}(M)$ avec $Q \supset P$. Le Théorème 5.4.1 donne

$$\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\sigma) = \bigoplus_{\rho \in \Pi(\tilde{R}_\sigma, \chi_\sigma)} \rho^\vee \boxtimes \pi_\rho = \bigoplus_{\rho^L \in \Pi(\tilde{R}^L_\sigma, \chi_\sigma)} E_P(\sigma, \rho^L)$$

où $E_P(\sigma, \rho^L) = (\rho^L)^\vee \boxtimes \pi(\sigma, \rho^L)$ avec

$$\pi(\sigma, \rho^L) = \bigoplus_{\rho \in \Pi(\tilde{R}_\sigma, \chi_\sigma)} \mathrm{mult}((\rho^L)^\vee, \rho^\vee)\pi_\rho.$$

Soit $r \in \tilde{R}^L_\sigma$. On définit l'opérateur de $\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\sigma)$:

$$\begin{aligned} D^Q_P(r, \sigma) := |R^L_\sigma|^{-1} \sum_{\rho^L \in \Pi(\tilde{R}^L_\sigma, \chi_\sigma)} & \deg(\rho^L)(\dim \pi(\sigma, \rho^L)[K(M, \sigma)])^{-1} \cdot \\ & \cdot (\tilde{R}_{\tilde{P}}(r, \sigma)\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\sigma, f_{M,\sigma}))|_{E_P(\sigma, \rho^L)} \end{aligned}$$

où $\pi(\sigma, \rho^L)[K(M, \sigma)]$ signifie le sous-espace de $\pi(\sigma, \rho^L)$ se transformant par des $\tilde{K}$-types dans $K(M, \sigma)$. Montrons que pour $r, r' \in \tilde{R}^L_\sigma$, on a

$$\mathrm{tr}\left(\tilde{R}_{\tilde{P}}(r', \sigma)D^Q_P(r^{-1}, \sigma)\right) = \begin{cases} \chi_\sigma(z), & \text{si } r = r'z, z \in Z_\sigma, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{IV.31}$$

En effet, $\mathrm{tr}\,(\tilde{R}_{\tilde{P}}(r', \sigma)D^Q_P(r^{-1}, \sigma))$ est égal à $|R^L_\sigma|^{-1} \sum_{\rho^L} \deg(\rho^L)\mathrm{tr}\,(\rho^L)^\vee(r'r^{-1})$ d'après notre choix de $f_{M,\sigma}$.

Pour $\lambda \in i\mathfrak{a}^*_M$, on définit l'opérateur

$$E^Q_P(\sigma, \lambda) := \sum_{w \in W^L_0/W^M_0} \sum_{\substack{P' \in \mathcal{P}(wM) \\ P' \subset Q}} R_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\tilde{w}, \sigma_\lambda)^{-1} R_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\tilde{w}, \sigma)$$

où $\tilde{w} \in \tilde{K} \cap \tilde{L}$ est un représentant quelconque de w. Cela ne dépend que de λ^L d'après le Lemme 5.6.9 et est une homothétie non nulle pour $\lambda^L = 0$. Donc $E^Q_P(\sigma, \lambda)$ est inversible et lisse pour λ^L dans un voisinage de 0 dans $i\mathfrak{a}^{L,*}_M$.

Soient $w \in W_0^L$ avec représentant $\tilde{w} \in \tilde{K} \cap \tilde{L}$, et $P' \in \mathcal{P}(wM)$ tel que $P' \subset Q$. Montrons que

$$\text{(IV.32)} \qquad R_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\tilde{w}, \sigma_\lambda) E_P^Q(\sigma, \lambda) = E_{P'}^Q(\tilde{w}\sigma, w\lambda) R_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\tilde{w}, \sigma), \quad \lambda \in i\mathfrak{a}_M^*.$$

En effet,

$$\begin{aligned} R_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\tilde{w}, \sigma_\lambda) E_P^Q(\sigma, \lambda) R_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\tilde{w}, \sigma)^{-1} &= \sum_{w_1, P_1} R_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\tilde{w}, \sigma_\lambda) R_{\tilde{P}_1|\tilde{P}}(\tilde{w}_1, \sigma_\lambda)^{-1} R_{\tilde{P}_1|\tilde{P}}(\tilde{w}_1, \sigma) R_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\tilde{w}, \sigma)^{-1} \\ &= \sum_{w_1, P_1} R_{\tilde{P}_1|\tilde{P}'}(\tilde{w}_1\tilde{w}^{-1}, \tilde{w}\sigma_{w\lambda})^{-1} R_{\tilde{P}_1|\tilde{P}'}(\tilde{w}_1\tilde{w}^{-1}, \tilde{w}\sigma_\lambda) \end{aligned}$$

où on utilise la propriété $R_{\tilde{P}_1|\tilde{P}'}(\tilde{w}_1\tilde{w}^{-1}, \tilde{w}\sigma_{w\lambda}) R_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\tilde{w}, \sigma_\lambda) = R_{\tilde{P}_1|\tilde{P}}(\tilde{w}_1, \sigma_\lambda)$, qui résulte de (IV.29). On en déduit (IV.32) en remplaçant $\tilde{w}_1$ par $\tilde{w}_1\tilde{w}$ et M par wM.

Pour tout $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$ avec λ^L proche de 0, on pose

$$\text{(IV.33)} \qquad D_P^Q(r, \sigma, \lambda) := E_P^Q(\sigma, \lambda) D_P^Q(r, \sigma) E_P^Q(\sigma, \lambda)^{-1}, \quad r \in \tilde{R}_\sigma^L.$$

Pour $P \in \mathcal{P}(M)$, $Q = LU \in \mathcal{F}(M)$, $r \in \tilde{R}_\sigma^L$, posons

$$\begin{aligned} S_P^Q(r, \sigma, \lambda) = |W_0^G|^{-1} \sum_{w \in W_0^G} &|\{P' \in \mathcal{P}(wM) : P' \subset wQ\}|^{-1} \\ &\sum_{\substack{P' \in \mathcal{P}(wM) \\ P' \subset wQ}} R_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\tilde{w}, \sigma_\lambda)^{-1} D_{P'}^{wQ}(wrw^{-1}, \tilde{w}\sigma, w\lambda) R_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\tilde{w}, \sigma_\lambda) \end{aligned}$$

où $\tilde{w} \in \tilde{K}$ est un représentant de w. Cet opérateur est bien défini et lisse en λ pour λ^L proche de 0. Pour $w \in W_0^G$, $\tilde{w} \in \tilde{K}$ un représentant et $P' \in \mathcal{P}(wM)$, l'argument pour (IV.32) donne

$$\text{(IV.34)} \qquad S_{P'}^{wQ}(wrw^{-1}, \tilde{w}\sigma, w\lambda) = R_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\tilde{w}, \sigma_\lambda) S_P^Q(r, \sigma, \lambda) R_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\tilde{w}, \sigma_\lambda)^{-1}.$$

On choisit des fonctions β^Q sur $i\mathfrak{a}_M^*$ fournies par le Lemme 5.6.7 (et aussi par la Remarque 5.6.8) adaptées aux voisinages où les opérateurs $S_P^Q(r, \sigma, \lambda)$ sont bien définis. On peut aussi supposer que $\beta^{wQ}(w\lambda) = \beta^Q(\lambda)$ pour tout Q et tout $w \in W_0^G$.

Soit $(M, \sigma_\lambda, r) \mapsto \varphi(M, \sigma, \lambda, r) = \varphi(M, \sigma_\lambda, r)$ une fonction dans $\mathrm{PW}(\tilde{G})$. Pour $r \in \tilde{R}_\sigma$, on note $L(r)$ le Lévi contenant M tel que $r \in \tilde{R}_{\sigma,\mathrm{reg}}^{L(r)}$. Étant donnés M, σ_λ et $P \in \mathcal{P}(M)$, on définit l'opérateur

$$\Phi_{\tilde{P}}(\sigma_\lambda) = \sum_{Q = LU \in \mathcal{F}(M)} \beta^Q(\lambda) \sum_{r \in R_\sigma^L} S_P^Q(r^{-1}, \sigma, \lambda) \varphi(M, \sigma, \lambda_{L(r)}, r).$$

En fait, il faut prendre un relèvement de r dans $\tilde{R}_\sigma^L$ dans la somme. Vu l'équivariance de S_P^Q et φ sous Z_σ, cela n'affecte pas la définition.

Montrons que $\Phi := (\Phi_{\tilde{P}})_{P \in \mathcal{F}(M_0)}$ appartient à $\mathcal{C}(\tilde{G})$. La lissité en λ est évidente. Pour $w \in W_0^G$ avec représentant $\tilde{w} \in \tilde{K}$ et $P' \in \mathcal{P}(wM)$, on vérifie

$$\Phi_{\tilde{P}'}(\tilde{w}\sigma_{w\lambda}) = R_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\tilde{w}, \sigma_\lambda) \Phi_{\tilde{P}}(\sigma_\lambda) R_{\tilde{P}'|\tilde{P}}(\tilde{w}, \sigma_\lambda)^{-1}$$

à l'aide de (IV.34). Cela permet de vérifier la condition de symétrie car $\beta^{wQ}(w\lambda) = \beta^Q(\lambda)$ pour tout Q.

La condition de croissance résulte des faits suivants.

– Pour tout $Q \in \mathcal{F}(M)$, toute dérivée de β^Q est bornée.
– La condition de croissance satisfaite par φ.

– Les coefficients matriciels $\tilde{K}$-finis des opérateurs d'entrelacement normalisés sont à croissance modérée (cf. (**R6**) dans la Définition 3.1.1).
– La majoration (IV.30).

Vu les définitions des semi-normes définissant les espaces de Fréchet en question, ces arguments impliquent aussi la continuité de l'application $\varphi \mapsto \Phi$.

Il reste à montrer que $\varphi \mapsto \Phi$ est une section de $T_{\tilde{G}}$. Soient $P \in \mathcal{P}(M)$ et $r' \in \tilde{R}_{\sigma_\lambda}$ Calculons d'abord $\mathrm{tr}\,(\tilde{R}_{\tilde{P}}(r', \sigma_\lambda)\Phi_{\tilde{P}}(\sigma_\lambda))$. L'hypothèse sur r' implique $\lambda \in i\mathfrak{a}^*_{L(r')}$, donc $\lambda \in i\mathfrak{a}^{*,+}_{Q(\lambda)}$ avec $Q(\lambda) = L(\lambda)U(\lambda)$ et $L(r') \subset L(\lambda)$. Pour $Q = LU \in \mathcal{F}(M)$, si $\beta^Q(\lambda) \neq 0$ alors $Q(\lambda) \subset Q$, donc $L(r') \subset L(\lambda) \subset L$. Quitte à changer P, ce qui est loisible d'après la symétrie de Φ, le Lemme 5.6.9 affirme que $r' \in \tilde{R}^{L(r')}_{\sigma_\lambda} = \tilde{R}^{L(r')}_{\sigma} \subset \tilde{R}^L_\sigma$.

Les égalités (IV.31), (IV.32) et la définition de $S^Q_P(r^{-1}, \sigma, \lambda)$ entraînent que pour tout $r \in \tilde{R}^L_\sigma$, on a

$$\mathrm{tr}\left(\tilde{R}_{\tilde{P}}(r', \sigma_\lambda) S^Q_P(r^{-1}, \sigma, \lambda)\right) = \begin{cases} \chi_\sigma(z), & \text{si } r = r'z, z \in Z_\sigma, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{IV.35}$$

Donc

$$\sum_{r \in R^L_\sigma} \mathrm{tr}\left(\tilde{R}_{\tilde{P}}(r', \sigma_\lambda) S^Q_P(r^{-1}, \sigma, \lambda)\right) \varphi(M, \sigma, \lambda_{L(r')}, r) = \varphi(M, \sigma, \lambda_{L(r)}, r') = \varphi(M, \sigma, \lambda, r')$$

car $\lambda \in i\mathfrak{a}^*_{L(r')}$. D'où

$$\mathrm{tr}\left(\tilde{R}_{\tilde{P}}(r', \sigma_\lambda)\Phi_{\tilde{P}}(\sigma_\lambda)\right) = \sum_{Q \in \mathcal{F}(M)} \beta^Q(\lambda)\varphi(M, \sigma, \lambda, r') = \varphi(M, \sigma, \lambda, r').$$

Ce qu'il fallait démontrer. □

5.7 Caractères pondérés tempérés

Caractères pondérés tempérés de $\tilde{M}$ Fixons des familles de facteurs normalisants faibles. Soient $M \in \mathcal{L}(M_0)$ et π une représentation admissible irréductible de $\tilde{M}$ dont la $X(\tilde{M})$-orbite contient une représentation unitaire spécifique. Soit $P \in \mathcal{P}(M)$, introduisons les (G, M)-familles suivantes des opérateurs méromorphes en π (sur la $X(\tilde{M})$-orbite en question)

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\tilde{Q}}(\Lambda, \pi, \tilde{P}) &:= J_{\tilde{Q}|\tilde{P}}(\pi)^{-1} J_{\tilde{Q}|\tilde{P}}(\pi_\Lambda), \\ \mathcal{R}_{\tilde{Q}}(\Lambda, \pi, \tilde{P}) &:= R_{\tilde{Q}|\tilde{P}}(\pi)^{-1} R_{\tilde{Q}|\tilde{P}}(\pi_\Lambda), \quad Q \in \mathcal{P}(M),\ \Lambda \in \mathfrak{a}^*_M. \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{R}_{\tilde{M}}(\pi, \tilde{P})$ est régulier si π est unitaire. Définissons le caractère pondéré

$$J^r_{\tilde{M}}(\pi, f) := \mathrm{tr}\,(\mathcal{R}_{\tilde{M}}(\pi, \tilde{P})\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\pi, f)), \quad f \in \mathcal{C}_{--}(\tilde{G}).$$

C'est une distribution tempérée en f et c'est facile de voir qu'elle ne dépend pas du choix de P à l'aide de (**R1**).

Posons aussi $\mu_{\tilde{P}|\tilde{Q}}(\pi) := \prod_\alpha \mu_\alpha(\pi)$ où α parcourt $\Sigma^{\mathrm{red}}_Q \cap \Sigma^{\mathrm{red}}_{\bar{P}}$, et les (G, M)-familles

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{Q}}(\Lambda, \pi, \tilde{P}) &:= \mu_{\tilde{Q}|\tilde{P}}(\pi)^{-1} \mu_{\tilde{Q}|\tilde{P}}(\pi_{\frac{1}{2}\Lambda}), \\ \mathcal{M}_{\tilde{Q}}(\Lambda, \pi, \tilde{P}) &:= \mu_{\tilde{Q}}(\Lambda, \pi, \tilde{P})\mathcal{J}_{\tilde{Q}}(\Lambda, \pi, \tilde{P}). \end{aligned}$$

Le caractère pondéré canoniquement normalisé est défini comme

$$J_{\tilde{M}}(\pi, f) := \mathrm{tr}\,(\mathcal{M}_{\tilde{M}}(\pi, \tilde{P})\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\pi, f)), \quad f \in \mathcal{C}_{--}(\tilde{G}).$$

Comme dans le cas de groupes réductifs [18], on utilise les propriétés des fonctions μ et des facteurs normalisants pour démontrer que

– $J_{\tilde M}(\pi,\cdot)$ ne dépend pas du choix de P, cf. ci-dessous ;
– $J_{\tilde M}(\pi,f)$ est régulier si π est unitaire ;
– définissons la (G,M)-famille

$$r_{\tilde Q}(\Lambda,\pi) := r_{\tilde{\overline{Q}}|\tilde Q}(\pi)^{-1} r_{\tilde{\overline{Q}}|\tilde Q}(\pi_{\frac{1}{2}\Lambda}), \quad Q \in \mathcal{P}(M),$$

d'où les termes $r_{\tilde M}^{\tilde R}(\pi)$ définis comme dans [Chapitre III, §4], où $R \in \mathcal{F}(M)$; on montre que $r_{\tilde M}^{\tilde R}(\pi)$ ne dépend que de π et de la composante de Lévi de R, donc c'est loisible d'écrire $r_{\tilde M}^{\tilde L}(\pi)$ où $L \in \mathcal{L}(M)$;
– on a l'identité

$$J_{\tilde M}(\pi,f) = \sum_{L\in\mathcal{L}(M)} r_{\tilde M}^{\tilde L}(\pi) J_{\tilde L}^{r}(\pi^L, f)$$

où π est en position générale de sorte que $\pi^L := \mathcal{I}_{\tilde M}^{\tilde L}(\pi)$ est irréductible ;
– $r_{\tilde M}^{\tilde L}(\pi)$ est régulier si π est unitaire, pour tout $L \in \mathcal{L}(M)$.

Par exemple, prouvons l'indépendance de P de $J_{\tilde M}(\pi,\cdot)$. On peut supposer π unitaire. Vu la propriété

$$J_{\tilde M}(\pi,f) = \sum_{L\in\mathcal{L}(M)} r_{\tilde M}^{\tilde L}(\pi) J_{\tilde L}^{r}(\pi^L, f),$$

on conclut en utilisant le résultat suivant, ce qui sera utile plus tard.

Lemme 5.7.1. *Soient $P, P' \in \mathcal{P}(M)$. On a*

$$\mathcal{R}_{\tilde M}(\pi,\tilde P) = R_{\tilde P'|\tilde P}(\pi)^{-1}\mathcal{R}_{\tilde M}(\pi,\tilde P') R_{\tilde P'|\tilde P}(\pi).$$

Par conséquent, la distribution $J_{\tilde M}^{r}(\pi,\cdot)$ est indépendante du choix de P.

Démonstration. Fixons $P \in \mathcal{P}(M)$. Soit $f \in \mathcal{C}_{--}(\tilde G)$. Pour $P' \in \mathcal{P}(M)$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\tilde Q}(\Lambda,\pi,\tilde P) &= (R_{\tilde Q|\tilde P'}(\pi)R_{\tilde P'|\tilde P}(\pi))^{-1} R_{\tilde Q|\tilde P'}(\pi_\Lambda) R_{\tilde P'|\tilde P}(\pi_\Lambda)\\ &= R_{\tilde P'|\tilde P}(\pi)^{-1}\mathcal{R}_{\tilde Q}(\Lambda,\pi,\tilde P') R_{\tilde P'|\tilde P}(\pi_\Lambda).\end{aligned}$$

Comme

$$\mathcal{R}_{\tilde M}(\pi,\tilde P) = \lim_{\Lambda\to 0}\sum_{Q\in\mathcal{P}(M)} \mathcal{R}_{\tilde Q}(\Lambda,\pi,\tilde P)\theta_Q(\Lambda)^{-1}$$

(resp. P' au lieu de P), cela prouve que $\mathcal{R}_{\tilde M}(\pi,\tilde P) = R_{\tilde P'|\tilde P}(\pi)^{-1}\mathcal{R}_{\tilde M}(\pi,\tilde P')R_{\tilde P'|\tilde P}(\pi)$. Il en résulte que

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\tilde M}(\pi,\tilde P)\mathcal{I}_{\tilde P}(\pi,f) &= R_{\tilde P'|\tilde P}(\pi)^{-1}\mathcal{R}_{\tilde M}(\pi,\tilde P')R_{\tilde P'|\tilde P}(\pi)\mathcal{I}_{\tilde P}(\pi,f)\\ &= R_{\tilde P'|\tilde P}(\pi)^{-1}\mathcal{R}_{\tilde M}(\pi,\tilde P')\mathcal{I}_{\tilde P'}(\pi,f)R_{\tilde P'|\tilde P}(\pi).\end{aligned}$$

Donc $J_{\tilde M}^{r}(\pi,f) = \operatorname{tr}(\mathcal{R}_{\tilde M}(\pi,\tilde P)\mathcal{I}_{\tilde P}(\pi,f)) = \operatorname{tr}(\mathcal{R}_{\tilde M}(\pi,\tilde P')\mathcal{I}_{\tilde P'}(\pi,f))$. □

Soit $M \in \mathcal{L}(M_0)$, définissons les fonctions sur $\Pi_{\mathrm{temp},-}$

$$\begin{aligned}\phi_{\tilde M}^{r}(f,\pi) &:= J_{\tilde M}^{r}(\pi,f), \quad \pi\in\Pi_{\mathrm{temp},-}(\tilde G),\\ \phi_{\tilde M}(f,\pi) &:= J_{\tilde M}(\pi,f), \quad \pi\in\Pi_{\mathrm{temp},-}(\tilde G).\end{aligned}$$

Alors on a

$$\phi_{\tilde{M}}(f,\pi) = \sum_{L\in\mathcal{L}(M)} r^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(\pi)\phi^r_{\tilde{L}}(f,\pi^L). \tag{IV.36}$$

Ici, il se peut que π^L soit réductible ; dans ce cas-là on définit $\phi^r_{\tilde{L}}(f,\pi^L)$ comme une somme de $\phi^r_{\tilde{L}}(f,\cdot)$ évalué en les constituants irréductibles (cf. [18, §3]). Remarquons aussi que $\phi_{\tilde{G}}(f) = f_{\tilde{G}}$. Le fait suivant est crucial.

Théorème 5.7.2 (Cf. [16, p.179] et [7, Corollary 9.2])**.** *L'application $\phi^r_{\tilde{M}}$ (resp. $\phi_{\tilde{M}}$) induit une application linéaire continue $\mathcal{C}_{--}(\tilde{G}) \to I\mathcal{C}_{--}(\tilde{M})$.*

Démonstration. Pour l'application $\phi^r_{\tilde{M}}$, l'outil essentiel dans l'argument d'Arthur est le théorème de Paley-Wiener invariant caractérisant $I\mathcal{C}(\tilde{M})$, qui est déjà établi pour les revêtements. Pour $\phi_{\tilde{M}}$, vu (IV.36), il suffit de majorer $r^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(\pi_\lambda)$ et ses dérivées en λ. Cela découle de (**R8**), cf. [18, Lemma 3.1]. □

Les distributions dans la formule des traces locale Maintenant, plaçons-nous dans le formalisme de la formule des traces locale. Les distributions en question vivent sur $\tilde{G}\times\tilde{G}$. Nous fixons une famille de facteurs normalisants faibles $r^\vee$ (resp. r) dans la première (resp. la deuxième) copie de $\tilde{G}$, telles que $r^\vee$ et r sont complémentaires (cf. la Définition 3.1.2). Néanmoins on utilise la même lettre R (resp. $J^r_{\tilde{M}}$) pour désigner les opérateurs d'entrelacement normalisés (resp. les caractères pondérés normalisés) dans chaque copie, puisqu'il n'y aura aucune confusion à craindre.

Prenons $\pi = \pi_1^\vee \boxtimes \pi_2 \in \Pi_{\mathrm{unit},--}(\tilde{M})\times\Pi_{\mathrm{unit},-}(\tilde{M})$. Rappelons que le caractère pondéré non normalisé $J_{\tilde{M}}(\pi,\cdot)$ est défini à l'aide de la (G,M)-famille $\{\mathcal{J}_{\tilde{Q}}(\Lambda,\pi,\tilde{P}) : Q\in\mathcal{P}(M)\}$. Définissons ses avatars en posant

$$\begin{aligned}
R_{\tilde{Q}|\tilde{P}}(\pi) &:= R_{\tilde{\tilde{Q}}|\tilde{P}}(\pi_1^\vee)\boxtimes R_{\tilde{Q}|\tilde{P}}(\pi_2),\\
\mathcal{R}_{\tilde{Q}}(\Lambda,\pi,\tilde{P}) &:= R_{\tilde{Q}|\tilde{P}}(\pi)^{-1}R_{\tilde{Q}|\tilde{P}}(\pi_\Lambda),\\
J^r_{\tilde{M}}(\pi,f) &:= \operatorname{tr}(\mathcal{R}_{\tilde{M}}(\pi,\tilde{P})\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\pi,f));
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mu_{\tilde{Q}}(\Lambda,\pi,\tilde{P}) &:= \mu_{\tilde{\tilde{Q}}}(\Lambda,\pi_1^\vee,\tilde{P})\mu_{\tilde{Q}}(\Lambda,\pi_2,\tilde{P}),\\
\mathcal{M}_{\tilde{Q}}(\Lambda,\pi,\tilde{P}) &:= \mu_{\tilde{Q}}(\Lambda,\pi,\tilde{P})\mathcal{J}_{\tilde{Q}}(\Lambda,\pi,\tilde{P}),\\
J^\mu_{\tilde{M}}(\pi,f) &:= \operatorname{tr}(\mathcal{M}_{\tilde{M}}(\pi,\tilde{P})\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\pi,f));
\end{aligned}$$

pour $f = f_1 f_2$ avec $f_1\in\mathcal{H}_-(\tilde{G})$, $f_2\in\mathcal{H}_{--}(\tilde{G})$.

Supposons désormais qu'il existe $\Lambda\in\mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$, $M_1\in\mathcal{L}^M(M_0)$ et $\sigma\in\Pi_{2,-}(\widetilde{M_1})$ avec $\pi_{1,\Lambda},\pi_{2,\Lambda}\in\Pi_\sigma(\tilde{M})$. Cela inclut les représentations qui interviennent dans la formule des traces locale.

Lemme 5.7.3. *On a $\mathcal{R}_{\tilde{M}}(\pi,\tilde{P}) = \mathcal{J}_{\tilde{M}}(\pi,\tilde{P}) = \mathcal{M}_{\tilde{M}}(\pi,\tilde{P})$, d'où $J^r_{\tilde{M}}(\pi,\cdot) = J_{\tilde{M}}(\pi,\cdot) = J^\mu_{\tilde{M}}(\pi,\cdot)$.*

Démonstration. Montrons la première égalité. Considérons d'abord le cas $\pi_1,\pi_2\in\Pi_\sigma(\tilde{M})$, alors

$$\begin{aligned}
r^\vee_{\tilde{\tilde{Q}}|\tilde{P}}(\pi_1^\vee) &= r^\vee_{\tilde{\tilde{Q}}|\tilde{P}}(\sigma^{M,\vee})\\
&= r^\vee_{\tilde{P}|\tilde{\tilde{Q}}}(\sigma^M) && \text{par } (\mathbf{R2})\\
&= r_{\tilde{\tilde{Q}}|\tilde{P}}(\sigma^M) && \text{car } r^\vee \text{ et } r \text{ sont complémentaires}\\
&= r_{\tilde{\tilde{P}}|\tilde{Q}}(\sigma^M) && \text{par } (\mathbf{R4}).
\end{aligned}$$

où $\sigma^M = \mathcal{I}_{\tilde{M}_1}^{\tilde{M}}(\sigma)$. D'autre part $r_{\tilde{Q}|\tilde{P}}(\pi_2) = r_{\tilde{Q}|\tilde{P}}(\sigma^M)$. Leur produit est donc égal à $r_{\tilde{\bar{P}}|\tilde{P}}(\sigma^M)$, qui est indépendant de Q. Idem si π est remplacé par π_Λ et σ est remplacé par σ_Λ.

Donc $\mathcal{R}_{\tilde{M}}(\pi, \tilde{P})$ et $\mathcal{J}_{\tilde{M}}(\pi, \tilde{P})$ ne diffèrent qu'à la constante

$$\lim_{\Lambda \to 0} r_{\tilde{\bar{P}}|\tilde{P}}(\sigma^M)^{-1} r_{\tilde{\bar{P}}|\tilde{P}}(\sigma^M_\Lambda) = 1.$$

Le même argument permet de montrer la deuxième égalité ; il suffit d'observer que les propriétés des fonctions μ entraînent

$$\begin{aligned} &\mu_{\tilde{\bar{Q}}|\tilde{P}}(\pi_1^\vee) = \mu_{\tilde{\bar{Q}}|\tilde{P}}(\sigma^{M,\vee}) = \mu_{\tilde{\bar{Q}}|\tilde{P}}(\sigma^M) = \mu_{\tilde{\bar{P}}|\tilde{Q}}(\sigma^M), \\ &\mu_{\tilde{Q}|\tilde{P}}(\pi_2) = \mu_{\tilde{Q}|\tilde{P}}(\sigma^M). \end{aligned}$$

□

Lemme 5.7.4. *La distribution $J_{\tilde{M}}(\pi, \cdot)$ ne dépend pas de $P \in \mathcal{P}(M)$.*

Démonstration. Grâce au Lemme 5.7.3, il suffit de montrer que $J^r_{\tilde{M}}(\pi, \cdot)$ ne dépend pas de P. La preuve est similaire au cas d'une seule copie de $\tilde{G}$, cf. la démonstration du Lemme 5.7.1. □

Soient $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{ell}}(M(F))^{\mathrm{bon}}$, $\tilde{\gamma} \in \mathbf{p}^{-1}(\gamma)$ et $g \in \mathcal{H}_{\text{-\,-}}(\tilde{G})$ (resp. $g \in \mathcal{H}_{-}(\tilde{G})$). On sait définir l'intégrale orbitale pondérée $J_{\tilde{M}}(\tilde{\gamma}, g)$. Cf. [Chapitre III, §6.3]. Pour ce faire, il faut fixer une mesure de Haar sur $M_\gamma(F)$. On choisit la mesure telle que $\mathrm{mes}(M_\gamma(F)/A_M(F)) = 1$.

Lemme 5.7.5. *Avec le formalisme de [Chapitre III, §4.2], on a*

$$\begin{aligned} J_{\tilde{M}}(\pi, f) &= \sum_{L_1, L_2 \in \mathcal{L}(M)} d^G_M(L_1, L_2) J^{\tilde{L}_1}_{\tilde{M}}(\pi_1^\vee, f_{1,\widetilde{Q_1}}) J^{\tilde{L}_2}_{\tilde{M}}(\pi_2, f_{2,\widetilde{Q_2}}) \\ &= \sum_{L_1, L_2 \in \mathcal{L}(M)} d^G_M(L_1, L_2) J^{\tilde{L}_1, r}_{\tilde{M}}(\pi_1^\vee, f_{1,\widetilde{Q_1}}) J^{\tilde{L}_2, r}_{\tilde{M}}(\pi_2, f_{2,\widetilde{Q_2}}) \end{aligned}$$

où $L_i \mapsto Q_i \in \mathcal{P}(L_i)$, $i = 1, 2$, est associé à un choix de $\xi \in \{(H, -H) : H \in \mathfrak{a}_M\}$ en position générale.

D'autre part, on a

$$J_{\tilde{M}}(\gamma, f) = \sum_{L_1, L_2 \in \mathcal{L}(M)} d^G_M(L_1, L_2) J^{\tilde{L}_1}_{\tilde{M}}(\tilde{\gamma}, f_{\widetilde{Q_1}}) J^{\tilde{L}_2}_{\tilde{M}}(\tilde{\gamma}, f_{\widetilde{Q_2}})$$

pour tout $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{ell}}(M(F))^{\mathrm{bon}}$ qui est G-régulier, et $\tilde{\gamma} \mapsto \gamma$ quelconque.

Démonstration. Pour l'assertion spectrale, les cas de $J_{\tilde{M}}(\pi, \cdot)$ et de $J^r_{\tilde{M}}(\pi, \cdot)$ sont équivalents d'après le Lemme 5.7.3. On applique la formule de scindage [Chapitre III, §4.2] à la (G, M)-famille $(\mathcal{R}_{\tilde{Q}}(\Lambda, \pi, \tilde{P}))_{Q \in \mathcal{P}(M)}$:

$$\mathcal{R}_{\tilde{M}}(\pi, \tilde{P}) = \sum_{L_1, L_2 \in \mathcal{L}(M)} d^G_M(L_1, L_2) \mathcal{R}^{Q_1}_{\tilde{M}}(\pi_1^\vee, \tilde{P}) \boxtimes \mathcal{R}^{Q_2}_{\tilde{M}}(\pi_2, \tilde{P}).$$

Maintenant on peut reprendre l'argument standard d'Arthur (cf. la démonstration de [7, Lemma 7.1]) pour obtenir la formule de $J^r_{\tilde{M}}(\pi, f)$, puisque pour chaque L_i dans la somme ($i = 1, 2$), on peut remplacer P par un parabolique contenu dans Q_i d'après un argument analogue à celui de la preuve du Lemme 5.7.1.

L'assertion géométrique résulte de la formule de scindage appliquée à l'ensemble (G, M)-orthogonal définissant la fonction poids $v_M(x_1, x_2)$. □

On définit l'espace de Schwartz-Harish-Chandra $\mathcal{C}(\tilde{G} \times \tilde{G})$ et on note $\mathcal{C}_{--}(\tilde{G} \times \tilde{G})$ son sous-espace des fonctions anti-spécifiques sous l'action de μ_m via l'immersion anti-diagonale $\varepsilon \mapsto (\varepsilon^{-1}, \varepsilon)$. Les fonctions test $f = f_1 f_2$ considérées jusqu'à présent appartiennent à $\mathcal{C}_{--}(\tilde{G} \times \tilde{G})$.

Proposition 5.7.6. *Les distributions $J_{\tilde{M}}(\gamma, \cdot)$ et $J_{\tilde{M}}(\pi, \cdot)$ dans la formule des traces locale (le Théorème 5.5.2) se prolongent de façon unique en des formes linéaires continues sur $\mathcal{C}_{--}(\tilde{G} \times \tilde{G})$. De plus, la formule des traces locale (Théorème 5.5.2) demeure valable pour les fonctions test dans $\mathcal{C}_{-}(\tilde{G}) \oplus \mathcal{C}_{--}(\tilde{G})$.*

Démonstration. Pareille que [16, p.189]. Cependant, pour la part concernant le Théorème 5.5.2 il convient de remarquer que la majoration d'Arthur [16, (5.7)]

$$|J_{\tilde{M}}(\tilde{\gamma}, f)| \leq \nu_r(f)(1 + |\log |D(\gamma)||)^{\dim \mathfrak{a}_M^G}(1 + \|H_M(\gamma)\|)^{-n}, \quad f \in \mathcal{C}_{--}(\tilde{G}) \cup \mathcal{C}_{-}(\tilde{G})$$

où $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ est arbitraire et $r = r(n) \in \mathbb{R}$ dépend de n, est encore valable pour des raisons triviales. En effet, $|J_{\tilde{M}}(\tilde{\gamma}, f)| \leq J_M(\gamma, |f|)$; on applique alors la majoration d'Arthur à $J_M(\gamma, |f|)$ et on note que la borne cherchée ne dépend que de $|f|$ et γ. Par conséquent, on n'a pas encore besoin du théorème de finitude de Howe sur les revêtements dans le cas non archimédien. □

On est en mesure de définir les applications $\phi_{\tilde{M}}$ pour la formule des traces locale.

$$\begin{aligned} \phi_{\tilde{M}} : \mathcal{C}_{--}(\tilde{G} \times \tilde{G}) &\longrightarrow I\mathcal{C}_{--}(\tilde{M} \times \tilde{M}) \\ f &\longmapsto [\pi \mapsto J^{\mu}_{\tilde{M}}(\pi, f)] \end{aligned}$$

où $\pi = \pi_1^{\vee} \boxtimes \pi_2 \in \Pi_{\mathrm{temp},--}(\tilde{M}) \times \Pi_{\mathrm{temp},-}(\tilde{M})$. C'est sous-entendu que $\pi \mapsto J^{\mu}_{\tilde{M}}(\pi, f)$ appartient à $I\mathcal{C}_{--}(\tilde{M} \times \tilde{M})$, un fait qui est inclus dans le résultat suivant.

Théorème 5.7.7. *L'application $\phi_{\tilde{M}}$ est bien définie, linéaire et continue.*

Démonstration. Pareil que le cas avec une seule copie de $\tilde{G}$. □

Remarque 5.7.8. Vu la théorie de R-groupe §5.4, on peut aussi changer le paramétrage et définir les caractères pondérés $J_{\tilde{M}}(\tau, \cdot)$ ou $J^{\mu}_{\tilde{M}}(\tau_1^{\vee} \boxtimes \tau_2)$, où $\tau, \tau_1, \tau_2 \in T_{-}(\tilde{M})$. Les caractères pondérés "en π" et "en τ" s'expriment réciproquement à l'aide du Théorème 5.4.1.

5.8 La formule des traces locale invariante

Définition 5.8.1. Soient V, V' des espaces vectoriels topologiques et $\phi : V \to V'$ une application linéaire continue. On dit qu'une forme linéaire continue $I : V \to \mathbb{C}$ est supportée par V' si $I|_{\mathrm{Ker}\,\phi} = 0$. Dans ce cas-là, la forme linéaire continue induite $\mathrm{Im}(\phi) \to \mathbb{C}$ est notée $\hat{I}$.

Dans cet article, cette notion sera appliquée aux cas suivants.

1 $V = \mathcal{C}_{--}(\tilde{G})$, $V' = I\mathcal{C}_{--}(\tilde{G})$ et $\phi = \phi_{\tilde{G}}$;

2 $V = \mathcal{C}_{--}(\tilde{G} \times \tilde{G})$, $V' = I\mathcal{C}_{--}(\tilde{G} \times \tilde{G})$ et $\phi = \phi_{\tilde{G}}$.

En tout cas ϕ est surjectif. Afin d'établir la formule des traces locale invariante, raisonnons par récurrence sur $\dim G$ avec deux hypothèses qui seront établies dans le Corollaire 5.8.9. Dans ce qui suit, γ signifie un élément dans $\Gamma_{G-\mathrm{reg,ell}}(M(F))^{\mathrm{bon}}$ et $\tilde{\gamma} \in \mathbf{p}^{-1}(\gamma)$ est quelconque.

Hypothèse 5.8.2. On a défini les distributions spécifiques $I^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(\tilde{\gamma}, \cdot) : \mathcal{C}_{--}(\tilde{L}) \to \mathbb{C}$. Elles sont supportées par $I\mathcal{C}_{--}(\tilde{L})$ pour tout $L \in \mathcal{L}(M_0)$, $L \neq G$. On définit

$$I_{\tilde{M}}(\tilde{\gamma}, f) := J_{\tilde{M}}(\gamma, f) - \sum_{L \in \mathcal{L}(M), L \neq G} \hat{I}^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(\gamma, \phi_{\tilde{L}}(f)).$$

Hypothèse 5.8.3. On a défini les distributions spécifiques $I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma, \cdot) : \mathcal{C}_{--}(\tilde{L} \times \tilde{L}) \to \mathbb{C}$. Elles sont supportées par $I\mathcal{C}_{--}(\tilde{L} \times \tilde{L})$ pour tout $L \in \mathcal{L}(M_0)$, $L \neq G$. On définit

$$I_{\tilde{M}}(\gamma, f) := J_{\tilde{M}}(\gamma, f) - \sum_{L \in \mathcal{L}(M), L \neq G} \hat{I}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma, \phi_{\tilde{L}}(f)),$$
$$I(f) := J(f) - \sum_{L \in \mathcal{L}(M_0), L \neq G} |W_0^L||W_0^G|^{-1}(-1)^{\dim A_L/A_G} \hat{I}^{\tilde{L}}(\phi_{\tilde{L}}(f)).$$

La définition ci-dessus de $I(f)$ est loisible car on vérifie que $I(f)$ est égal à

$$I_{\mathrm{geom}}(f) := \sum_{M \in \mathcal{L}(M_0)} |W_0^M||W_0^G|^{-1}(-1)^{\dim A_M/A_G} \int_{\Gamma_{G-\mathrm{reg,ell}}(M(F))^{\mathrm{bon}}} I_{\tilde{M}}(\gamma, f)\, \mathrm{d}\gamma \tag{IV.37}$$

à l'aide du Théorème 5.5.2 et de la définition de $I_{\tilde{M}}(\gamma, \cdot)$; donc $I(\cdot)$ est spécifique supportée par $I\mathcal{C}_{--}(\tilde{G} \times \tilde{G})$ si chaque $I_{\tilde{M}}(\tilde{\gamma}, \cdot)$ l'est, et c'est satisfait si l'on remplace G par $L \in \mathcal{L}(M_0)$, $L \neq G$.

Tout d'abord, on voit que $I_{\tilde{M}}^{\tilde{M}}(\cdots) = J_{\tilde{M}}^{\tilde{M}}(\cdots)$. Cela permet de déterminer les distributions $I_{\tilde{M}}$ par récurrence modulo les deux hypothèses ci-dessus. Nous pouvons énoncer la formule des traces locale invariante maintenant. Rappelons que nous avons défini I_{geom} et I_{disc} dans (IV.37) et (IV.25), respectivement.

Lemme 5.8.4. *Soient $M \in \mathcal{L}(M_0)$, $\gamma \in \Gamma_{G-\mathrm{reg,ell}}(M(F))^{\mathrm{bon}}$. Avec le formalisme de [Chapitre III, §4.2], on a*

$$I_{\tilde{M}}(\gamma, f) = \sum_{L_1, L_2 \in \mathcal{L}(M)} d_M^G(L_1, L_2) I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_1}(\tilde{\gamma}, f_{1,\widetilde{Q_1}}) I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2}(\tilde{\gamma}, f_{2,\widetilde{Q_2}}).$$

où $L_i \mapsto Q_i \in \mathcal{P}(L_i)$, $i = 1, 2$, est associé à un choix de $\xi \in \{(H, -H) : H \in \mathfrak{a}_M\}$ en position générale.

Démonstration. Vu le Lemme 5.7.5 et la définition de $I_{\tilde{M}}(\gamma, f)$, cela résulte par récurrence. □

Lemme 5.8.5. *L'Hypothèse 5.8.2 entraîne l'Hypothèse 5.8.3.*

Démonstration. Les assertions dans l'Hypothèse 5.8.2 restent valables si l'on remplace l'indice $--$ par $-$, car on peut toujours passer de l'un à l'autre en poussant le revêtement par l'automorphisme $\boldsymbol{\varepsilon} \mapsto \boldsymbol{\varepsilon}^{-1}$ de μ_m. L'assertion résulte du Lemme 5.8.4. □

Théorème 5.8.6 (Cf. [21, Proposition 6.1])**.** *Supposons vérifiées l'Hypothèse 5.8.2. Pour tout $f = f_1 f_2 \in \mathcal{C}_{--}(\tilde{G} \times \tilde{G})$, on a*

$$I(f) = I_{\mathrm{geom}}(f) = I_{\mathrm{disc}}(f).$$

Démonstration. Il suffit de prouver $I_{\mathrm{disc}}(f) = I(f)$. Soit $M \in \mathcal{L}(M_0)$. On définit par récurrence des distributions

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\tau, \cdot) : \mathcal{C}_{--}(\tilde{G} \times \tilde{G}) \to \mathbb{C}, \quad L \in \mathcal{L}(M), \tau \in T_-(\tilde{M})$$

telles que $J_{\tilde{M}}(\tau, \cdot) = \sum_{L \in \mathcal{L}(M)} \hat{I}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\tau, \phi_{\tilde{L}}(\cdot))$. L'hypothèse de récurrence est que $I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\tau, \cdot)$ est supporté par $I\mathcal{C}_{--}(\tilde{L} \times \tilde{L})$ pour $L \neq G$. Puisque toute représentation en vue est tempérée, pour tout $\tau \in T_-(\tilde{M})$ on a

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tau, f) = \begin{cases} f_{\tilde{G}}(\tau), & \text{si } M = G, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où l'hypothèse de récurrence. Comme $I(\cdot)$ est défini suivant la même procédure utilisant $J(\cdot) = J_{\mathrm{spec}}(\cdot)$, il en résulte que $I(\cdot)$ est égal à la somme des termes avec $M = G$ dans $J_{\mathrm{spec}}(\cdot)$ (voir le Théorème 5.5.2), ce qui est $I_{\mathrm{disc}}(\cdot)$. □

Corollaire 5.8.7 (Cf. [15, Corollary 4.3]). *Pour* $\tau = (M, \sigma, r) \in T_{\mathrm{ell},-}(\tilde{G})$*, on pose*

$$d(\tau) := \det(1 - r|\mathfrak{a}_M^G).$$

Soient $f_1 \in \mathcal{C}_-(\tilde{G})$ *quelconque et* $f_2 \in \mathcal{C}_{--}(\tilde{G})$ *cuspidale, alors*

$$\sum_{M \in \mathcal{L}(M_0)} |W_0^M||W_0^G|^{-1}(-1)^{\dim A_M/A_G} \int\limits_{\Gamma_{\mathrm{ell},G-\mathrm{reg}}(M(F))^{\mathrm{bon}}} I_{\tilde{G}}(\tilde{\gamma}, f_1) I_{\tilde{M}}(\tilde{\gamma}, f_2)\, \mathrm{d}\gamma$$

$$= \int\limits_{T_{\mathrm{ell},-}(\tilde{G})} |d(\tau)|^{-1} \Theta(\tau^\vee, f_1)\Theta(\tau, f_2)\, \mathrm{d}\tau.$$

Démonstration. On utilise l'identité $I_{\mathrm{geom}}(f) = I_{\mathrm{spec}}(f)$. Dans le côté géométrique, pour tout $M \in \mathcal{L}(M_0)$ et tout $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{ell},G-\mathrm{reg}}(M(F))^{\mathrm{bon}}$, on a un analogue directe du Lemme 5.7.5 :

$$I_{\tilde{M}}(\gamma, f) = \sum_{L_1, L_2 \in \mathcal{L}(M)} d_M^G(L_1, L_2) I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_1}(\tilde{\gamma}, f_{1,\widetilde{Q_1}}) I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2}(\tilde{\gamma}, f_{2,\widetilde{Q_2}}).$$

Si $L_2 \neq G$, alors $I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2}(\tilde{\gamma}, \cdot)$ est supportée par $I\mathcal{C}_{--}(\tilde{L}_2 \times \tilde{L}_2)$, donc $I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_2}(\tilde{\gamma}, f_{2,\widetilde{Q_2}}) = 0$ par la cuspidalité de f_2. D'autre part,

$$d_M^G(L_1, G) = \begin{cases} 1, & \text{si } L_1 = M, \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases}$$

et on a $I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}_1}(\tilde{\gamma}, f_{1,\tilde{Q}_1}) = I_{\tilde{G}}(\tilde{\gamma}, f_1)$ lorsque $L_1 = M$. D'où

$$I_{\mathrm{geom}}(f) = \sum_{M \in \mathcal{L}(M_0)} |W_0^M||W_0^G|^{-1}(-1)^{\dim A_M/A_G} \int\limits_{\Gamma_{\mathrm{ell},G-\mathrm{reg}}(M(F))^{\mathrm{bon}}} I_{\tilde{G}}(\tilde{\gamma}, f_1) I_{\tilde{M}}(\tilde{\gamma}, f_2)\, \mathrm{d}\gamma.$$

Par définition

$$I_{\mathrm{disc}}(f) = \int\limits_{T_{\mathrm{disc},-}(\tilde{G})} i(\tau)\Theta(\tau^\vee, f_1)\Theta(\tau, f_2)\, \mathrm{d}\tau.$$

Soit $\tau = (M, \sigma, r) \in T_{\mathrm{disc},-}(\tilde{G})$. On fixe $P \in \mathcal{P}(M)$. Supposons que $\tau \in T_{\mathrm{ell},-}(\tilde{L})$ avec $L \in \mathcal{L}(M)$. D'après la théorie dans §5.4, $\Theta(\tau, f_2) = \mathrm{tr}\,(\tilde{R}_{\tilde{P}}(r, \sigma)\mathcal{I}_{\tilde{P}}(\sigma, f_2))$ est une combinaison linéaire de $f_{2,\tilde{L}}(\pi_L)$ où π_L sont des éléments dans $\Pi_\sigma(\tilde{L})$. Puisque f_2 est cuspidale, on a $\Theta(\tau, f_2) = 0$ sauf si $L = G$. Montrons que dans le cas $L = G$ on a $W_\sigma^0 = \{1\}$. En effet, rappelons que W_σ^0 est associé au système de racine sur $\mathfrak{a}_M$ engendré par les racines réduites α avec $\mu_\alpha(\sigma) = 0$. On choisit une chambre $\mathfrak{a}_\sigma^+$ de ce système et on identifie R_σ au sous-groupe de W_σ fixant $\mathfrak{a}_\sigma^+$. Si $W_\sigma^0 \neq \{1\}$ alors $\mathfrak{a}_\sigma^+ \neq \emptyset$, et r fixe la demi somme des coracines positives pour $\mathfrak{a}_\sigma^+$. Cela contredit l'hypothèse que $r \in R_{\sigma,\mathrm{reg}}$.

Donc pour $\tau \in T_{\mathrm{ell},-}(\tilde{G})$ on a $\epsilon_\sigma(r) = 1$ et $i(\tau) = |d(\tau)|^{-1}$ selon la définition de $i(\tau)$ dans (IV.24). Par conséquent

$$I_{\mathrm{disc}}(f) = \int\limits_{T_{\mathrm{ell},-}(\tilde{G})} |d(\tau)|^{-1}\Theta(\tau^\vee, f_1)\Theta(\tau, f_2)\, \mathrm{d}\tau.$$

□

Corollaire 5.8.8 (Cf. [15, Theorem 5.1]). *Soit $f_2 \in \mathcal{C}_{--}(\tilde{G})$ cuspidale. Pour tout $M \in \mathcal{L}(M_0)$ et tout $\gamma \in \Gamma_{G-\mathrm{reg}}(M(F))^{\mathrm{bon}}$, on a*

$$I_{\tilde{M}}(\tilde{\gamma}, f_2) = (-1)^{\dim A_M/A_G} \int\limits_{T_{\mathrm{ell},-}(\tilde{G})} |d(\tau)|^{-1} \Phi_{\tilde{M}}(\tau^\vee, \tilde{\gamma}) \Theta(\tau, f) \,\mathrm{d}\tau$$

où

$$\Phi_{\tilde{M}}(\tau^\vee, \tilde{\gamma}) := \begin{cases} |D(\gamma)|^{\frac{1}{2}} \Theta(\tau^\vee, \tilde{\gamma}), & \text{si } \gamma \text{ est } F\text{-elliptique dans } M, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. C'est plus commode d'utiliser les symboles M', γ' au lieu de M, γ dans cette preuve. Soient $M' \in \mathcal{L}(M_0)$ et $\gamma' \in \Gamma_{G-\mathrm{reg}}(M'(F))^{\mathrm{bon}}$. Supposons d'abord que γ' n'est pas F-elliptique dans M'. Alors une formule de descente (voir [10, Corollary 8.3]), le Lemme 5.7.5, l'Hypothèse 5.8.2 et la cuspidalité de f_2 entraînent que $I_{\tilde{M}'}(\gamma', f) = 0$. D'autre part $\Phi_{\tilde{M}'}(\tau^\vee, \tilde{\gamma}') = 0$ pour tout τ. Cela prouve l'assertion.

Supposons que γ' est F-elliptique dans M'. Soit $\tau \in T_{\mathrm{ell},-}(\tilde{G})$. Puisque $\Theta(\tau^\vee, \cdot)$ est une combinaison linéaire de caractères admissibles irréductibles, il est représenté par une fonction invariante localement intégrable sur $\tilde{G}$ et lisse sur $\tilde{G}_{\mathrm{reg}}$. Soit $f_1 \in \mathcal{C}_-(\tilde{G})$. La formule d'intégrale de Weyl donne

$$\Theta(\tau^\vee, f_1) = \sum_{M \in \mathcal{L}(M_0)} |W_0^M||W_0^G|^{-1} \int\limits_{\Gamma_{\mathrm{ell},G-\mathrm{reg}}(M(F))^{\mathrm{bon}}} \Phi_{\tilde{M}}(\tau^\vee, \tilde{\gamma}) I_{\tilde{G}}(\tilde{\gamma}, f_1) \,\mathrm{d}\tilde{\gamma}.$$

Pour $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{ell},G-\mathrm{reg}}(M(F))^{\mathrm{bon}}$ avec un relèvement $\tilde{\gamma}$ dans $\tilde{G}$, on définit la distribution spécifique

$$\delta(M, \tilde{\gamma}, \cdot) := I_{\tilde{M}}(\tilde{\gamma}, \cdot) - (-1)^{\dim A_M/A_G} \int\limits_{T_{\mathrm{ell},-}(\tilde{G})} |d(\tau)|^{-1} \Phi_{\tilde{M}}(\tau^\vee, \tilde{\gamma}) \Theta(\tau, \cdot) \,\mathrm{d}\tau.$$

Le but est de montrer que $\delta(M', \tilde{\gamma}', f_2) = 0$. D'après le Corollaire 5.8.7 et la formule ci-dessus pour $\Theta(\tau^\vee, \cdot)$, on a

$$\text{(IV.38)} \qquad \sum_{M \in \mathcal{L}(M_0)} |W_0^M||W_0^G|^{-1} (-1)^{\dim A_M/A_G} \int\limits_{\Gamma_{\mathrm{ell},G-\mathrm{reg}}(M(F))^{\mathrm{bon}}} I_{\tilde{G}}(\tilde{\gamma}, f_1) \delta(M, \tilde{\gamma}, f_2) \,\mathrm{d}\gamma = 0.$$

On a des isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} [M, \tilde{\gamma}] & \in & \left(\bigsqcup\limits_{M \in \mathcal{L}(M_0)} \Gamma_{\mathrm{ell},G-\mathrm{reg}}(\tilde{M})^{\mathrm{bon}} \right) / W_0^G \\ \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \tilde{\gamma} & \in & \Gamma_{\mathrm{reg}}(\tilde{G})^{\mathrm{bon}} \\ \downarrow & & \downarrow \simeq \\ (G_\gamma, \tilde{\gamma}) & \in & \bigsqcup\limits_{\substack{T: F-\text{tore maximal} \\ \text{mod conjugaison}}} (\tilde{T} \cap \tilde{G}_{\mathrm{reg}})/W(G(F), T(F)). \end{array}$$

Ces espaces sont des μ_m-torseurs au-dessus de leurs avatars associés à $G(F)$. On vérifie que $\delta(\cdot, \cdot, f_2)$ est bien définie comme une fonction sur le première espace et $I_{\tilde{G}}(\cdot, f_1)$ est une fonction sur le deuxième espace. Le côté à gauche de (IV.38) peut être regardé comme une intégrale sur l'un des trois espaces.

On pose $T' := G_{\gamma'}$. On prend $f_1 \in \mathcal{C}_-(\tilde{G})$ à support dans les classes de conjugaison rencontrant $\mathbf{p}^{-1}(T' \cap G_{\text{reg}})(F)$. Si l'on regarde $I_{\tilde{G}}(\cdot, f_2)$ comme une fonction sur le troisième espace dans ledit diagramme, alors elle est à support dans la composante indexée par T'. De plus, on peut prendre une suite de telles fonctions f_1 de sorte que $I_{\tilde{G}}(\cdot, f_1)$ tend vers la mesure de Dirac spécifique sur l'image réciproque de la $W(G(F), T'(F))$-orbite de γ'. Le côté à gauche de (IV.38) tend vers $m(-1)^{\dim A_M/A_G} \cdot |W(G(F), T'(F))| \cdot \delta(M', \tilde{\gamma}', f_2)$. On en déduit que $\delta(M', \tilde{\gamma}', f_2) = 0$, ce qu'il fallait démontrer. □

Corollaire 5.8.9. *Les distributions $I_{\tilde{M}}(\tilde{\gamma}, \cdot)$ sont supportées par $I\mathcal{C}_{\text{-}\text{-}}(\tilde{M})$.*

Démonstration. Soit $f_2 \in \mathcal{C}_{\text{-}\text{-}}(\tilde{G})$ telle que $f_{2,\tilde{G}} = 0$, alors f_2 est cuspidale. Le corollaire précédent permet de conclure que $I_{\tilde{M}}(\tilde{\gamma}, f_2) = 0$ car $\Theta(\tau, \cdot)$ est à support à $I\mathcal{C}_{\text{-}\text{-}}(\tilde{M})$. □

Ce résultat justifie les Hypothèses 5.8.2, 5.8.3. On établit ainsi la formule des traces locale invariante.

Donnons une application importante de ce corollaire.

Théorème 5.8.10 (Cf. [42, Theorem 0])**.** *Supposons F non archimédien. Soit $f \in C^{\infty}_{c,\text{-}\text{-}}(\tilde{G})$, les conditions suivantes sont équivalentes.*

- *(a) f appartient au sous-espace de $C^{\infty}_{c,\text{-}\text{-}}(\tilde{G})$ engendré par fonction de la forme $g - g^y$, où $g \in C^{\infty}_{c,\text{-}\text{-}}(\tilde{G})$ et $y \in G(F)$.*
- *(b) Pour tout $\tilde{\gamma} \in \Gamma_{\text{reg}}(\tilde{G})^{\text{bon}}$, on a $I_{\tilde{G}}(\tilde{\gamma}, f) = 0$.*
- *(c) Pour tout $\pi \in \Pi_-(\tilde{G})$, on a $\langle \Theta_\pi, f \rangle = 0$.*
- *(d) Pour tout $\pi \in \Pi_{\text{temp},-}(\tilde{G})$, on a $\langle \Theta_\pi, f \rangle = 0$.*

Rappelons que Θ_π siginifie le caractère de π.

Démonstration. C'est clair que (a) entraîne (b),(c),(d) et que (c) entraîne (d). Vu la Proposition 4.2.6, (b) entraîne (a). D'après le Corollaire 5.8.9 appliqué au cas $M = G$, on voit que (d) entraîne (b). Cela achève la démonstration. □

Remarque 5.8.11. L'une des conséquences directes de la formule des traces locale simple est le rapport de l'orthogonalité, cf. [15, §6] ; les preuves sont identiques sauf que l'on utilise le théorème de Paley-Wiener invariant tempéré (le Théorème 5.6.10) au lieu de sa version $\tilde{K}$-finie à support compact. Cette théorie sera importante dans des applications de la formule des traces aux revêtements.

Bibliographie

[1] *Schémas en groupes. I : Propriétés générales des schémas en groupes.* Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3). Dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 151. Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[2] J. Adams : Lifting of characters on orthogonal and metaplectic groups. *Duke Math. J.*, 92(1):129–178, 1998.

[3] J. Adams, D. Barbasch, A. Paul, P. Trapa et D. A. Vogan, Jr. : Unitary Shimura correspondences for split real groups. *J. Amer. Math. Soc.*, 20(3):701–751 (electronic), 2007.

[4] J. D. Adler et S. DeBacker : Some applications of Bruhat-Tits theory to harmonic analysis on the Lie algebra of a reductive p-adic group. *Michigan Math. J.*, 50(2):263–286, 2002.

[5] J. Arthur : A trace formula for reductive groups. I. Terms associated to classes in $G(\mathbf{Q})$. *Duke Math. J.*, 45(4):911–952, 1978.

[6] J. Arthur : A trace formula for reductive groups. II. Applications of a truncation operator. *Compositio Math.*, 40(1):87–121, 1980.

[7] J. Arthur : The trace formula in invariant form. *Ann. of Math. (2)*, 114(1):1–74, 1981.

[8] J. Arthur : A measure on the unipotent variety. *Canad. J. Math.*, 37(6):1237–1274, 1985.

[9] J. Arthur : On a family of distributions obtained from orbits. *Canad. J. Math.*, 38(1):179–214, 1986.

[10] J. Arthur : The invariant trace formula. I. Local theory. *J. Amer. Math. Soc.*, 1(2):323–383, 1988.

[11] J. Arthur : The invariant trace formula. II. Global theory. *J. Amer. Math. Soc.*, 1(3):501–554, 1988.

[12] J. Arthur : The local behaviour of weighted orbital integrals. *Duke Math. J.*, 56(2):223–293, 1988.

[13] J. Arthur : Intertwining operators and residues. I. Weighted characters. *J. Funct. Anal.*, 84(1):19–84, 1989.

[14] J. Arthur : A local trace formula. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (73):5–96, 1991.

[15] J. Arthur : On elliptic tempered characters. *Acta Math.*, 171(1):73–138, 1993.

[16] J. Arthur : On the Fourier transforms of weighted orbital integrals. *J. Reine Angew. Math.*, 452:163–217, 1994.

[17] J. Arthur : The trace Paley Wiener theorem for Schwartz functions. *In Representation theory and analysis on homogeneous spaces (New Brunswick, NJ, 1993)*, vol. 177 de *Contemp. Math.*, p. 171–180. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[18] J. Arthur : Canonical normalization of weighted characters and a transfer conjecture. *C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can.*, 20(2):33–52, 1998.

[19] J. Arthur : On the transfer of distributions : weighted orbital integrals. *Duke Math. J.*, 99(2):209–283, 1999.

[20] J. Arthur : A stable trace formula. I. General expansions. *J. Inst. Math. Jussieu*, 1(2):175–277, 2002.

[21] J. Arthur : A stable trace formula. III. Proof of the main theorems. *Ann. of Math. (2)*, 158(3):769–873, 2003.

[22] J. Arthur : An introduction to the trace formula. *In Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties*, vol. 4 de *Clay Math. Proc.*, p. 1–263. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[23] A. Bouaziz : Intégrales orbitales sur les algèbres de Lie réductives. *Invent. Math.*, 115(1): 163–207, 1994.

[24] A. Bouaziz : Intégrales orbitales sur les groupes de Lie réductifs. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 27(5):573–609, 1994.

[25] F. Bruhat et J. Tits : Groupes réductifs sur un corps local I : données radicielles valuées. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (41):5–251, 1972.

[26] F. Bruhat et J. Tits : Groupes réductifs sur un corps local. II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (60):197–376, 1984.

[27] J.-L. Brylinski et P. Deligne : Central extensions of reductive groups by $\mathbf{K}_2$. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (94):5–85, 2001.

[28] P. Cartier : Representations of p-adic groups : a survey. *In Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, p. 111–155. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[29] P. Chaudouard et G. Laumon : Le lemme fondamental pondéré. I : Constructions géométriques. *ArXiv e-prints*, fév. 2009.

[30] P. Chaudouard et G. Laumon : Le lemme fondamental pondéré. II. Énoncés cohomologiques. *ArXiv e-prints*, déc. 2009.

[31] L. Clozel : Characters of nonconnected, reductive p-adic groups. *Canad. J. Math.*, 39(1):149–167, 1987.

[32] L. Clozel et P. Delorme : Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs. *Invent. Math.*, 77(3):427–453, 1984.

[33] L. Clozel, J.-P. Labesse et R. Langlands : *Morning Seminar on the Trace Formula.* Institute for Advanced Study, 1984. Lecture notes.

[34] Y. Z. Flicker : Automorphic forms on covering groups of GL(2). *Invent. Math.*, 57(2):119–182, 1980.

[35] Y. Z. Flicker et D. A. Kazhdan : Metaplectic correspondence. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (64):53–110, 1986.

[36] A. Grothendieck et M. Raynaud : *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1).* Documents Mathématiques (Paris), 3. Société Mathématique de France, Paris, 2003. Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960–61.

[37] T. C. Hales : A simple definition of transfer factors for unramified groups. *In Representation theory of groups and algebras*, vol. 145 de *Contemp. Math.*, p. 109–134. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[38] Harish-Chandra : Discrete series for semisimple Lie groups. II. Explicit determination of the characters. *Acta Math.*, 116:1–111, 1966.

[39] Harish-Chandra : Harmonic analysis on real reductive groups. III. The Maass-Selberg relations and the Plancherel formula. *Ann. of Math. (2)*, 104(1):117–201, 1976.

[40] Harish-Chandra : *Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups*, vol. 16 de *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. Preface and notes by Stephen DeBacker and Paul J. Sally, Jr.

[41] T. Howard : *Lifting of Characters on p-adic Orthogonal and Metaplectic Groups*. Thèse de doctorat, University of Maryland, 2007.

[42] D. Kazhdan : Cuspidal geometry of p-adic groups. *J. Analyse Math.*, 47:1–36, 1986.

[43] A. W. Knapp et D. A. Vogan, Jr. : *Cohomological induction and unitary representations*, vol. 45 de *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.

[44] A. W. Knapp et G. Zuckerman : Classification theorems for representations of semisimple Lie groups. *In Non-commutative harmonic analysis (Actes Colloq., Marseille-Luminy, 1976)*, p. 138–159. Lecture Notes in Math., Vol. 587. Springer, Berlin, 1977.

[45] M.-A. Knus : *Quadratic and Hermitian forms over rings*, vol. 294 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[46] R. E. Kottwitz : Rational conjugacy classes in reductive groups. *Duke Math. J.*, 49(4): 785–806, 1982.

[47] R. E. Kottwitz : Stable trace formula : elliptic singular terms. *Math. Ann.*, 275(3):365–399, 1986.

[48] R. E. Kottwitz et D. Shelstad : Foundations of twisted endoscopy. *Astérisque*, (255): vi+190, 1999.

[49] J.-P. Labesse : Cohomologie, stabilisation et changement de base. *Astérisque*, (257): vi+161, 1999. Appendix A by Laurent Clozel and Labesse, and Appendix B by Lawrence Breen.

[50] R. Langlands et D. Shelstad : Descent for transfer factors. *In The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, vol. 87 de *Progr. Math.*, p. 485–563, Boston, MA, 1990. Birkhäuser Boston.

[51] R. P. Langlands : On the classification of irreducible representations of real algebraic groups. *In Representation theory and harmonic analysis on semisimple Lie groups*, vol. 31 de *Math. Surveys Monogr.*, p. 101–170. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.

[52] R. P. Langlands et D. Shelstad : On the definition of transfer factors. *Math. Ann.*, 278(1-4):219–271, 1987.

[53] W.-W. Li : Transfert d'intégrales orbitales pour le groupe métaplectique. 2009. arXiv :0906.4053.

[54] W.-W. Li : La formule des traces pour les revêtements de groupes réductifs connexes. I. Le développement géométrique fin. arXiv :1004.4011, 2010.

[55] W.-W. Li : Le lemme fondamental pondéré pour le groupe métaplectique. 2010. arXiv :1006.4780.

[56] G. Lion et P. Perrin : Extension des représentations de groupes unipotents p-adiques. Calculs d'obstructions. *In Noncommutative harmonic analysis and Lie groups (Marseille, 1980)*, vol. 880 de *Lecture Notes in Math.*, p. 337–356, Berlin, 1981. Springer.

[57] G. Lion et M. Vergne : *The Weil representation, Maslov index and theta series*, vol. 6 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Mass., 1980.

[58] G. Lusztig et N. Spaltenstein : Induced unipotent classes. *J. London Math. Soc. (2)*, 19(1):41–52, 1979.

[59] K. Maktouf : Le caractère de la représentation métaplectique et la formule du caractère pour certaines représentations d'un groupe de Lie presque algébrique sur un corps p-adique. *J. Funct. Anal.*, 164(2):249–339, 1999.

[60] H. Matsumoto : Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 2:1–62, 1969.

[61] P. J. McNamara : Metaplectic Whittaker functions and crystal bases, 2009. arXiv :0907.2675.

[62] P. J. McNamara : Principal series representations of metaplectic groups over local fields, 2009. arXiv :0911.2274.

[63] P. Mezo : Comparisons of general linear groups and their metaplectic coverings. II. *Represent. Theory*, 5:524–580 (electronic), 2001.

[64] P. Mezo : Comparisons of general linear groups and their metaplectic coverings. I. *Canad. J. Math*, 54:92–137, 2002.

[65] C. Mœglin, M.-F. Vignéras et J.-L. Waldspurger : *Correspondances de Howe sur un corps p-adique*, vol. 1291 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[66] C. Mœglin et J.-L. Waldspurger : *Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein*, vol. 113 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1994. Une paraphrase de l'Écriture.

[67] Ngô Bao Châu : Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 111(1):1–169, 2010.

[68] P. Perrin : Représentations de Schrödinger, indice de Maslov et groupe metaplectique. *In Noncommutative harmonic analysis and Lie groups (Marseille, 1980)*, vol. 880 de *Lecture Notes in Math.*, p. 370–407, Berlin, 1981. Springer.

[69] R. Ranga Rao : Orbital integrals in reductive groups. *Ann. of Math. (2)*, 96:505–510, 1972.

[70] D. Renard : Transfert d'intégrales orbitales entre $\mathrm{Mp}(2n, \mathbf{R})$ et $\mathrm{SO}(n+1, n)$. *Duke Math. J.*, 95(2):425–450, 1998.

[71] D. Renard : Endoscopy for $\mathrm{Mp}(2n, \mathbf{R})$. *Amer. J. Math.*, 121(6):1215–1243, 1999.

[72] G. Savin : Local Shimura correspondence. *Math. Ann.*, 280(2):185–190, 1988.

[73] G. Savin : On unramified representations of covering groups. *J. Reine Angew. Math.*, 566:111–134, 2004.

[74] J. Schultz : *Lifting of Characters of* $\widetilde{SL}_2(F)$ *and* $SO_{1,2}(F)$ *for* F *a Nonarchemidean Local Field*. Thèse de doctorat, University of Maryland, 1998.

[75] D. Shelstad : Tempered endoscopy for real groups. I. Geometric transfer with canonical factors. *In Representation theory of real reductive Lie groups*, vol. 472 de *Contemp. Math.*, p. 215–246. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[76] A. J. Silberger : The Knapp-Stein dimension theorem for p-adic groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 68(2):243–246, 1978.

[77] A. J. Silberger : Correction : "The Knapp-Stein dimension theorem for p-adic groups" [Proc. Amer. Math. Soc. **68** (1978), no. 2, 243–246 ; MR **58** #11245]. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 76(1):169–170, 1979.

[78] T. Thomas : The Maslov index as a quadratic space. *Math. Res. Lett.*, 13(5-6):985–999, 2006. arXiv :math/0505561v3.

[79] T. Thomas : The character of the Weil representation. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 77(1):221–239, 2008.

[80] T. Thomas : The Weil representation and Cayley transform. Disponible sur `http://www.maths.ed.ac.uk/~jthomas7/texts/Weil2.pdf`, 2008.

[81] D. A. Vogan, Jr. : The algebraic structure of the representation of semisimple Lie groups. I. *Ann. of Math. (2)*, 109(1):1–60, 1979.

[82] J.-L. Waldspurger : Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés. *Astérisque*, (269):vi+449, 2001.

[83] J.-L. Waldspurger : La formule de Plancherel pour les groupes p-adiques (d'après Harish-Chandra). *J. Inst. Math. Jussieu*, 2(2):235–333, 2003.

[84] J.-L. Waldspurger : L'endoscopie tordue n'est pas si tordue. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 194(908):x+261, 2008.

[85] J.-L. Waldspurger : À propos du lemme fondamental pondéré tordu. *Math. Ann.*, 343(1):103–174, 2009.

[86] J.-L. Waldspurger : Endoscopie et changement de caractéristique : intégrales orbitales pondérées. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 59(5):1753–1818, 2009.

[87] J.-L. Waldspurger : Errata, 2009. `http://www.math.jussieu.fr/~waldspur`.

[88] N. R. Wallach : *Real reductive groups. II*, vol. 132 de *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1992.

[89] A. Weil : Sur certains groupes d'opérateurs unitaires. *Acta Math.*, 111:143–211, 1964.

[90] M. H. Weissman : Metaplectic tori over local fields. *Pacific J. Math.*, 241(1):169–200, 2009.

Index du Chapitre I

Index du Chapitre II

Index du Chapitre III

Index du Chapitre IV

Errata

Ajoutés le 5 juillet 2011.

- p.182. III §6.1 : L'ensemble $\mathfrak{X}$ doit être défini comme l'ensemble des W_0^G-orbites des paires (M, σ), où $M \in \mathcal{L}(M_0)$ et σ est une classe d'équivalence de représentations automorphes cuspidales de $\tilde{M}^1$. Par ailleurs, les sous-groupes paraboliques ayant la même composante de Lévi ne sont pas forcément conjugués.
- p.183. III §6.1 : Ajouter "Cf. " devant la référence [66, II.1.6].
- p.183. III §6.1 : La définition correcte de $M_{Q|P}(w, \lambda)$ est

$$(M_{Q|P}(w,\lambda)\phi)(\tilde{x}) = \int\limits_{U_{Q|P}(\hat{w},\mathbb{A})} \phi(\hat{w}^{-1}u\tilde{x})e^{\langle \lambda+\rho_P, H_P(\hat{w}^{-1}ux)\rangle} e^{\langle -w\lambda-\rho_Q, H_Q(x)\rangle}\,\mathrm{d}u.$$